

530.182
Н-492

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

Структуры
и бифуркации

«ИЛЛЮСТРАЦИИ»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

СТРУКТУРЫ
И БИФУРКАЦИИ

Ответственные редакторы
академик
А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ
доктор физико-математических наук
М. И. РАБИНОВИЧ



МОСКВА «НАУКА»

1987

Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

В сборник включены обзорные и оригинальные статьи, написанные по материалам лекций, прочитанных на VII Всесоюзной школе по нелинейным волнам (Горький, март 1985 г.). Обсуждаются проблемы самоорганизации, динамического хаоса и турбулентности в связи с различными физическими приложениями.

Книга рассчитана на специалистов, занимающихся исследованиями нелинейных явлений.

Рецензенты: Д. И. ТРУБЕЦКОВ, В. Д. ШАЛФЕЕВ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Горьковские школы по нелинейным волнам часто называют «Школы по нелинейной физике». Это не случайно — уже на первых наших школах (в марте 1972 и 1973 гг.) обсуждались как общие проблемы и методы теории нелинейных колебаний и волн, так и разнообразные нелинейные явления в физике плазмы, твердого тела, астрофизике, химической кинетике, биологии и других областях естествознания. Таким образом, действительно, это были «Школы по нелинейным наукам». Заметим, что за рубежом в последние пять—семь лет словосочетание «nonlinear science» стало очень популярным. Под этим «лозунгом» проведено уже несколько международных симпозиумов, начали выходить сборники и журналы. Вообще интерес к нелинейным явлениям в самых разнообразных и зачастую неожиданных областях науки и ее приложений сейчас чрезвычайно велик и непрерывно возрастает.

По-видимому, не будет преувеличением сказать, что сейчас мы переживаем новый этап в развитии области науки, которую по традиции будем называть нелинейной теорией колебаний и волн или нелинейной динамикой. Как известно, классическая теория нелинейных колебаний, у истоков которой стояли А. Пуанкаре, Б. Ван-дер-Поль, Л. И. Мандельштам, А. А. Андронов, к началу 60-х годов была по существу построена. Был сформулирован единый «нелинейный язык», выработана междисциплинарная система моделей, образов и понятий — оформилось то, что Мандельштам называл «нелинейным мышлением». Были разработаны эффективные методы анализа нелинейной динамики разнообразных систем и сред. Однако так или иначе описание всего многообразия явлений сводилось к анализу динамических моделей с двумерным фазовым пространством. Выход в третье измерение если и реализовался, то за ним «стоял малый параметр», страхующий от появления качественно нового, неожиданного поведения.

К концу этого «классического» периода многим даже казалось, что практически все принципиальные задачи уже решены, и большинство специалистов по нелинейной физике занимались тем, что расширяли ее область приложений, непрерывно обнаруживая на этом пути «новые земли». Подобные исследования оказались очень важными в отношении получения конкретных практических результатов, однако они почти ничего не изменили в системе сложившихся к тому времени представлений о возможностях нелинейных систем. Положение качественно изменилось в середине 60-х годов благодаря открытию стохастического поведения в динамических системах и обнаружению устойчивых локализованных структур нелинейного поля (солитонов).

После рождения солитонов и открытия странных аттракторов (и вообще хаотической динамики) начался новый период в развитии теории нелинейных колебаний и волн — период исследования сильно нелинейных явлений, разворачивающихся во времени и в пространстве, качественно отличающихся от явлений квазилинейной физики¹. Успехи в этой новой области следовали один за другим, и уже к началу 80-х годов был достигнут довольно высокий уровень понимания и описания хаотической динамики нелинейных систем и сред, поведения солитонов и их ансамблей и т. д. Здесь предстоит еще очень много сделать, но сейчас центр тяжести нелинейной динамики уже смещается в новом направлении — это исследование сложных нелинейных систем с переменной структурой, систем с памятью и самообучением.

На первых наших школах ясно прослеживались две линии: шло обучение по общим проблемам классической теории и обсуждались и развивались новые направления (тогда это были динамика солитонов, коллапс, странные аттракторы и т. д.). На предыдущей же школе (1981 г.) на все это времени не хватило и знания в области классической теории уже не столько преподавались, сколько предполагались. Основное же внимание было уделено проблемам, связанным с динамикой процессов возникновения и разрушения порядка в сложных системах и средах. На прошедшей школе (1985 г.), по материалам которой составлена данная книга, обсуждение проблем самоорганизации и хаотизации сложных систем

¹ См.: Гапонов-Грезов А. В., Рабинович М. И. Нелинейная физика. Стохастичность и структуры // Физика XX века: Развитие и перспективы. М.: Наука, 1984. С. 219—280.

было продолжено и были уже сделаны шаги в постановке задач в самых новых областях нелинейной динамики (см., в частности, статьи Б. Б. Кадомцева и А. А. Веденова с соавторами в этой книге).

Подчеркнем, что исследование нелинейной динамики и построение моделей сложных процессов и систем, например таких, как турбулентное течение жидкости или кора головного мозга человека, требует новых методов диагностики. Весьма перспективными оказались, в частности, методы восстановления динамической модели, основывающиеся на анализе размерности реализации, которые также обсуждались на школе (см. статью М. М. Сушица). Упомянем в связи с этим и недавнюю работу А. Баблюянец «Странные аттракторы в динамике мозговой активности» (Complex systems — operational approaches in neurobiology, physics and computers. Berlin, 1985. P. 117—122), в которой была измерена размерность электроэнцефалограммы человека в различные фазы сна.

Помимо теории формирования и динамики структур в сложных нелинейных системах и средах, на прошедшей школе обсуждались традиционные «нелинейные проблемы», связанные с динамикой океана, физикой плазмы, атмосферной динамикой и т. д. Наряду с вошедшими в эту книгу на школе были прочитаны также лекции В. И. Арнольда «Теория катастроф», Я. Г. Синая «Метод ренормализации в теории динамических систем», Ф. В. Бункина, Н. А. Кириченко, Б. С. Лукьянчука «Нелинейная динамика термохимических процессов в поле лазерного излучения», В. Е. Захарова «Неоднородные солитоны», Я. Б. Зельдовича «Структура Вселенной» и «Фракталы, случайные траектории и перемежаемость», А. В. Дыхне «Диссипативные системы при термоконвекции» и др. Материалы по этим лекциям уже опубликованы ранее в монографиях и обзорных статьях.

Конечно, многие важные направления нелинейной динамики мы лишь слегка затронули на школе, а многие не обсуждали вообще. Отдельные из этих направлений будут рассматриваться, как мы надеемся, на следующей — VIII школе, которая должна состояться в марте 1987 г. Среди них упомянем нелинейную динамику живого (формообразование и эволюция, структуры в биологических средах, динамика экологических систем и т. п.), компьютерную нелинейную физику (решеточные модели нелинейных полей, использование многопроцессорных комплексов, био-

компьютеры), нелинейную квантовую динамику (сжатые состояния в оптике, квантовый хаос, локализация и квазикристаллы). Сегодня эти проблемы привлекают широкое внимание специалистов и с точки зрения фундаментальной, и с точки зрения прикладной науки.

В заключение мы пользуемся случаем, чтобы выразить признательность авторам, представившим материалы в данный сборник, и надеемся на плодотворное сотрудничество в будущем.

*А. В. Гапонов-Грехов,
М. И. Рабинович*

АВТОСТРУКТУРЫ. ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА АНСАМБЛЕЙ

А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, М. И. РАБИНОВИЧ

1. Эксперименты и модели

О предмете статьи. Регулярные, зачастую весьма замысловатой формы пространственные образования (структуры) в неравновесных диссипативных средах и пространственно-временной беспорядок (турбулентность) в таких средах интуитивно хочется противопоставить друг другу. В действительности, и это будет продемонстрировано далее, и высокоорганизованные структуры, и турбулентность есть проявление нелинейной динамики диссипативной среды, далекой от термодинамического равновесия. Структуры, как правило, возникают в предтурбулентном режиме. Однако даже развитая турбулентность представляет собой не абсолютный хаос, а «конечной степени» неупорядоченное движение неравновесной среды, в котором динамика структур играет существенную роль.

Перед исследователями, занимающимися анализом структур и пространственного хаоса в гидродинамических течениях, газовом разряде, в биологических возбудимых средах и т. д., возникают одни и те же вопросы, например: что такое пространственный хаос; какую роль в его формировании играют структуры; как соотносятся между собой пространственный и временной хаос; какими должны быть количественные характеристики пространственно-временного хаоса и как они связаны с динамикой элементарных структур и характером взаимодействия между ними и пр. На некоторые из этих вопросов мы попытаемся дать ответ. Будут рассмотрены примеры различных структур, некоторые фундаментальные уравнения, их описывающие, обсуждено взаимодействие структур в ансамблях. Рассмотрению динамики ансамблей структур (регулярной и хаотической) будет уделено основное внимание.

Определения и примеры. При всем разнообразии пространственно-временных структур, наблюдаемых в неравновесных средах, их, пользуясь аналогией с колебаниями, естественно разделить на три группы. Как известно, среди колебаний выделяют свободные, вынужденные и автоколебания. Сохраним эту классификацию и для структур. Тогда свободные структуры — это, скажем, вихри в идеальных (или почти идеальных) течениях жидкости. Наиболее наглядный пример здесь — всем хорошо извест-

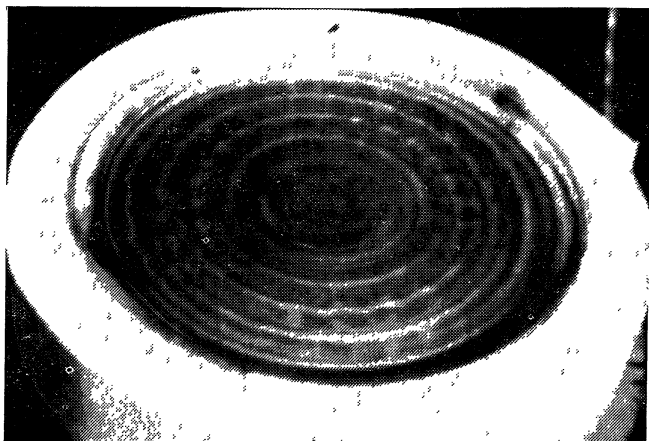


Рис. 1. Кольцевые конвективные вали в цилиндрическом контейнере [1]

ные дымовые кольца. Примером вынужденных структур могут служить замкнутые конвективные вали в тех случаях, когда их форма определяется формой границ кюветы, где наблюдается конвекция Рэлея—Бенара (рис. 1). Автоструктуры — это гораздо менее тривиальные образования, поэтому, прежде чем приводить примеры, дадим их более четкое определение.

Под автоструктурами будем понимать локализованные пространственные образования, устойчиво существующие в диссипативных неравновесных средах и не зависящие (в конечных пределах) от граничных и начальных условий. Именно независимость от конечного изменения граничных и начальных условий является главным свойством автоструктур. Естественно, такое возможно лишь в средах с диссипацией¹. Однако подобно тому как автоколебания в качестве порождающих решений могут иметь семейство консервативных (свободных) колебаний, среди которых вводимые малые диссипация и подкачка энергии лишь «выбирают» определенное движение, сохраняя его форму, так и автоструктуры в слабонеравновесных средах (при малой надкритичности) могут наследовать свойства свободных структур в средах без диссипации. Хорошо известные примеры таких квазиконсервативных автоструктур — это самоподдерживающиеся солитоны [2, 3]; к числу их, возможно, относится и Большое Красное Пятно Юпитера [4].

Автоструктуры могут быть статические (для них характерно отсутствие каких-либо движений), стационарные (с постоянным движением, например вращением) и динамические (регулярно или хаотически пульсирующие во времени).

¹ Здесь диссипация понимается в общем смысле. Например, автоструктуры в принципе могут существовать в невязких течениях, если область подвода энергии локализована в пространстве, а «диссипация» осуществляется, скажем, за счет излучения волн автоструктурой.

Статические автоструктуры чаще всего реализуются в однокомпонентных неравновесных средах. К их числу относятся, например, структуры, возникающие в результате локализации процесса горения в среде с объемным источником тепла и коэффициентом теплопроводности, степенным образом зависящим от температуры [5]. В двумерных и трехмерных средах формирование статических автоструктур сейчас привлекает большой интерес в связи с проблемами морфогенеза [6]. Пример нетривиальной статической автоструктуры приведен на рис. 2 [7]. Эта трехрукавная спираль устанавливается при $t \rightarrow \infty$ в тонком слое фосфолипида — природного жира в результате развития пространственно-неизотропной диффузионной неустойчивости².

Автоструктуры со стационарным движением — стационарные структуры реализуются, как правило, в неоднородных либо неоднородных неравновесных средах. Разнообразие таких структур демонстрируют гидродинамические течения. Однако обычно наблюдаются лишь ансамбли подобных структур: цепочки вихрей Тейлора в течении Куэтта между цилиндрами [9], соты при конвекции Рэлея—Бенара [1] и т. д. Уединенную стационарную автоструктуру удалось наблюдать совсем недавно (рис. 3)

Рис. 2. Схематическое изображение трехрукавной спирали, возникшей в монослое фосфолипида на поверхности раздела вода — воздух [7]

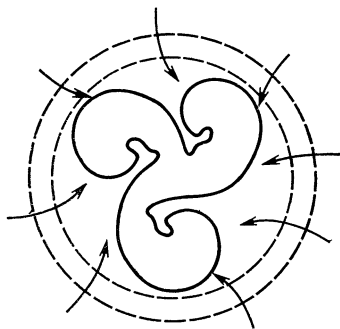
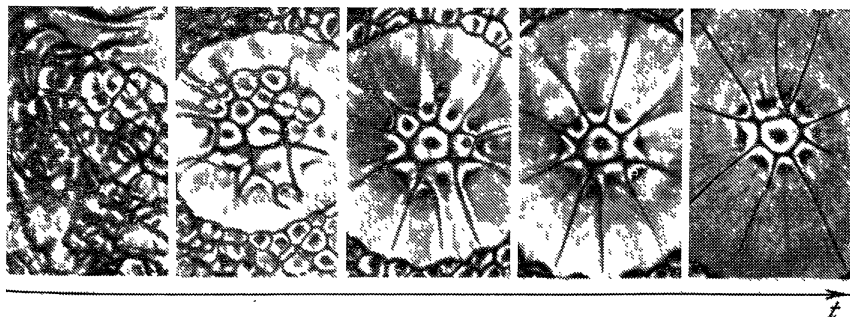


Рис. 3. Рождение уединенной автоструктуры во времени (термокапиллярная конвекция в плоском слое с неоднородным подогревом) [10]



² Анизотропия диффузионных коэффициентов в данном случае связана с анизотропией молекул фосфолипида [8].

[10]. Близкая к правильному многограннику ячейка с вихревым движением внутри нее устанавливалась независимо от начальных и граничных условий в тонком слое силиконового масла при неоднородном подогреве снизу. Как было показано в [10], форма установившейся ячейки не зависит и от формы подогревателя, т. е. это действительно «собственная мода» нелинейной неравновесной среды.

Легко представить себе, что такие автоструктуры могут возникать не в заданном поле неоднородности (в данном случае температуры), а в самосогласованном. Действительно, и при однородном подогреве с ростом надкритичности (числа Рэлея в случае конвекции Рэлея—Бенара или числа Марангони в случае термокапиллярной конвекции) в слое возникнут турбулентные движения; в результате величина теплопереноса будет случайно изменяться в пространстве и, как следствие, поле температуры также станет случайно неоднородным.

Пусть для определенности речь идет о жидкости с большим числом Прандтля ($Pr = \nu/\kappa \gg 1$, ν — динамическая вязкость, κ — теплопроводность). Тогда поле скорости будет «следить» за полем температуры. Это означает, что если в поле замороженной температурной неоднородности возникают универсальные вихревые образования, не зависящие от формы неоднородности, — автоструктуры, то они должны реализоваться и в самосогласованной нестационарной задаче. При этом турбулентность, приходящую с ростом надкритичности на смену регулярному ансамблю автоструктур в однородно подогреваемом слое, действительно можно рассматривать как хаотическую динамику такого ансамбля (см. ниже).

В отличие от статических и стационарных автоструктур для динамических структур характерно проявление еще и собственных — внутренних — степеней свободы. Такой структурой является, например, вихрь Тейлора (в круговом течении Куэтта), на котором возбуждена азимутальная волна. В общем случае возбужденных внутренних степеней свободы может быть несколько, тогда уже одиночная динамическая структура может демонстрировать нетривиальное поведение во времени (в том числе и хаотическое).

Ансамбли автоструктур. В дальнейшем мы будем обсуждать в основном динамику ансамблей автоструктур. Такие ансамбли возникают, как отмечалось, в однородных диссипативных средах при достаточно большой степени их неравновесности. На рис. 4 представлен пример однородного одномерного ансамбля динамических автоструктур. Это цепочка связанных друг с другом вихрей Тейлора, на которых возбуждены азимутальные моды. При увеличении скорости вращения внутреннего цилиндра коллективная динамика ансамбля становится хаотической, однако число элементов в ансамбле остается конечным и неизменным (см. рис. 4, в, г).

Другим примером однородного ансамбля динамических структур, но уже двумерного может служить ансамбль капиллярных

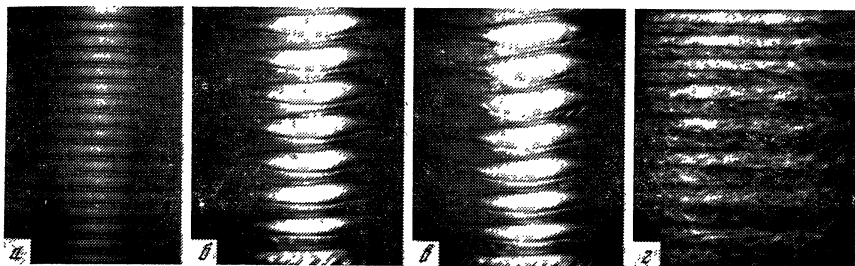


Рис. 4. Вихри Тейлора между концентрическими цилиндрами при вращении внутреннего цилиндра [9]

a — немодулированные вихри ($Re \approx Re_{кр}$); *б* — азимутальные волны на вихрях ($Re/Re_{кр} = 10,4$); *в* — появление случайности в динамике азимутальных волн ($Re/Re_{кр} = 12,3$); *г* — турбулентные «вихри Тейлора» ($Re/Re_{кр} = 23,5$)

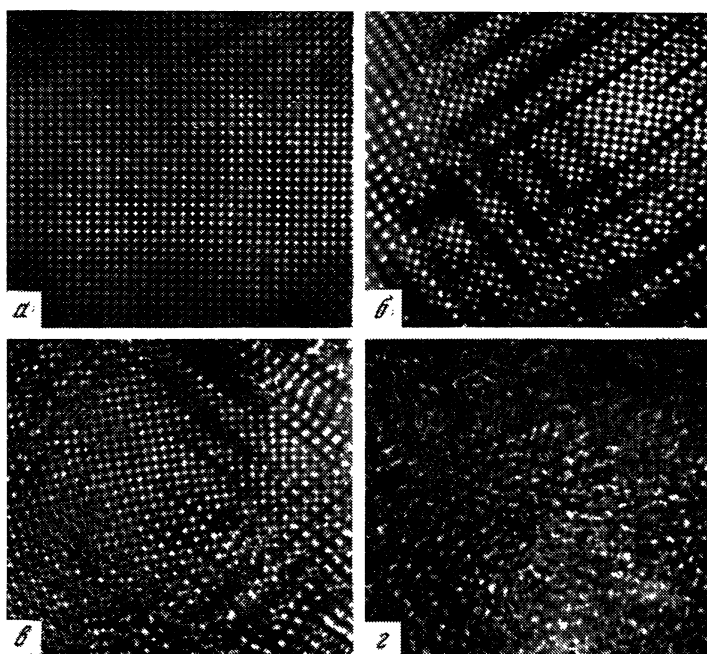


Рис. 5. Структуры капиллярной ряби на поверхности жидкости при параметрическом возбуждении [11]

a — регулярная решетка с квадратными ячейками (параметр надкритичности $R \geq R_1$); *б* — волны модуляции на фоне четырехгранников ($R \geq R_2$); *в* — возникновение дислокаций в ансамбле структур ($R \approx R_3$); *г* — турбулентный режим — ячейки хаотически пульсируют и движутся одна относительно другой ($R > 2R_3$)

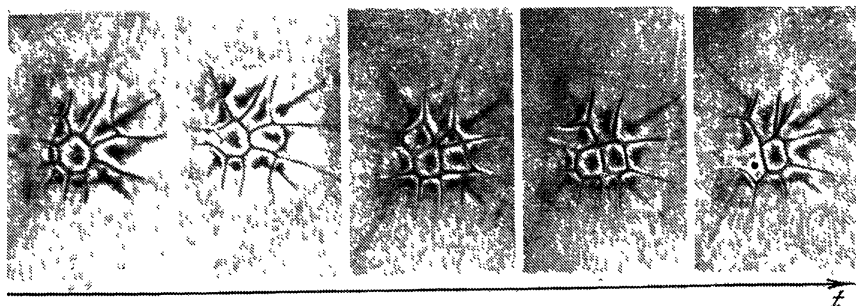


Рис. 6. Почти периодическое изменение числа конвективных ячеек в «ансамбле» [10]

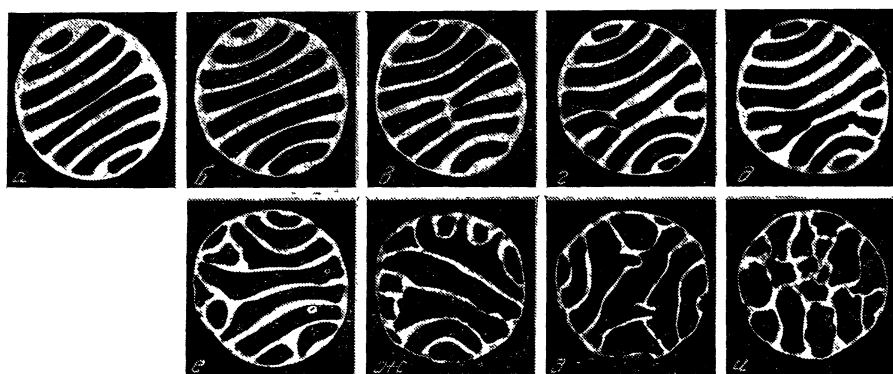


Рис. 7. Конвективные структуры в цилиндрическом контейнере с аргонem [13]

a — стационарные валы; *б—д* — периодические осцилляции в ансамбле валов; *е—и* — стохастическое рождение и исчезновение дислокаций

ячеек, возникающий на поверхности глубокой жидкости при ее параметрическом возбуждении (рис. 5) [11]. Здесь также возникновение турбулентности связано с хаотической динамикой коллективных возбуждений ансамбля, а число его элементов можно считать постоянным [12].

Число элементов в ансамбле при увеличении надкритичности сохраняется не всегда. Если число взаимодействующих структур невелико, то переход к хаосу связан обычно с рождением и исчезновением структур. Именно так ведут себя автоструктуры при термокапиллярной конвекции в плоском слое силиконового масла (рис. 6). Подобная же картина наблюдается и при термогравитационной конвекции в горизонтальном слое аргона ($Pr \ll 1$), помещенного в цилиндрический контейнер (рис. 7): при увеличении числа Рэлея конвективные валы совершают вначале периодические движения, которые затем переходят в случайные блуждания,

сопровождающиеся рождением, движением и исчезновением дислокаций.

Помимо однородных ансамблей с постоянным числом структур и ансамблей с «переменным составом», мы будем интересоваться еще и неоднородными ансамблями автоструктур. Неоднородность может быть связана с наличием границ, неоднородностью неравновесной среды либо с действием внешних полей. Одна из наиболее распространенных здесь ситуаций — ансамбли автоструктур, не-

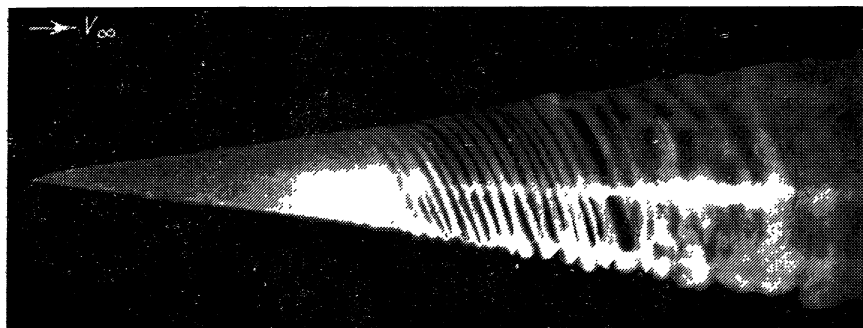


Рис. 8. Развитие хаоса на спиральных вихрях в пограничном слое на вращающемся конусе [14] ($V_\infty = 1,8$ м/с; конус 15°)

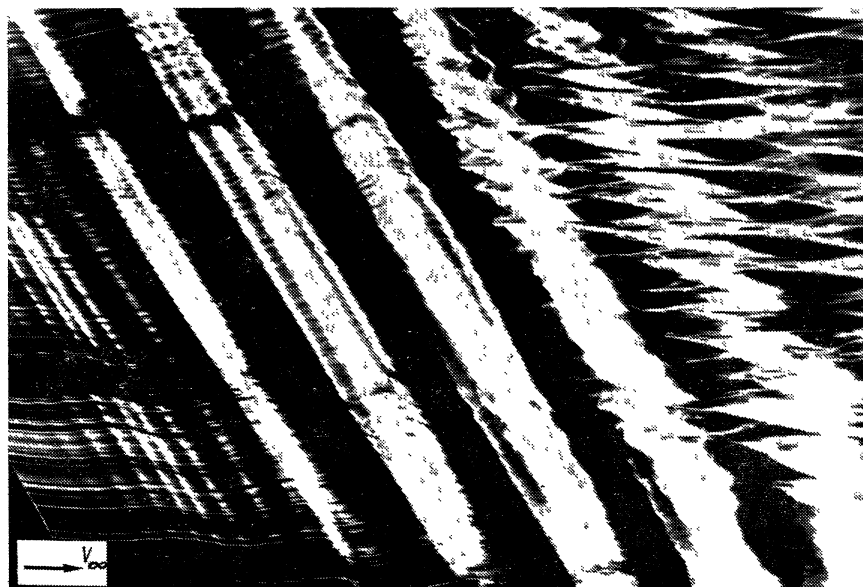


Рис. 9. Пространственное развитие хаоса в ансамбле вихревых структур в пограничном слое на плоской пластине [15]

взаимно связанных друг с другом. Такая невязанная связь характерна для неравновесных сред с потоками — пучки в плазме, сдвиговые течения в гидродинамике, автокаталитические химические реакции в реакторах с протоком. Благодаря наличию потока хаос в подобных ансамблях развивается не только во времени, но и в пространстве — вдоль потока.

На рис. 8 представлены результаты эксперимента по исследованию динамики структур в пограничном слое на вращающемся конусе. Как видно, в начале (на левом краю) течение устойчиво, далее по потоку возникают вихревые структуры — витки спирали. При движении вниз по потоку динамика витков становится все более сложной — хаотической, и, наконец, они распадаются на отдельные вихревые сгустки.

Подобная же картина наблюдается и при развитии турбулентности в пограничном слое на плоской пластине при наличии слабых периодических пульсаций в набегающем потоке (рис. 9). В результате развития конвективной неустойчивости волн Толмина—Шлихтинга в пограничном слое возникает ансамбль автоструктур в виде цилиндрических вихрей, располагающихся поперек потока. При движении вниз по течению на этих вихрях нарастают трехмерные возмущения — автоструктуры становятся динамическими. Затем поперечные (трехмерные) возбуждения на вихрях становятся сильнонелинейными и превращаются в цепочку так называемых Λ -вихрей [16]. В дальнейшем турбулентность в таком пограничном слое следует рассматривать как хаотическую динамику ансамбля Λ -вихрей.

Основные уравнения. Модели. Статические, стационарные и динамические структуры в общем случае, естественно, описываются различными уравнениями. Однако если временное поведение автоструктуры можно считать заданным, т. е. переменные, ответственные за формирование и собственную динамику структуры, разделяются, то для описания возникновения структуры в пространстве могут быть во всех трех случаях использованы одинаковые уравнения.

Независимость автоструктуры от начальных и граничных условий, помимо диссипативности и нелинейности неравновесной среды, предполагает и «потерю информации» при передаче возбуждений в пространстве. Обычно это означает, что в среде должна быть достаточно малой диффузия возмущения. Тогда общие уравнения нелинейной неравновесной среды с диффузией

$$\partial a / \partial t = \Phi(a, \nabla a, \kappa \nabla^2 a) \quad (1)$$

могут быть представлены в квазилинейной форме

$$\partial a / \partial t = F(a) + v(a) \nabla a + \kappa(a) \nabla^2 a. \quad (2)$$

Здесь $a(t, \mathbf{r})$ — вектор переменных, характеризующих поле структуры (например, температуру и компоненты скорости при конвекции), $v(a)$ ответственно за снос возмущений в пространстве, а $\kappa(a)$ определяет величину диффузии.

При небольшой надкритичности уравнения вида (2) могут быть получены непосредственно из исходных уравнений. Поясним процедуру получения таких уравнений на примере термоконвекции в подогреваемом снизу плоском слое жидкости. Исходными в данном случае будут уравнения Буссинеска [17]

$$\begin{aligned} (1/\text{Pr}) [\partial \mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}\nabla) \mathbf{u}] &= \theta \mathbf{z}_0 + \nabla^2 \mathbf{u}, \\ [\partial/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)] \theta &= \text{Ra} \, \mathbf{u} \mathbf{z}_0 + \nabla^2 \theta, \quad \Delta \mathbf{u} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\theta(\mathbf{r}, t)$ — отклонение температуры от линейного распределения по толщине слоя; $\text{Ra} = g\beta\Delta T d^3/\nu\kappa$ — число Рэлея ($d = 1$ — толщина слоя; ΔT — разность температур на его нижней и верхней поверхностях; g — ускорение свободного падения; β — коэффициент теплового расширения). Граничные условия для свободных границ записываются в виде

$$u_z = \partial u_x/\partial z = \partial u_y/\partial z = \theta = 0 \text{ при } z = 0, 1, \quad (4)$$

а для твердых границ

$$\mathbf{u} = \theta = 0 \text{ при } z = 0, 1. \quad (5)$$

Рассмотрим случай малой надкритичности — $\varepsilon = (\text{Ra} - \text{Ra}_{\text{кр}})/\text{Ra}_{\text{кр}} \ll 1$ ($\text{Ra}_{\text{кр}}$ — значение числа Рэлея, при котором возникают конвективные валы, расположенные вдоль оси y). Далее представим все переменные в виде рядов по степеням $\mu = \varepsilon^{1/4}$:

$$\psi = \mu^2 \psi^{(2)} + \mu^3 \psi^{(3)} + \mu^4 \psi^{(4)} + \dots, \quad (6)$$

где $\psi = (u_i, \theta)$, и сохраним слагаемые до $\varepsilon \sim \mu^4$ включительно. Тогда, считая структуру полей скорости и температуры по вертикали заданными:

$$u_z^{(2)} \sim \sin \pi z, \quad u_x^{(2)} \sim \cos \pi z, \quad \theta^{(2)} \sim \sin \pi z,$$

для медленно меняющихся функций $a(x, y, T)$ и $b(x, y, T)$, линейно связанных с u_i, θ , с помощью асимптотического метода можно из (3), (4) получить уравнения³ [17]

$$\frac{\partial a}{\partial T} = \left[1 - \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 a - |a|^2 \right] a - i b a, \quad (7)$$

$$\gamma \frac{\partial \Omega}{\partial T} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + g \frac{\partial}{\partial y} \left[a^* \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) a + \text{к. с.} \right], \quad (8)$$

$$\Omega = -\partial b/\partial y, \quad \gamma \sim \varepsilon^{1/2}/(1 + \text{Pr}), \quad g \sim (1 + \text{Pr})/\text{Pr}^2.$$

При выводе этих уравнений использовано масштабное преобразование: $x \sim \varepsilon^{1/2} x, y \sim \varepsilon^{1/2} y, T \sim \varepsilon \frac{1 + \text{Pr}}{\text{Pr}} t$. Физический смысл новых переменных такой: $a(x, y, t)$ характеризует амплитуду кон-

³ Функции $a(\dots)$ и $b(\dots)$, описывающие возникновение структур в x, y -пространстве, называют также параметрами порядка [18].

вективных валов, располагающихся параллельно оси y с пространственным периодом $2\pi/q_0$, а $b(x, y, t)$ определяет поправку к x -компоненте скорости, связанную с искривлением валов. Компонента скорости $b(x, y, t)$ порождает вертикальную завихренность Ω , что и описывается уравнением (8). Поля скорости и температуры выражаются через a , b и структурные функции линейной краевой задачи, например,

$$u_x = i\sqrt{2} \cos(\pi z) \exp(iq_0 x) \left(1 + \frac{1}{q_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{i}{q_0} \frac{\partial}{\partial x} \right) a(x, y, t) + \text{к. с.} + b(x, y, t) + O(\varepsilon^{5/4}). \quad (9)$$

Как видно из (8), генерация завихренности существенна лишь при малых числах Прандтля и исчезает как $1/\text{Pr}$ при $\text{Pr} \rightarrow \infty$. При больших Pr вместо (7), (8) получаем одно уравнение, которое запишем в форме

$$\partial a / \partial t = a(1 - \delta |a|^2) + \kappa \hat{L}a, \quad (10)$$

где δ и κ в общем случае комплексны, \hat{L} — линейный оператор, определяющий диффузию.

Уравнение (10) — это уравнение Гинзбурга—Ландау, которое является одним из основных уравнений теории нелинейных неравновесных сред. Именно с помощью подобного уравнения, дополненного слагаемым с квадратичной нелинейностью⁴:

$$\partial a / \partial t = ha(1 - \delta |a|^2) - (q_0^2 + \nabla^2)^2 a + \rho a^2, \quad (11)$$

удается описать регулярную решетку из стационарных автоструктур в виде шестигранных ячеек [18]. По-видимому, в рамках (11), но с зависящими от пространственных координат коэффициентами h и ρ можно получить и решение в виде уединенной автоструктуры, подобное представленному на рис. 3.

Уравнением, аналогичным (10), описывается и капиллярная рябь на поверхности параметрически возбуждаемой жидкости (рис. 10). Из исходных уравнений движения поверхности, записанных в нормальных переменных, после усреднения для комплексных амплитуд двух взаимно ортогональных пар волн можно получить два связанных уравнения типа (10). В случае, когда возбуждена лишь одна пара волн, соответствующее уравнение имеет вид [19]

$$\begin{aligned} \partial a / \partial t &= h(ia^* - va) + i\beta a |a|^2 + i\kappa \partial^2 a / \partial y^2, \\ v &= v' + iv'', \quad \kappa = v_0 / 2k_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь учтено, что при $t \rightarrow \infty$ амплитуды волн в паре, параметрически связанной с накачкой, выравниваются, а их фазы син-

⁴ Применительно к термоконвекции в слое появление такого слагаемого в (11) связано с зависимостью вязкости (в случае термогравитационной конвекции) или поверхностного натяжения (в случае термокапиллярной конвекции) от температуры.

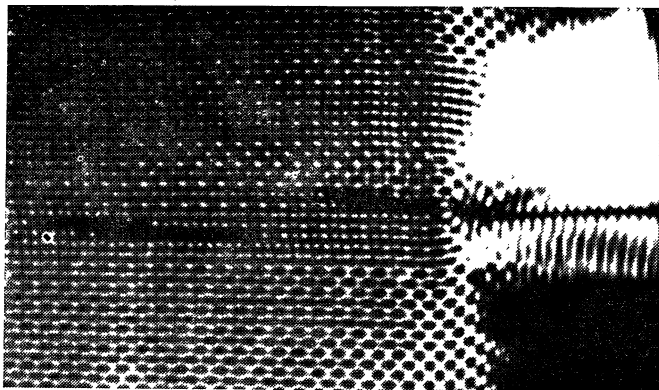


Рис. 10. Эксперимент, доказывающий, что модуляция на фоне ряби связана с поперечной модуляцией капиллярных волн [19]

хронизуются (уравнение записано для пары встречных волн $\exp(\pm ik_0x)$).

С ростом интенсивности возмущений уравнения типа (11) или (12) уже неприменимы для описания динамики неравновесной среды — ее элементарные возбуждения не совпадают с решениями порождающей линейной задачи. Однако если сильнонелинейная среда по-прежнему близка к консервативной, то для описания ансамбля автоструктур также можно воспользоваться процедурой усреднения, выделив в явном виде взаимодействующие друг с другом элементарные структуры.

Продемонстрируем это на примере слабонеравновесной среды, описываемой возмущенным уравнением синус-Гордона [20]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sin \varphi = \varepsilon \left[\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \gamma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^3 + A_0 \sin(\omega t - kx) \right], \quad \varepsilon \ll 1. \quad (13)$$

Здесь возмущение $\alpha \varphi_t$ ответственно за неравновесность среды; $\gamma \varphi_t^3$ — за нелинейное затухание; медленная ($v_\Phi = \omega/k \ll c_0$) низкочастотная волна амплитуды A_0 считается заданной. При $\varepsilon \ll 1$ существует решение (13) в виде цепочки солитонов, слабо связанных друг с другом. Получим уравнение для комплексных амплитуд колебаний этих солитонов в поле низкочастотной волны.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (13) имеет решение в виде солитона

$$\varphi^0(\xi) = 4 \arctg \left[\pm \exp \frac{\xi}{(1 - v^2)^{1/2}} \right], \quad \xi = x - vt. \quad (14)$$

В случае $\varepsilon \ll 1$ будем искать решение (13) в виде суммы вынужденного решения

$$\varphi_B \approx A_0 (1 + k^2 - \omega^2)^{-1} \sin(\omega t - kx)$$

и возмущенного солитонного решения, для которого из (13) следует ($c_0^2 = 1$)

$$\frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial x^2} + \sin \varphi_c = \varepsilon \left[\alpha \frac{\partial \varphi_c}{\partial t} - \gamma \left(\frac{\partial \varphi_c}{\partial t} \right)^3 + (1 - \cos \varphi_c) \varphi_B \right]. \quad (15)$$

Отыскивая решение (13) в виде ряда ($\tau \doteq t$)

$$\varphi_c(x, t) = \varphi^0(\xi, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \varphi^{(n)}(\xi, \tau, x) \quad (16)$$

и применяя асимптотический метод [21], для возмущения скорости v солитона в присутствии нерезонансной низкочастотной волны получим

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{(1-v^2)^{1/2}} = \frac{\alpha v}{(1-v^2)^{1/2}} - \frac{8}{3} \gamma \frac{v^3}{(1-v^2)^{3/2}} + A \sin(\omega t - kx), \quad (17)$$

$$A = \frac{\pi}{4} \frac{A_0}{1+k^2-\omega^2}.$$

Отсюда для относительной координаты $y = x - v_\Phi t$ центра масс солитона при $v^2, v_\Phi^2 \ll 1$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} = & \left[\alpha - 3 \left(\frac{8}{3} + \alpha \right) v_\Phi^2 \right] \frac{dy}{dt} - \left(\frac{8}{3} \gamma + \alpha \right) \left(\frac{dy}{dt} \right)^3 - \\ & - A \sin ky + \frac{3}{2} A \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \sin ky + 3 A v_\Phi \frac{dy}{dt} \sin ky - \\ & - \left(\frac{8}{3} \gamma + \alpha \right) v_\Phi^2 - 3 \left(\frac{8}{3} \gamma + \alpha \right) v_\Phi \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \alpha v_\Phi. \end{aligned} \quad (18)$$

Согласно (18) солитоны в поле волны совершают колебания вблизи состояний равновесия $A \sin ky_0 \approx \alpha v_\Phi + O(v_\Phi^2)$. При не слишком большой амплитуде они описываются уравнением для $S = y - y_0$ вида

$$\begin{aligned} \frac{d^2 S}{dt^2} - \left[\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 \right] \frac{dS}{dt} + \frac{3}{2} k A S \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 - \\ - \frac{A k^3}{6} S^3 + A k S \approx 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\tilde{\alpha} = \left(\frac{8}{3} \gamma + \alpha \right) v_\Phi^2 - \alpha, \quad \tilde{\beta} = \frac{8}{3} \gamma + \alpha > 0.$$

В случае слабой неравновесности $\alpha < \alpha_{кр} = 8\gamma(3/v_\Phi^2 - 3)^{-1}$ эти колебания затухают и реализуется стационарная структура — солитон. Если же степень неравновесности больше некоторой, т. е. $\alpha > \alpha_{кр}$, состояние равновесия $S = 0$ становится неустойчивым и солитон превращается в осциллирующий — он совершает незатухающие автоколебания в «яме» (при $\alpha = \alpha_{кр}$ из состояния равновесия в системе (19) рождается устойчивый предельный цикл). Рассматривая далее взаимодействие ближайших солитонов, отстоящих один от другого на расстояние $y_{j+1} - y_j \sim L = (2\pi/k) l$ ($l = 1, 2, \dots$), и имея в виду, что $|S_{j+1} - S_j| = |(y_{j+1} - y_j) - L| \ll L$ и $|S_j| \ll 1$, получим для координаты j -го солитона

дифференциально-разностное уравнение, которое после усреднения по времени примет вид

$$da_j/dt = a_j - (1 + i\beta) |a_j|^2 a_j + e(1 - ic)(a_{j+1} + a_{j-1} - 2a_j), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

где

$$\left\| \begin{matrix} \dot{S}_j \\ S_j \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} i\omega \\ 1 \end{matrix} \right\| a_j(t) e^{i\Omega t} + \text{к. с.}; \quad \Omega^2 = Ak;$$

$$\beta = k(3A + k) \left[4(Ak)^{1/2} \left(4\gamma + \frac{3}{2}\alpha \right) \right]^{-1};$$

$$ce = 2 \exp \left(-\frac{2\pi}{k} l \right) \left\{ (Ak)^{1/2} \left[\left(\left(\frac{8\gamma}{3} + \alpha \right) \frac{3}{k} \right)^2 - \alpha \right] \right\}^{-1};$$

$$t = 2t_{\text{сгар}} \left[\alpha - \left(\frac{8\gamma}{3} + \alpha \right)^2 \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 \right]^{-1}.$$

Уравнение (20) — дискретный аналог уравнения Гинзбурга—Ландау. Оно, в частности, описывает одномерный ансамбль динамических автоструктур (вихрей Тейлора) в течении Куэтта [22] и встречается в других ситуациях, где приходится иметь дело с автоструктурами, динамика которых описывается уравнением простейших автоколебаний (δ -комплексно):

$$da/dt = a(1 - \delta |a|^2). \quad (21)$$

Наряду с уравнением (20) мы будем также подробно исследовать аналогичное ему уравнение, описывающее динамику двумерных однородных ансамблей:

$$da_{jk}/dt = a_{jk} - \delta |a_{jk}|^2 a_{jk} - \kappa \hat{L} a_{jk}, \quad (22)$$

где \hat{L} — разность второго порядка, и уравнение

$$da_j/dt = a_j(1 - \delta |a_j|^2) + \gamma(a_j - a_{j-1}) + \kappa(a_{j+1} - 2a_j + a_{j-1}), \quad (23)$$

описывающее коллективные возбуждения в ансамблях невязанно связанных автоструктур.

2. Коллективная динамика однородных ансамблей

Характеристики хаоса. Будем рассматривать ансамбли с произвольно большим, но конечным числом элементов. При повышении надкритичности пространственно однородное состояние в таких ансамблях становится неустойчивым и на его фоне возникают коллективные движения. Вблизи границы потери устойчивости однородным состоянием это обычно волны модуляции (см. рис. 10). По мере увеличения степени неравновесности системы число таких коллективных возбуждений возрастает и в ансамбле структур возникает качественно новое состояние. При этом могут быть два варианта: либо в результате пространственно-временной синхронизации коллективных возбуждений появляются автоструктуры

более высокого уровня — инфраструктуры, либо в результате разрушения периодического или квазипериодического движения структур возникает хаос, образом которого в фазовом пространстве ансамбля является притягивающее стохастическое множество из седловых траекторий — странный аттрактор.

Для оценки степени развития хаоса в ансамблях структур будем использовать следующие характеристики стохастических множеств: нормированную энтропию Колмогорова—Синяя

$$H_\lambda = \sum_{j=1}^m \lambda_j / \lambda_1, \quad (24)$$

где λ_j — ляпуновские характеристические показатели, расположенные в порядке убывания ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0 \geq \dots \geq \lambda_{2N}$) [23], и размерность аттрактора ⁵

$$D_\lambda = M + d, \quad (25)$$

где M находится из условий

$$\sum_{j=1}^M \lambda_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{M+1} \lambda_j \leq 0, \quad d = \sum_{j=1}^M \lambda_j |\lambda_{M+1}|^{-1}. \quad (26)$$

Подчеркнем, что энтропия H_λ зависит лишь от числа неустойчивых направлений на аттракторе и относительной скорости разбегания по этим направлениям близких траекторий. Величина H_λ , очевидно, всегда будет меньше размерности D_λ стохастического множества, которая одновременно характеризует и число эффективных (нормальных) переменных, необходимых для описания установившегося хаотического движения.

Развитие хаоса в однородных ограниченных ансамблях. Предполагая, что в некоторой области параметров в ансамбле (20) или (22) реализуется устойчивый стохастический режим (если хаос переходный, то время его жизни достаточно велико), определим зависимость характеристик хаоса от параметров ансамбля — числа элементов N и величины связи e между автоструктурами. При этом будем иметь в виду, что с ростом надкритичности автономность структур возрастает и, следовательно, величина связи между ними уменьшается. Граничные условия при анализе коллективных движений в ансамблях вида (20) или (22) будем считать периодическими:

$$a_j(t) \equiv a_{j+N}(t) \quad (27)$$

или соответственно ($JK = N$)

$$a_{j,k}(t) \equiv a_{j+J,k}(t), \quad a_{j,k}(t) \equiv a_{j,k+K}(t). \quad (28)$$

Можно показать [24], что для оценки энтропии и размерности стохастического множества в интересующем нас случае достаточ-

⁵ Размерность D_λ является оценкой сверху хаусдорфовой (или фрактальной) размерности странного аттрактора [23].

но вычислить средние от собственных значений $\sigma_j(t)$ вспомогательной матрицы $\bar{B}(t) = [B(t) + B^+(t)]/2$, где $B(t)$ — матрица исходной системы (20) или (22), записанной в действительной форме и линеаризованной вблизи типичного решения, принадлежащего стохастическому множеству; соответственно $B^+(t)$ — эрмитово-сопряженная матрица. Сумма первых характеристических показателей h_l , необходимая для вычисления энтропии и размерности стохастического множества, связана с $\sigma_j(t)$ следующим образом:

$$h_l \equiv \sum_{i=1}^l \lambda_i \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{j=1}^l \sigma_j(\tau) d\tau, \quad (29)$$

где $\sigma_1(t) \geq \sigma_2(t) \geq \dots \geq \sigma_l(t)$.

Воспользуемся соотношением (29) для оценки размерности стохастического множества в фазовом пространстве системы (20), (27). Имея в виду трансляционную симметрию цепочки, ограничимся рассмотрением пространственно однородных в среднем стохастических режимов:

$$\langle |a_j^0|^2 \rangle_t = |a^0|^2, \quad \langle (a_j^0)^2 \rangle_t = (a^0)^2. \quad (30)$$

Кроме того, предположим, что средние пульсации интенсивности невелики ⁶:

$$|a_j^0|^2 - |a^0|^2 = z_j, \quad (\langle z_j^2 \rangle)^{1/2} \ll |a^0|^2. \quad (31)$$

Численные эксперименты оправдывают эти предположения [24].

При сделанных предположениях система $\dot{\zeta} = \bar{B}\zeta$, где

$$\begin{aligned} \zeta &= (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N); \\ x_j &= \text{Re}(a_j - a_j^0); \quad y_j = \text{Im}(a_j - a_j^0), \end{aligned} \quad (32)$$

запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= (1 - 2|a^0|^2)x_j + e(x_{j+1} + x_{j-1} - 2x_j) - \alpha_1 x_j - \alpha_2 y_j - \\ &\quad - 2z_j x_j - \bar{z}_j x_j - \bar{z}_j y_j, \\ \dot{y}_j &= (1 - 2|a^0|^2)y_j + e(y_{j+1} + y_{j-1} - 2y_j) - \alpha_2 x_j + \alpha_1 y_j - \\ &\quad - 2z_j y_j - \bar{z}_j x_j + \bar{z}_j y_j, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \text{Re}(1 + i\beta)(a^0)^2; \quad \alpha_2 = \text{Im}(1 + i\beta)(a^0)^2; \\ \bar{z}_j &= \text{Re}(1 + i\beta)[a_j^2 - (a^0)^2], \quad \bar{\bar{z}}_j = \text{Im}(1 + i\beta)[a_j^2 - (a^0)^2]. \end{aligned}$$

В первом приближении можно пренебречь пульсационными слагаемыми $z_j, \bar{z}_j, \bar{\bar{z}}_j$, тогда легко находятся все собственные значения интересующей нас матрицы $\bar{B}(t)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= 1 - 4e \sin^2(\theta_n/2) + [(1 + \beta^2)^{1/2} - 2]|a^0|^2, \\ \sigma_{N+n+1} &= 1 - 4e \sin^2(\theta_n/2) - [(1 + \beta^2)^{1/2} + 2]|a^0|^2, \end{aligned} \quad (34)$$

⁶ Это предположение заведомо справедливо для так называемого фазового хаоса, который, в частности, наблюдался в [25].

где $\theta_n = \pm 2\pi n/N$ ($n = 0, 1, \dots, N/2$). Здесь имеется $2N$ собственных значений, причем все они вырождены, кроме тех, которым отвечают $\theta_n = 0, \pi$. (Учет малых возмущений матрицы \bar{B} , пропорциональных z, \bar{z}, \bar{z} , снимает вырождение и приводит к расщеплению собственных значений. В первом приближении ввиду симметрии расщепления результат для суммы показателей не меняется.)

В соответствии с определениями (24) и (25) для оценки энтропии H_λ и размерности D_λ стохастического множества необходимо соответственно найти сумму всех положительных σ_j и число первых σ_j , сумма которых является ближайшей к нулю слева. Для того чтобы результат оценки в минимальной степени зависел от выбора траектории, проведем расчет при $\beta^2 = 3$. При этом, как видно из (34), первые (N) собственные значения $\sigma_j = \sigma_{n+1}$ вообще не зависят от $a^0(t)$, ошибка же от вклада σ_{N+n+1} в оценку H_λ и D_λ мало меняется при изменении β .

В рассматриваемом случае $\sigma_1 = 1$, поэтому оценкой сверху для H_λ будет просто сумма положительных σ_j :

$$H_\lambda \leq \sum_{j=1}^m \sigma_j = H_m \quad (35)$$

(очевидно, $m \leq N$). Имея в виду, что

$$\sum_{n=1}^k \sin^2 \frac{\theta_n}{2} = \frac{(2k+1)}{4} - \frac{\sin [(2k+1)\theta_0/2]}{4 \sin (\theta_0/2)}, \quad \theta_0 = \frac{2\pi}{N}, \quad (36)$$

из (34), (35) получим

$$H_m = m(1 - 2e) + 2e \frac{\sin (m\pi/N)}{\sin (\pi/N)}, \quad (37)$$

где m определяется из условия $\sigma_{m+1} \geq 0, \sigma_{m+2} < 0$. Таким образом, $H_m(e)$ — кусочно-линейная функция, терпящая разрыв производной в точках $e_n = [4\sin^2(\theta_n/2)]^{-1}$.

Зависимость $H_m(e)$ при произвольном N представлена на рис. 11, а [24]. Видно, что энтропия довольно быстро возрастает с уменьшением e , т. е. с увеличением автономности структур.

Для оценки размерности D_λ при сильной связи ($e > 1/2$), как и для оценки H_λ , нужно знать лишь значения σ_{n+1} ; если же $e < 1/2$, то необходимо учитывать и σ_{N+n+1} (см. (34)). Дело в том, что при $e = 1/2$ и $m = N$ (см. (37)) сумма $H_m(e) = 0$, т. е. при данном значении параметра связи $D_\lambda \leq N$. При $e < 1/2$ соответственно $D_\lambda > N$, а при $e > 1/2$ имеем $D_\lambda < N$. Для сильной связи ($e > 1/2$) оценка сверху на D_λ получается непосредственно из уравнения

$$H_{D_\lambda}(e) = D_\lambda(1 - 2e) + 2e \frac{\sin (D_\lambda\pi/N)}{\sin (\pi/N)} = 0. \quad (38)$$

В случае слабой связи ($e < 1/2$) к сумме N собственных значений σ_{n+1} , которая согласно (37) ($m = N$) равна $H_N(e) = N(1 -$

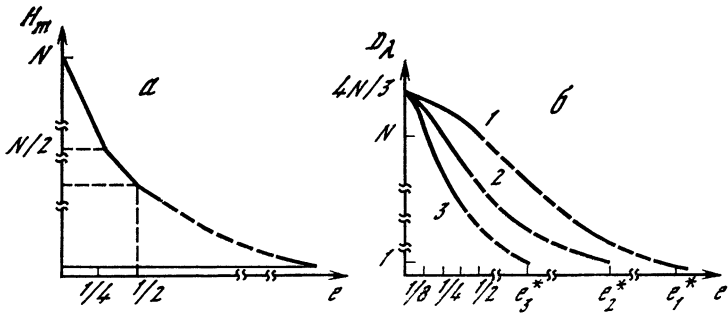


Рис. 11. Зависимость параметров H_m и D_λ стохастического множества в ансамбле из N автоструктур от величины связи e в одномерной цепочке

Кривая 1 для одномерной «решетки» ($e_1^* = N^2/4\pi^2$), 2 — для квадратной ($e_2^* = e_1^*/2N$), 3 — для кубической ($e_3^* = e_1^*/3N^{4/3}$)

— $2e$), следует добавить еще r значений σ_{N+1+m} , сумма которых $\sum_{j=0}^r \sigma_{j+1+N}$ также записывается в виде (36). Имея в виду, что почти все σ удовлетворяют неравенству $|\sigma_{N+m+1}| \geq \sigma_{n+1}$, при больших N можно считать $r \ll N$. Тогда, разлагая синус в (36) в ряд при малых аргументах, получим

$$\sum_{n=0}^r \sigma_{N+1+n} \approx r(1 - 4|a^0|^2)$$

и из условия

$$\sum_{n=0}^N \sigma_{n+1} + \sum_{n=0}^r \sigma_{N+n+1} = N(1 - 2e) + r(1 - 4|a^0|^2) = 0$$

окончательно находим ($|a^0|^2 \approx 1$)

$$D_\lambda \leq N + r = N \left(1 + \frac{1 - 2e}{4|a^0|^2 - 1} \right) \approx N \left(1 + \frac{1 - 2e}{3} \right). \quad (39)$$

Зависимость D_λ от величины связи между структурами, построенная по формулам (38) (для $e > 1/2$) и (39) ($e < 1/2$), представлена на рис. 11, б.

Для двумерных решеток, динамика которых согласно (22) описывается уравнением

$$\begin{aligned} da_{jk}/dt = & a_{jk} - (1 + i\beta) |a_{jk}|^2 a_{jk} + \\ & + e(1 - ic)(a_{j+1, k} + a_{j-1, k} + a_{j, l+1} + a_{j, k-1} - 4a_{jk}) \end{aligned} \quad (40)$$

с граничными условиями (28), оценки энтропии и размерности стохастического множества строятся аналогично. Вместо собственных значений (34) одномерной цепочки в данном случае будем

иметь

$$\sigma_{(n+1)(l+1)} = 1 - 4e + 2e (\cos \theta_n + \cos \theta_l) + \\ + [(1 + \beta^2)^{1/2} - 2] |a^0|^2, \quad (41)$$

$$\sigma_{(K+n+1)(J+l+1)} = 1 - 4e + 2e (\cos \theta_n + \cos \theta_l) - \\ - [(1 + \beta^2)^{1/2} + 2] |a^0|^2,$$

где $\theta_n = \pm 2\pi n/K$ ($n = 0, 1, \dots, K/2$); $\theta_l = \pm 2\pi l/J$ ($l = 0, 1, \dots, J/2$). Повторяя проведенные выше рассуждения и выкладки, например, при $e < 1/4$, найдем [24]

$$D_\lambda = JK (1 + (1 - 4e)) \{[(1 + \beta^2)^{1/2} + 2] |a^0|^2 - 1\}^{-1}.$$

Естественно сравнить размерности стохастических множеств в одномерном и двумерном ансамблях структур с одинаковыми параметрами и одинаковым числом элементов. Соответствующие результаты для квадратной решетки ($J = K = N^{1/2}$) представлены на рис. 11. Видно, что размерность хаоса в двумерном ансамбле при данной величине связи между структурами всегда меньше, чем в одномерном с тем же числом элементов. Объясняется это просто. Дело в том, что степень автономности структур (с уменьшением которой растет размерность хаоса) определяется не только величиной связи между соседями, но и их числом: с ростом числа связей автономность элементарной структуры эффективно снижается и, следовательно, упорядоченность коллективных движений возрастает. Это и соответствует меньшему значению размерности.

Связь размерности хаоса с числом коллективных возбуждений. С ростом автономности структур число коллективных возбуждений, которые могут существовать в ансамблях вида (20) (или (22)), как мы сейчас убедимся, непрерывно возрастает. Поэтому кажется естественным, что обсуждавшееся в предыдущем разделе увеличение размерности коллективного хаоса по мере уменьшения e должно быть связано с появлением новых независимых движений в ансамбле. При этом они, очевидно, должны быть неустойчивыми.

Продемонстрируем правильность этого предположения на примере системы (20), (27), в которой коллективные возбуждения имеют вид стационарных бегущих волн

$$a_j(t) = A_n \exp [i(\omega_n t + j\theta_n)]. \quad (42)$$

Подстановка (42) в (20) дает зависимость интенсивности этих волн от постоянной распространения

$$|A_n|^2 = 1 - 4e \sin^2(\theta_n/2), \quad (43)$$

и закон дисперсии этих волн

$$\omega_n = -\beta + 4e(\beta + c) \sin^2(\theta_n/2), \quad (44)$$

где $\theta_n = \pm 2\pi n/N$, $n = 0, 1, \dots, N/2$. Непосредственно за порогом возникновения структур, т. е. при не слишком большой над-

критичности, связь между ячейками достаточно сильная. При этом ансамбль структур демонстрирует лишь тривиальное регулярное поведение.

Покажем это, рассматривая $e \sim e^* = 1/4 \sin^2(\pi/N)$. (Заметим, что в случае $e > e^*$, как видно из (43), в системе не существует никаких решений вида (42), кроме пространственно однородного: $n = 0$.) Устойчивость пространственно однородного режима определяется показателями [24]

$$\lambda_l = -1 - 4e \sin^2 \frac{\theta_l}{2} \pm \left[1 - \left(4ec \sin^2 \frac{\theta_l}{2} \right)^2 + 8\beta ce \sin^2 \frac{\theta_l}{2} \right]^{1/2}, \quad (45)$$

откуда следует, что при

$$e > e_0 = (\beta c - 1) [2(1 + c^2) \sin^2(\pi/N)]^{-1} \quad (46)$$

все $\lambda_l \leq 0$ и режим пространственно однородных колебаний в ансамбле из N ячеек устойчив. Заметим, что при $N \rightarrow \infty$ из (46) следует известное условие устойчивости для континуальной модели: $\beta c \leq 1$.

При $\beta c > 1$ по мере уменьшения e (от значения e_0) из тривиального состояния равновесия $a_j = 0$ в системе последовательно (при $e = e_n$) рождаются новые коллективные движения (42) соответственно с $n = 1, 2, \dots, N/2$. В фазовом пространстве системы (20) этому соответствует мягкое рождение при e_n из состояния равновесия пар предельных циклов (ответчающих прямой и встречной волнам), причем все рождающиеся таким образом периодические движения неустойчивы. Убедиться в этом можно, рассмотрев характеристические показатели тривиального равновесия $a_j = 0$:

$$\lambda_l = 1 - 4e \sin^2 \frac{\theta_l}{2} + 4ice \sin^2 \frac{\theta_l}{2}. \quad (47)$$

Сравнивая (47) с (43), нетрудно заметить, что число неустойчивых направлений, т. е. число положительных $\text{Re } \lambda_l$ при данном e^0 совпадает с числом родившихся при уменьшении e от e_0 до e^0 стационарных волн, а инкременты возмущений по неустойчивым направлениям определяются интенсивностями этих волн: $\text{Re } \lambda_l = |A_l|^2$. Поскольку периодические движения появляются из тривиального равновесия мягким образом, они (в момент рождения нового неустойчивого направления) наследуют показатели состояния равновесия по оставшимся независимым направлениям. Поэтому в момент рождения периодического движения с $l = 1$ характеризуется одним неустойчивым направлением (оно соответствует росту пространственно однородных возмущений), движения с $l = 2$ — тремя и т. д. Если теперь предположить, что вновь рождающиеся неустойчивые движения принадлежат странному аттрактору, то легко интерпретировать результат о монотонном нарастании размерности хаоса с ростом автономности структур — по мере уменьшения e в аттракторе появляются траектории, число неустойчивых направлений у которых имеет порядок номера родившегося цикла (периодического движения с $\theta = \theta_l$).

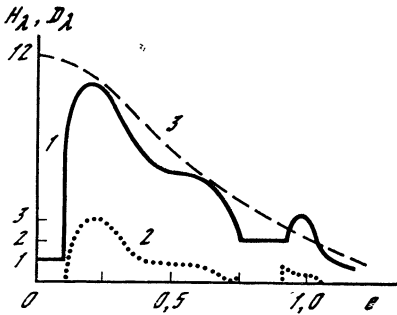


Рис. 12. Зависимости D_λ (1) и H_λ (2) от ϵ в численном эксперименте [25] для одномерной цепочки с $N = 9$ ($\beta = c = 1,71$)
3 — аналитическая оценка D_λ [24]

Таким образом, число неустойчивых периодических решений вида (42), существующих при данном ϵ , — это оценка снизу на размерность аттрактора.

Сравнение теории с численным экспериментом. Воспользуемся здесь результатами работы [25], в которой исследовалась система (20) с периодическими граничными условиями и с $N = 9, 10, 50$. Было, в частности, обнаружено, что режим пространственно однородных колебаний, реализующийся при сильной связи, при уменьшении ϵ сменяется режимом биений (ему в фазовом пространстве соответствует двумерный тор). При $\epsilon = \epsilon^0$ (для $N = 9$ и $\beta = c = 1,71$ значение $\epsilon^0 = 1,033$) квазипериодический режим с двумя несоизмеримыми частотами разрушается и в цепочке устанавливается режим, характеризуемый положительной энтропией, которому и соответствует странный аттрактор.

Зависимости энтропии и размерности от параметра ϵ , полученные в численном эксперименте [25], представлены на рис. 12. Как видно, по мере уменьшения связи ϵ в областях стохастичности и энтропия, и размерность монотонно возрастают — движение на аттракторе по мере роста автономности структур становится все более неустойчивым, а хаос — все более развитым. Обратим внимание на интервалы $0,75 \leq \epsilon \leq 0,9$ и $0 \leq \epsilon \leq 0,12$, в которых $H_\lambda = 0$ и $D_\lambda = 1$ (периодическое движение) либо $D_\lambda = 2$ (квазипериодическое движение с двумя несоизмеримыми частотами). В этих областях при $t \rightarrow \infty$ устанавливается режим регулярных пульсаций.

На рис. 12 (кривая 3) показана зависимость размерности от величины связи ϵ (для одномерной цепочки (20)), рассчитанная по формулам (38) и (39) при тех же значениях параметров, что и в численном эксперименте. Видно, что в данном случае мы имеем весьма хорошее совпадение, если не учитывать сравнительно узкие области ϵ ($\epsilon \in (0-0,125), (0,75-0,9)$), где в результате синхронизации отдельных мод наблюдается лишь переходный хаос.

В двумерной системе размерность хаоса при заданных параметрах (числе элементов N и величине связи ϵ) существенно зависит от геометрии — соотношения количества элементов вдоль и поперек решетки. Наименьшей размерность оказывается для квадратной решетки, что и естественно, поскольку ее спектр стационарных волн наиболее разрежен.

3. Пространственное развитие хаоса в ансамблях невязанно связанных структур

Новые постановки задач. Полубезграничные среды с потоками, примеры которых мы обсуждали в разд. 1, при достаточно высокой степени неравновесности системы (скорости потока) также демонстрируют хаотическое поведение. Однако хаос в таких системах пространственно неоднороден и может развиваться из граничного регулярного возмущения путем конечного (или бесконечного) числа пространственных бифуркаций, разворачивающихся не при изменении параметра, а в пространстве — вдоль потока. Более детально картина зарождения и пространственного развития хаоса вдоль системы представляется следующей.

По-прежнему в качестве признака наличия стохастичности будем использовать положительность ляпуновского показателя движения, или отличие от нуля энтропии Колмогорова—Синая. Для движения, реализующегося в полубезграничной среде с потоком, число ляпуновских показателей даже на конечном расстоянии от границы в общем случае бесконечно. Это соответствует сплошному спектру возбуждений такой системы. Однако на начальном участке среды — близко к границе, где движение еще регулярно (например, периодическое), все показатели, за исключением конечного числа нулевых, отрицательны.

Напомним, что речь идет о потоковых системах, в которых внешние случайные источники отсутствуют. Число нулевых показателей при этом отвечает числу несоизмеримых частот в спектре возбуждения. В процессе усложнения движения — развития пространственных бифуркаций — один или несколько показателей могут стать положительными. Точка вдоль по потоку, где это произойдет, и будет координатой возникновения хаотического движения. Дальнейшему пространственному развитию хаоса отвечает рост вдоль системы уже имеющихся положительных показателей и переход через нуль новых. При этом от точки к точке должна расти и размерность странного аттрактора, соответствующего наблюдаемым в этих точках реализациям.

При учете того, что по мере развития пространственных неустойчивостей среда с потоком обычно структурируется (см. рис. 8 и 9), представленная картина должна измениться.

Феноменологически среду с потоком, в которой структуры уже сформировались, будем описывать уравнением [26]

$$\begin{aligned} \kappa u_j/dt &= F(u_j, \delta) + \gamma(u_j - u_{j-1}) + \kappa(u_{j+1} - 2u_j + u_{j+1}), \\ j &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь $du_j/dt = F(u_j, \delta)$ описывает динамику элементарной структуры, а γ и κ характеризуют линейную связь между ними — γ ответственно за невязанную связь, определяемую наличием потока, κ имеет смысл коэффициента диффузии.

Обобщенное уравнение Гинзбурга—Ландау (23), очевидно, является частным случаем (48). Пространственное развитие хаоса

са вдоль ансамбля вида (48) должно проходить уже не так, как в «гладкой» однородной среде. Если сравнивать перестройки движения вдоль пространственной координаты с бифуркациями в динамической системе при изменении параметра, то в данном случае бифуркации вдоль потока должны выглядеть так, как если бы параметр сосредоточенной системы изменялся не непрерывно, а ступенчатым образом. В связи с такими особенностями исследуемых систем возникают и совершенно новые вопросы, например: подобны ли сценарии перехода к хаосу, реализующиеся вдоль цепочки в пространстве, тем, которые реализуются в сосредоточенных системах при изменении параметра; каково число таких бифуркаций; каким образом происходит дальнейшее развитие хаоса «вниз по потоку» и т. д.

Начнем с простейших моделей — одномерных ансамблей не-взаимно связанных структур.

Пространственные бифуркации удвоения периода. Пренебрежем диффузией, т. е. в (48) будем считать $\kappa = 0$. Тогда для стационарного пространственно неоднородного вдоль j режима из (48) будем иметь

$$u_{j-1}^0 = u_j^0 + (1/\gamma) F(u_j^0, \delta). \quad (49)$$

Если при выбранных значениях параметров γ и δ этот режим устойчив при любых j , то перестройки вдоль потока отсутствуют. В общем же случае решение u_j^0 устойчиво лишь до некоторого j^* . Динамика развития возмущений $\xi_j(t)$ на фоне u_j^0 описывается системой

$$d\xi_j/dt = F'_u(u_j^0, \delta) \xi_j - \gamma \xi_{j-1}(t), \quad F'_u = F'_u + \gamma. \quad (50)$$

Матрица этой системы блочно-треугольная, поэтому характеристические показатели (50) совпадают с показателями системы парциальных элементов:

$$d\xi_j/dt = F'_u(u_j^0, \delta) \xi_j. \quad (51)$$

Это совпадение физически очевидно: конвективные слагаемые $\sim \xi_{j-1}(t)$ играют в парциальных уравнениях роль внешней силы и, естественно, не могут сказаться на экспоненциальном росте возмущений. Замеченное обстоятельство весьма важно. Из него следует, что при малом γ в цепочке элементов характер изменения решения во времени при переходе через точку j^* (т. е. способ потери устойчивости исходным движением) может быть таким же, как и при потере устойчивости при изменении параметра в соответствующей точечной системе (параметром в данном случае является изменяющееся вдоль цепочки значение u_j^0). Таким образом, при переходе через точку j^* возникает перестройка движения, вид которой можно предсказать, зная возможные бифуркации в точечной системе.

Возникающее при $j > j^*$ новое установившееся движение (это могут быть, например, модулированные колебания) также можно

описывать с помощью системы (49), но уже для других переменных (амплитуды модуляции). Повторяя затем анализ, можно определить координату следующей пространственной бифуркации и т. д. Ввиду дискретности пространственной координаты число пространственных бифуркаций, предшествующих возникновению хаоса, как правило, должно быть конечным.

Докажем это на примере цепочки, состоящей из элементов, динамика которых описывается одномерным отображением типа параболы⁷

$$X_j(n+1) = 2\delta X_j(n) + 2X_j^2(n) + \gamma X_{j-1}(n+1), \quad (52)$$

$$X_0(n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где n — дискретное время, а $\delta > 0$ характеризует степень неравновесности системы. Пусть $\delta \in [0,5; 1,5]$, тогда в первом элементе реализуется режим регулярных колебаний периода T (ему при $\gamma = 0$ отвечает устойчивая неподвижная точка отображения (52)). Аналогом уравнения (49) в данном случае будет

$$X_j^0 = 2\delta X_j^0 + 2(X_j^0)^2 + \gamma X_{j-1}^0. \quad (53)$$

При достаточно слабой связи γ и $\delta \lesssim 1,5$ режим одночастотных колебаний при некотором j^* становится неустойчивым [27] и вдоль цепочки должен установиться режим удвоенного периода, затем и он теряет устойчивость, и т. д. Для определения числа пространственных бифуркаций удвоения периода воспользуемся схемой приближенной ренормализации [28].

Режимы стационарных колебаний (периода $2^m T$), устанавливающиеся между точками пространственных бифуркаций в случае слабой связи γ , будут близкими к однородным. Имея это в виду, рассмотрим в рамках (52) поведение возмущений $\zeta_j(n)$ на фоне пространственно однородного ($X_j(n) = X_{j-1}(n)$) режима удвоенного периода $X_j(n+2) = X_j(n)$, который описывается уравнениями

$$X(n+1) = 2\delta X(n) + 2X^2(n) + \gamma X(n+1),$$

$$X(n) = 2\delta X(n-1) + 2X^2(n-1) + \gamma X(n). \quad (54)$$

Интересующие нас отклонения описываются уравнениями

$$\zeta_j(n+1) = d\zeta_j(n) + 2\zeta_j^2(n) + \gamma\zeta_{j-1}(n+1),$$

$$\zeta_j(n+2) = p\zeta_j(n+1) + 2\zeta_j^2(n+1) + \gamma\zeta_{j-1}(n+2), \quad (55)$$

где $d = 2\delta + 4X(n+2)$; $p = 2\delta + 4X(n)$. С точностью до ζ^2 вместо (55) можно написать

$$\zeta_j(n+2) \approx pd\zeta_j(n) + 2(p+d^2)\zeta_j^2(n) + \gamma[\zeta_{j-1}(n+2) + p\zeta_{j-1}(n+1)]. \quad (56)$$

⁷ Отображение типа параболы описывает динамику самых различных физических систем, демонстрирующих при изменении параметра цепочку бифуркаций удвоения периода.

Сделаем теперь масштабное преобразование $y = (p + d^2) \zeta$ и рассматривая ζ_j через две единицы времени, для переменной y от уравнения (56) вновь переходим к уравнению (52), но с перенормированными константами

$$\delta_{\text{нов}} = pd/2, \quad \gamma_{\text{нов}} = \gamma [1 - 2\delta + 4X(n)] \approx 2\gamma + O(\gamma^2). \quad (57)$$

Здесь использовано решение (54):

$$X^0 \approx -\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1-\gamma}{2} + \delta \right) + \left(\frac{1-\gamma}{2} + \delta \right)^{1/2} \left[\delta - \frac{3(1-\gamma)}{2} \right]^{1/2} \right\}.$$

Таким образом, параметры δ и γ не могут после очередного удвоения изменяться сколь угодно малыми «порциями», накапливаясь к критической точке — точке возникновения хаоса. Изменение δ и γ в соответствии с (57) означает, что область сгущения, содержащая бесконечное число бифуркаций (как и сама точка перехода), будет «проскакиваться», т. е. число пространственных бифуркаций удвоения периода вдоль потока действительно будет конечным.

Приведем здесь результаты экспериментов, которые подтверждают справедливость наших теоретических представлений. Эксперименты проводились с цепочкой невзаимно связанных автоколебательных элементов (структур), описываемых уравнениями [27]

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= hu_j + v_j - u_j w_j + \gamma u_j, & \dot{v}_j &= -u_j, \\ \dot{w}_j &= g [I(u_j) u_j^2 - w_j], & I(u) &= \begin{cases} 1, & u > 0, \\ 0, & u \leq 0, \end{cases} \\ u_0(t) &\equiv 0, & j &= 1, 2, \dots, 10. \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь h характеризует неравновесность среды; g — параметр «структуры»; γ — величина связи.

Основные наблюдавшиеся эффекты отражены на диаграмме рис. 13 [27], где показано установление различных режимов вдоль цепочки ($j = 1, 2, \dots, 10$) в зависимости от h ($\gamma = 0, 1$). На диаграмме видны шесть областей, ограниченных кривыми l_k . В области 1 система не возбуждена и представляет собой цепочку связанных регенеративных контуров. Переход через границу l_0 соответствует мягкому возбуждению автоколебаний, и в области 2 система демонстрирует регулярные колебания периода T_0 . Увеличение h , соответствующее переходу через границы l_1 и l_2 , приводит к установлению колебаний удвоенного периода: $T_0 \rightarrow 2T_0$, $2T_0 \rightarrow 4T_0$ (рис. 14).

Дальнейший рост степени неравновесности — переход через границу l_3 — приводит к установлению хаотических колебаний, образом которых служит странный аттрактор с небольшой фрактальной размерностью. В спектре мощности этих хаотических колебаний присутствуют четко выраженные пики на основной частоте $f_0 = 1/T_0$, половинной частоте $1/2 f_0$ и их гармониках. Эти пики исчезают при переходе через границу l_4 , чему соответствует рождение другого аттрактора [27].

Рис. 13. Пространственное развитие хаоса вдоль цепочки структур, описываемой системой (58), при изменении параметра неравновесности h [27]

CA_1 и CA_2 — странные аттракторы разной размерности

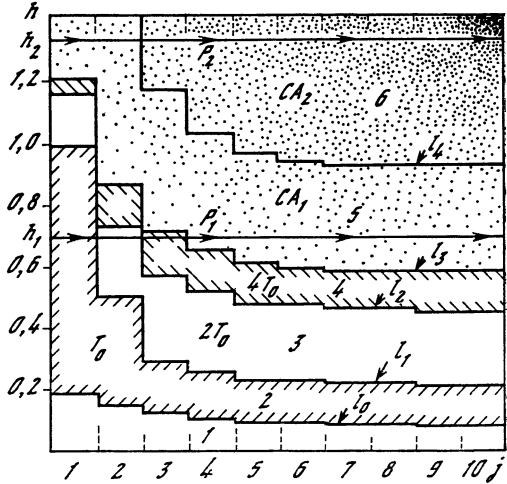
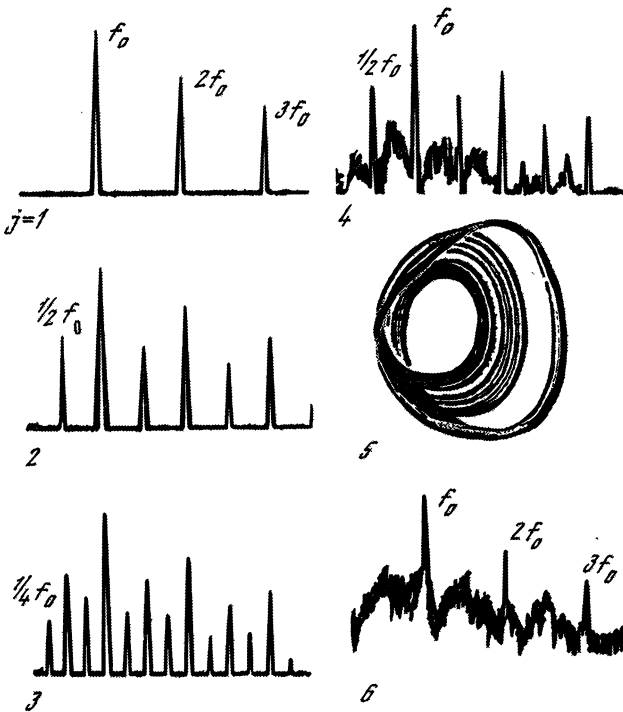


Рис. 14. Пространственные бифуркации удвоения периода в цепочке (58)

Показана зависимость спектра S_f мощности от j [27]



При фиксированных h вдоль цепочки наблюдались следующие установившиеся режимы: а) при $0,1 < h < 0,2$ — пространственная синхронизация колебаний на основной частоте f_0 ; б) при $0,3 < h < 0,45$ — пространственная синхронизация (при $j \geq 3$) колебаний с периодом $2T_0$; в) при $0,45 < h < 0,55$ ($j \geq 5$) — пространственная синхронизация с периодом $4T_0$; г) при $h \sim 0,7$ и $j \geq 3$ в цепочке устанавливался режим пространственно однородного хаоса (спектр мощности стохастических колебаний не зависит от j) — хаотическая синхронизация в пространстве. Эволюция колебаний вдоль цепочки при $h = 0,7$ видна из рис. 14, где представлены спектры мощности колебаний на ячейках $j = 1 \div 4, 6$, а также фазовый портрет странного аттрактора при $j = 5$ [27].

В случае больших h ($h \geq 1, 2$) каждый из генераторов находится в режиме стохастических колебаний. При движении вдоль цепочки наблюдается развитие хаоса — интенсивность колебаний несколько увеличивается, а спектр сглаживается (рис. 15). Уже при $j = 4$ наблюдается эффект стабилизации турбулентности — спектры мощности хаотических пульсаций не меняются вдоль цепочки, что соответствует неизменности фрактальной размерности вдоль цепочки.

Изменение величины связи между генераторами ($0,05 \leq \gamma \leq 0,3$) подтвердило грубость наблюдавшихся эффектов. Увеличение связи приводило к тем же эффектам, что и увеличение h .

Пространственный переход к хаосу через квазипериодичность. При отсутствии диффузии систему (23) представим в виде [26, 29]

$$da_j/dt = a_j(1 - i\omega_0) - (1 - i\beta) |a_j|^2 a_j - \gamma' a_{j-1}, \quad (59)$$

$$\gamma' = |\gamma| (1 - \text{Re } \gamma)^{-1}.$$

Такая запись предполагает, что колебания на первой ячейке цепочки (23) установились и равны $Ae^{i\beta t}$ (A характеризует амплитуду внешней силы на частоте β). Полагая в (59) $da_j/dt \equiv 0$, найдем распределение интенсивности колебаний вдоль цепочки, соответствующее режиму синхронизации (режиму одночастотных колебаний на частоте β):

$$I_j [1 + \omega_0^2 + (1 + \beta^2) I_j^2 - 2(1 + \beta\omega_0) I_j] = (\gamma')^2 I_{j-1}, \quad (60)$$

$$I_0 = 1/(1 - \text{Re } \gamma).$$

В случае потери устойчивости этим режимом на некотором элементе $j = j^*$ ансамбль рождается новое периодическое движение (только такая бифуркация возможна в точечной системе, соответствующей (23)), т. е. исходный одночастотный режим превращается при $j > j^*$ в квазипериодический — двухчастотный. С помощью масштабных преобразований и последующего усреднения для амплитуды этого модулированного режима вновь может быть получено исходное уравнение (59) [26]. Если и этот модулированный режим окажется неустойчивым, то, повторяя рассуждения, можно показать возникновение трехчастотного режима (при $j > j^{**}$) и т. д.

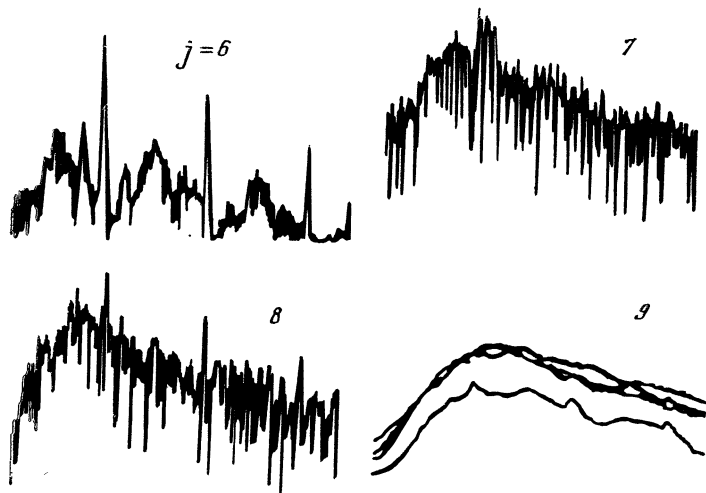


Рис. 15. Эффект стабилизации турбулентности вдоль цепочки (58) [27]

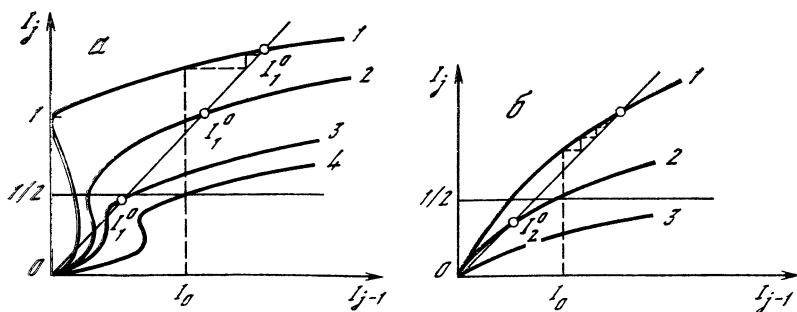


Рис. 16. Графики отображения (60) при различных значениях параметров

а: $(1 + \beta\omega_0) > 0$, $(I + \omega_0^2)(1 + \beta^2) \geq (\omega_0 - \beta)^2$, отображение имеет две нетривиальные неподвижные точки — I_1^0 и $I_2^0 < 1/2$ (на кривых 1,2 $I_1^0 > 1/2$, на кривой 3 $I_1^0 < 1/2$); б: $\gamma^2 > (1 + \omega_0^2)$ — одна нетривиальная точка (кривые 1,2); при $\gamma^2 < (1 + \omega_0^2)$ — лишь тривиальная неподвижная точка (кривая 3)

Соответствующая решению (60) зависимость I_j от I_{j-1} при различных значениях параметров представлена на рис. 16. Видно, что это отображение может иметь до трех неподвижных точек (им соответствует пространственно однородный периодический режим). Из анализа линеаризованной задачи следует, что значения I_j , лежащие в области $dI_j/dI_{j-1} < 0$ зависимости $I_j(I_{j-1})$ (рис. 16), неустойчивы. Устойчивость режимов с монотонно растущей вдоль цепочки интенсивностью обеспечивается условием $I_j > 1/2$.

Таким образом, если пространственно однородный режим, соответствующий верхней ветви отображения (60) (см. рис. 16), имеет

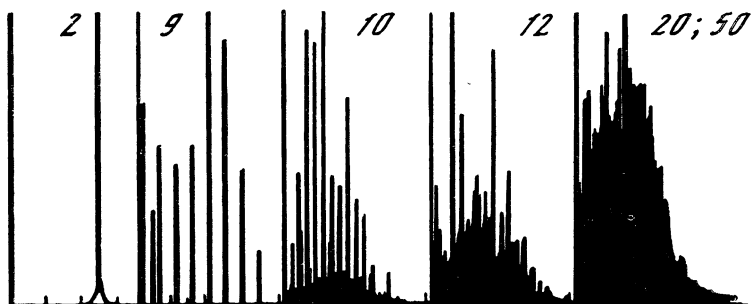


Рис. 17. Изменение спектра мощности в зависимости от j при пространственном возникновении хаоса через «квазипериодичность» ($\varkappa = 0$)

малую амплитуду ($I^0 < 1/2$), то одноперiodические колебания устойчивы лишь на первых нескольких элементах потока (им отвечают те итерации отображения, которые расположены выше прямой $I_j = 1/2$, см. рис. 16). Как только интенсивность стационарных пульсаций (на j^* -м элементе) становится меньше $1/2$, режим периодических колебаний становится неустойчивым и сменяется вдоль дорожки режимом биений: реализации, снимаемой с $(j^* + 1)$ -го элемента, соответствует устойчивый предельный цикл (в исходных переменных это двумерный тор).

Аналитически определить число пространственных переходов через «квазипериодичность», предшествующих возникновению хаоса вдоль цепочки, в общем случае не удастся. В численных же экспериментах [29] их наблюдалось не более трех, после чего возникли хаотические пульсации (рис. 17). При дальнейшем продвижении вниз по потоку родившийся хаос становился более интенсивным и спектр его уширялся; однако, начиная с некоторого j^{***} , все средние характеристики турбулентного режима уже переставали зависеть от пространственной координаты j и устанавливался режим стабилизации турбулентности.

Стабилизация турбулентности. Попытаемся разобраться в природе обнаруженного в численном [29] и физическом [27] экспериментах эффекта стабилизации турбулентности — установление вдоль цепочки пространственно однородного хаотического режима, т. е. режима, у которого размерность, энтропия и другие средние характеристики при $j > j^{***}$ перестают замечать подключение к цепочке новых структур, т. е. новых степеней свободы (напомним, что пока мы пренебрегаем диффузией). Для понимания механизма этого эффекта следует разобраться в поведении ляпуновских показателей ансамбля структур при увеличении числа элементов.

Число ляпуновских показателей реализации, снимаемой на $(j + 1)$ -м элементе цепочки, на два превышает число показателей реализации, снимаемой с j -го элемента. Средние характеристики турбулентного режима при увеличении j , очевидно, не будут

изменяться лишь в том случае, если вновь появляющиеся показатели (при сдвиге вдоль по цепочке) будут отрицательны и достаточно велики. Это обстоятельство подтверждается численным экспериментом [26]. Таким образом, действительно, и колмогоровская энтропия $H = \sum_{j=1}^n \lambda_j$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$), и размерность $D = M + d$ (см. (25)) при достаточно больших j не изменяются вдоль «потока».

С физической точки зрения обсуждаемый эффект можно интерпретировать как вынужденную синхронизацию элементарного автогенератора внешним стохастическим сигналом [30].

Добавим, что эффект стабилизации турбулентности наблюдается и в исходной системе с диффузией (23) (рис. 18) [26].

Волны перехода порядок—хаос. Близкий к пространственно однородному хаотический режим, устанавливающийся в потоковой системе при достаточно больших j , может оказаться неустойчивым по отношению к синхронизирующему воздействию внешнего периодического поля, подаваемого на границу системы. Явления, которые должны при этом наблюдаться, в некоторой степени аналогичны тем, которые имеют место в потенциально-неустойчивых (возбудимых) средах при запуске внешнего импульса. В такой ситуации в возбудимой среде, как известно, возникает волна переброса, соответствующая переходу среды из одного состояния в другое. Подобный переход из хаотического состояния неравновесной среды в устойчивое — синхронизованное должен наблюдаться и в исследуемых потоковых системах. Для доказательства такой возможности достаточно убедиться, что в той области параметров, где в автономной цепочке наблюдается режим пространственного развития и установление хаоса, при наличии внешней периодической силы устойчив лишь регулярный режим. Поясним это для системы

$$\begin{aligned} da_j/dt &= a_j(1 - \delta |a_j|^2) + \gamma(a_j - a_{j-1}), \\ a_0(t) &= A_{\text{вн}} \exp(i\omega_{\text{вн}}t). \end{aligned} \quad (61)$$

Наиболее чувствительной к синхронизации цепочка должна быть на частоте $\omega_{\text{вн}}$, близкой к парциальной частоте $\omega_{\text{п}}$ составляющих ее элементов, т. е. (при учете комплексной связи γ) на частоте $\omega_{\text{вн}} \approx \omega_{\text{п}} = \beta(1 - \text{Re } \gamma) + \text{Im } \gamma / \text{Re } \gamma$. Стационарный пространственно однородный режим синхронизации описывается отображением

$$I_j(1 - I_j)^2 = \frac{\gamma^2}{1 + \beta^2} I_{j-1}, \quad I_0 = A_{\text{вн}}^2. \quad (62)$$

Это отображение при любых значениях параметров β и γ имеет устойчивую неподвижную точку $I_0^* = 1 + |\gamma|(1 + \beta^2)^{-1/2}$, и, как видно из рис. 16, a (кривая I), при произвольной амплитуде внешнего поля существует траектория отображения, целиком располагающаяся в области устойчивости. Более того, режим полной синхронизации (62), как показано в [26], оказывается

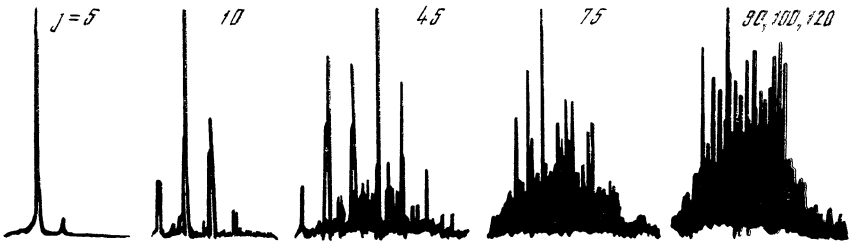


Рис. 18. Развитие и стабилизация турбулентности «вниз по потоку» в системе с диффузией ($\kappa = 0,5$, $\gamma = 1 + i \cdot 1,71$, $\beta = 5$, $a_1(t) \equiv a_0(t)$)

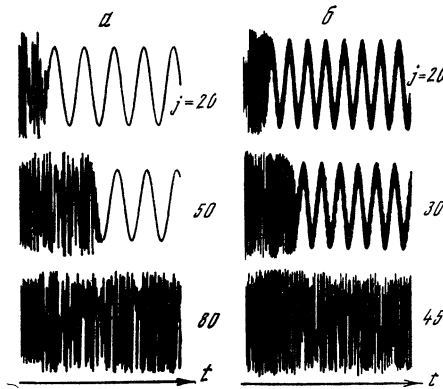


Рис. 19. Волны фазового перехода *a* — регулярные колебания—хаос ($\gamma = 0,7(1 - i \cdot 1,71)$, $\beta = 3,42$, $\kappa = 0,001$, $a_0 \equiv 0$, $I_0 > 1/2$); *b* — биения — хаос (параметры те же, начальные условия $I_0 < 1/2$)

и глобально устойчивым, т. е. в бесконечномерном фазовом пространстве системы (61) при $\omega_{\text{вн}} = \omega_{\text{п}}$ не существует никаких других притягивающих множеств. Следовательно, при $t \rightarrow \infty$ в цепочке должен установиться режим синхронизации независимо от начальных условий.

Время установления режима синхронизации, однако, может оказаться весьма большим — оно определяется не только параметрами системы, но и начальным уровнем возбуждения образующих ее элементов. Поскольку колебания элементов неизохронны, при достаточном разбросе начальных условий в системе должен быстро установиться хаотический режим (например, при значениях параметров, о которых шла речь в предыдущем подразделе). Синхронизация этого режима, начинающаяся с первого элемента, будет постепенно захватывать элементы «вниз по потоку» — образуется распространяющийся фронт синхронизации (рис. 19, *a*). Поскольку время установления режима синхронизации для каждого элемента конечно, спектр управляющего сигнала с ростом j будет «успевать» непрерывно обогащаться, что, в свою очередь, увеличит время выхода на режим полной синхронизации.

В случае, когда расстройка между частотой внешнего поля и парциальной частотой колебаний элементов цепочки больше полосы синхронизации, на левом краю дорожки возникает регулярный режим биений, который, подобно однопериодическому режиму,

будет вытеснять хаос — образуется постепенно замедляющаяся волна перехода биения — хаос (рис. 19, б).

Заметим в заключение, что в области фронта волны перехода принципиальны малые флуктуации в системе, и в конечном итоге именно они ограничивают длину синхронизации. К подобному же эффекту приводит и наличие обратной связи, т. е. передача возбуждений вверх по потоку ($\kappa \neq 0$).

4. Моделирование автоструктур на ТВ-аналоге

Вводные замечания. Как мы видели, аналитические возможности исследования автоструктур и динамики ансамблей структур опираются на решение приближенных или модельных уравнений. Численные же эксперименты требуют чрезмерно много времени даже на самых современных компьютерах. В связи с этим представляется весьма важным поиск возможностей для анализа нестационарного поведения структур в неравновесных средах с помощью специализированных аналоговых устройств. Один из первых шагов в этом направлении был сделан в работе [31], где предлагалось использовать для аналогового моделирования неравновесных сред с диффузией искусственные среды из электролюминесцентных оптических преобразователей с поточечной обратной связью. Однако более оптимальным для подобного моделирования оказывается использование стандартной телевизионной техники. Недавно в работах [32—34] были продемонстрированы блестящие возможности ТВ-аналога — системы телевизор—камера—обратная связь. Схема такой аналоговой вычислительной машины представлена на рис. 20.

Обсудим здесь возможности ТВ-аналога в черно-белом варианте с точки зрения анализа поведения структур в двумерных неравновесных средах с ∞ -образной нелинейной характеристикой точечной системы. Моделируемые в такой однокомпонентной системе уравнения описывают, например, движения паровой фазы при пленочном режиме кипения на твэлах [35], динамику ансамблей делящихся клеток в живых тканях [36], различного рода окислительные реакции на плоских катализаторах [37] и т. д. Адекватность используемой модели подтверждается, в частности, реализуемостью на ТВ-аналоге хорошо изученных автоволновых процессов, например распространения пламени при огибании препятствий. С помощью такого моделирования удастся исследовать механизмы взаимодействия локализованных структур, в частности связанного с перебросом избыточного возбуждения [38], процессы формирования элементарных структур и квазиодномерных ансамблей, образованных такими структурами, и т. д.

Основные уравнения [39]. Исходными для описания ТВ-аналога (см. рис. 20) служат усредненные за время τ_m инерционности мишени камеры разностные уравнения, которые связывают потенциал u_n на поверхности мишени камеры в точке (x, y) и яркость изображения I_n на экране телевизора в точке, соответствующей

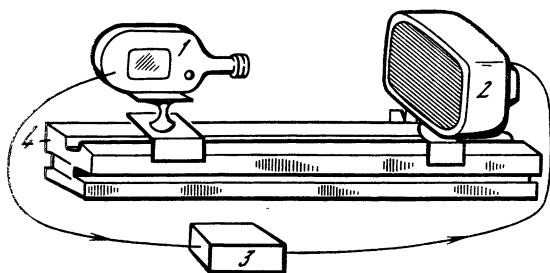


Рис. 20. Блок-схема ТВ-аналога

1 — телекамера, 2 — монитор, 3 — усилитель в цепи обратной связи, 4 — оптическая скамья

(x, y) , в моменты времени $t_n = t_0 + n\tau_K$ (τ_K — время формирования кадра, $\tau_M \sim 10\tau_K$):

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \beta \hat{R}_M u_n(x) + f_1[\hat{R}_O(I_n(x))], \\ I_{n+1}(x) &= f_2[u_{n+1}(x)], \quad \beta = 1 - \tau_K/\tau_M. \end{aligned} \quad (63)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \hat{R}_O(I_n(x)) &= \int_{S_O} R_O(x + \zeta - \xi) I_n(\xi) d\xi; \\ \hat{R}_M(u_n(x)) &= \int_{S_M} R_M(x - \xi) u_n(\xi) d\xi; \end{aligned}$$

S_O, S_M — соответственно поверхность экрана телевизора и мишени камеры. Функция f_1 описывает преобразование оптического изображения в электронное, а f_2 — электронного в оптическое. Функция R_O определяет распыление изображения в оптическом канале системы и приближенно имеет гауссову форму, как и функция R_M , характеризующая растекание заряда на мишени, параметр ξ связан с относительным сдвигом оптических осей камеры и телевизора.

Имея в виду моделирование процессов с характерными временами, много большими τ_K , после усреднения за интервал $t \sim l\tau_K$ ($l \gg 10$), переходим к непрерывному времени:

$$\begin{aligned} \tau_K \frac{\partial u}{\partial t} &= -(1 - \beta) \int_{S_M} u(\xi) R_M(x - \xi) d\xi + \\ &+ f_1 \left[\alpha(x) \int_{S_O} f_2(u(\xi)) R_O(x + \zeta - \xi) d\xi \right]. \end{aligned} \quad (64)$$

Заданная неоднородность $\alpha(x)$ параметров моделируемой среды создавалась с помощью масок, помещаемых в плоскость, сопряженную с плоскостью электронного изображения. Далее, раскрывая вид операторов и учитывая линейность рабочего участка $f_1(u)$ ($f_1(u) = Ku$), получим нелинейное уравнение с диффузией, обычно используемое для описания процессов распространения и взаимодействия возбуждений в неравновесных средах:

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t &= F(u, x) + J(u, x) \nabla u + \alpha(x) [\delta^2 \nabla (D(u) \nabla u) + \\ &+ \zeta \nabla (D(u) \zeta \nabla u)], \end{aligned} \quad (65)$$

$$\delta^2 = \int_{S_0} {}^{1/2} \xi^2 R_0(\xi) d\xi.$$

Здесь

$$F(u, x) = - \left(\frac{1}{\tau_K} - \frac{1}{\tau_M} \right) u + \frac{K\alpha(x)}{\tau_K} f_2(u);$$

$$J(u, x) = \xi \frac{K\alpha(x)}{\tau_K} f_2'(u); \quad D(u) = K f_2'(u) / \tau_K.$$

Построенная с помощью прямых измерений функция $F(u, x)$ имеет вид ∞ -образной кривой, крутизна и среднее значение которой определяются регулировками «контрастность» и «яркость», а $f_2'(u)$ — трапецеидальная функция.

Эксперимент. В системах вида (65), как известно [40], возможно распространение стационарных фронтов «переброса» (от одного равновесного состояния к другому). Для одномерных волн такой переброс описывается сепаратрисой седла на фазовой плоскости уравнения нелинейного осциллятора с трением. В нашем случае это переброс от однородно светящегося экрана телевизора к погасшему либо наоборот. Подчеркнем, что все эксперименты проводились при отсутствии внешних источников освещенности, такие источники были необходимы лишь для создания определенных начальных условий — «поджига» экрана телевизора в нужных точках. Наблюдавшиеся на ТВ-аналоге волны переброса, в том числе и при огибании различного рода искусственных препятствий — масок на экране телевизора, показали полное соответствие полученных таким образом решений решениям, найденным при численном моделировании [41].

Для моделирования автоструктур форма функции $F(u)$ с помощью регулировок «яркость» и «контрастность» выбиралась таким образом, чтобы скорость фронтов переброса от «черного» к «белому» (или наоборот) была близка к нулю. При этом автоструктуры представляли собой локализованные световые ячейки.

Опишем нестационарные процессы, приводящие к возникновению элементарных структур и цепочек из таких структур. Пусть начальное состояние представляет собой экран, разделенный на темную и светящуюся половины. При стремлении параметров «среды» к интересующим нас значениям однородная граница раздела становится неустойчивой и модулируется с характерным масштабом l_0 . В дальнейшем глубина модуляции увеличивается и возникают ячейки. В случае, когда рабочая часть экрана представляет собой вытянутый прямоугольник, эти ячейки выстраиваются в однорядную цепочку (см. также [42]). Замечательно, что параметры такой цепочки не зависят ни от начальных, ни от граничных условий. Например, если «стереть» одну или несколько из промежуточных ячеек, то оставшиеся ячейки начнут сближаться до тех пор, пока не восстановят первоначальный шаг дорожки (число элементов в цепочке при этом будет уже меньшим) (рис. 21).

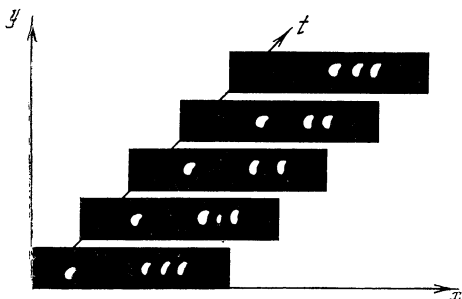


Рис. 21. Возникновение кластеров из автоструктур

Критические явления в неоднородных возбудимых средах. Для неравновесных сред наиболее типичны неоднородности двух видов: плавные, определяемые, например, неоднородностью внешнего поля, управляющего процессами в среде, и случайные, связанные с разбросанными, в среднем однородно, дефектами (невозбудимыми или пораженными участками). Приведем примеры независимого влияния таких неоднородностей [39].

В возбудимой среде с однородно расположенными дефектами может наблюдаться замедление скорости распространения фрон-

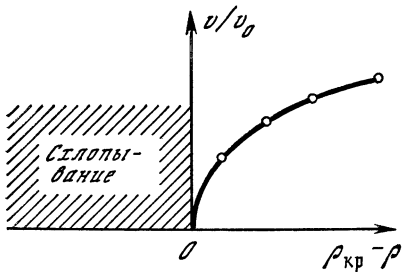


Рис. 22. Зависимость скорости фронта возбуждения от относительной плотности дефектов ρ ($\gamma = 0,6$ при $v_0 = 20$ см/с)

тов возбуждения с ростом плотности дефектов. Как оказалось, такое замедление действительно имеет место, однако явление носит критический характер и сходно с явлениями перколяции. Результаты эксперимента представлены на рис. 22.

Было обнаружено, что существует критическое значение плотности дефектов $\rho_{кр}$, ниже которого в возбудимой среде с дефектами, как и в однородной среде, происходит стационарное распространение фронтов возбуждения (переключения). Если же плотность дефектов выше критической, то возбуждение не распространяется, а схлопывается. Вблизи критической точки скорость фронта меняется по степенному закону $(\rho_{кр} - \rho)^\gamma$, где критический индекс $\gamma \in (0, 1)$ определяется степенью неравновесности среды (в эксперименте контрастом и яркостью). При $\rho = \rho_{кр}$ наблюдаются стационарные неподвижные структуры. Вблизи критической точки обнаруживается подобие — увеличение «контраста» эквивалентно уменьшению плотности дефектов. При $\rho > \rho_{кр}$ ограниченное возбуждение схлопывается (рис. 23).

Одним из наиболее интересных эффектов, наблюдавшихся в плавно неоднородной возбудимой среде, является процесс периодического отрыва «капель» от устойчивой вначале области возбуж-

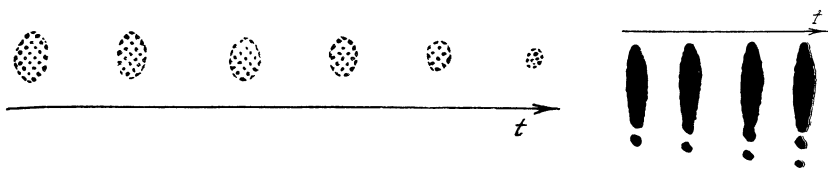


Рис. 23. Схлопывание (во времени) пространственно-ограниченного возбуждения в среде с $\rho > \rho_{кр}$

Рис. 24. Периодический отрыв капель от локализованного возбуждения в плавно неоднородной среде при градиенте неоднородности, большем критического

дения. При некотором критическом значении градиента неоднородности фронт области стационарного возбуждения становится неустойчивым — изрезается. На нелинейной стадии формируются «капли», которые затем отрываются (рис. 24). Частота отрыва «капель» растет с ростом градиента неоднородности.

Подчеркнем в заключение, что ТВ-аналог представляет замечательные возможности для моделирования не только возбудимых сред с диффузией, но и самых разнообразных нелинейных полей, включая задачи нелинейной теории поля.

Заключение

Как мы видели, исследование динамики пространственных ансамблей структур приводит к совершенно новым и зачастую нетривиальным постановкам задач. Одной из них является рассмотренная выше задача о пространственных бифуркациях — перестройках и усложнениях движения вдоль системы с невязимной связью элементов. Таким бифуркациям в фазовом пространстве «поточковой системы» соответствует смена типа аттрактора при переходе из одного подпространства в другое, большей размерности (размерность подпространства возрастает при движении вдоль цепочки структур).

Сформулируем здесь еще одну проблему, связанную с бифуркациями в пространственных ансамблях структур и неравновесных средах вообще. Это проблема перестройки пространственного распределения поля в среде при непрерывном изменении параметра, т. е. проблема превращений одних пространственных образов в другие. По существу теория таких превращений — это теория фазовых переходов в неравновесных средах. Ограничимся здесь обсуждением только диссипативных сред, в которых пространственные образы, наблюдающиеся при $t \rightarrow \infty$ (они могут быть статическими, регулярно или хаотически пульсирующими во времени), не зависят от начальных условий. В функциональном фазовом пространстве соответствующей динамической системы таким образом отвечает аттрактор — состояние равновесия, если образ статический, цикл или незамкнутая намотка тора, если он

регулярно пульсирует во времени, и странный аттрактор, если такие пульсации хаотические.

Задачи теории переходов пространственных образов много сложнее привычных задач теории бифуркаций динамических систем, и уже их постановка должна быть иной. Если, например, классическая теория бифуркаций в состоянии предсказать все в принципе возможные перестройки движения динамической системы на основании анализа элементов ее фазового пространства, то для теории переходов пространственных образов такая постановка задачи выглядит безнадежной. Даже задача «максимум» здесь должна формулироваться более узко, например, так: на основании знания основных устойчивых состояний (образов) предсказать разрешенные переходы между ними, реализующиеся при изменении параметров.

Имеющиеся пока единичные примеры решения задачи о перестройках пространственных образов относятся лишь к анализу слабонелинейных и слабонеровновесных сред, когда удастся связать вид пространственных возмущений, по отношению к которым исходный «образ» теряет устойчивость, с тем пространственным образом, который устанавливается при $t \rightarrow \infty$ вместо исходного.

Обратим внимание на принципиальную особенность анализа переходов пространственных образов в безграничных средах и ансамблях структур из очень большого числа элементов. В подобных «больших» системах существенно расширяется область параметров, где трудно (или невозможно) наблюдать пространственные образы, которым отвечает аттрактор, — в этой области параметров наблюдаются лишь переходные, метастабильные образы, время жизни которых столь велико, что оказывается порядка времени эксперимента (численного или физического). Метастабильным образом в фазовом пространстве исходной динамической модели отвечают уже не аттракторы, а переходные множества траекторий, внутри которых изображающая точка проводит большое время. Подчеркнем, что размерность этих множеств может быть как меньше размерности аттрактора, на который при $t \rightarrow \infty$ выйдет система, так и существенно больше (что наблюдается в случае переходного хаоса [25, 43]).

Наиболее интересные вопросы, которые возникают при описании подобных ансамблей из метастабильных образов, — это оценка числа одновременно существующих состояний, исследование свойств границ — дислокаций между ними и описание динамики таких дислокаций⁸.

⁸ За прошедшее с момента подготовки сборника время некоторые из поставленных в заключении проблем уже нашли свое частичное решение (см.: Гапонов-Грегов А. В., Ломов А. С., Рабинович М. И. Локализованные автоструктуры в двумерных однородных средах // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44, № 5. С. 242—244; Арансон И. С., Рабинович М. И. Рождение и динамика спиральных вихрей двумерных моделей Гинзбурга — Ландау // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. № 12; Tagami Y. On a system of nonlinear diffusion equation and formation of microarchitecture in polymers // Physica D. 1986. Vol. 21, N 2/3. P. 325—340).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Normand C., Pomeau Y., Velarde M. G.* Convective instability: A physicist's approach // *Rev. Mod. Phys.* 1977. Vol. 49. P. 591—624.
2. Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта. М.: Мир, 1981.
3. *Рабинович М. И., Фабрикант А. Л.* Стохастическая автомодуляция волн // *ЖЭТФ.* 1979. Т. 77. С. 617—629.
4. *Незлин М. В., Снежкин Е. Н., Трубников А. С.* Неустойчивость Кельвина—Гельмгольца и Большое Красное Пятно Юпитера // *Письма в ЖЭТФ.* 1982. Т. 36, вып. 6. С. 190—193.
5. *Курдюмов С. П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации // *Современные проблемы математической физики и вычислительной математики.* М.: Наука, 1982. С. 217—243.
6. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии: Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.
7. *Weis R. M., McConnel H. M.* Two-dimensional chiral crystals of phospholipid // *Nature.* 1984. Vol. 310. P. 47—49.
8. *Langer J. S.* Chiral solidification of a phospholipid monolayer // *Phys. scr.* 1985. Bd. 9. S. 119—122.
9. *Ди Прима Р. С., Суинни Х. Л.* Неустойчивости и переход в течении между концентрическими вращающимися цилиндрами // *Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности.* М.: Мир, 1984. С. 169—217.
10. *Вашкевич О. В., Гапонов-Грехов А. В., Езерский А. Б., Рабинович М. И.* Рождение уединенных автоструктур при термоконвекции в слое с неоднородным подогревом // *ДАН СССР.* 1987. Т. 294, № 4.
11. *Езерский А. Б., Короткий П. И., Рабинович М. И.* Хаотическая автомодуляция двумерных структур на поверхности жидкости при параметрическом возбуждении // *Письма в ЖЭТФ.* 1985. Т. 41. С. 129—131.
12. *Gapov-Grekhov A. V., Rabinovich M. I.* Dynamic chaos in ensembles of structures and spatial development of turbulence in unbounded systems / Ed. V. Ebeling. N. Y.: Springer, 1986.
13. *Pocheau A., Croquette V., Le Gal P.* Turbulence in a cylindrical container of argon near threshold of convection // *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 55. P. 1094—1097.
14. *Kobayashi R., Kohama Y.* Spiral vortices in boundary layer transition on a rotating cone // *Laminar-turbulent transition* / Ed. V. V. Kozlov. N. Y.: Springer, 1984. P. 573—578.
15. *Козлов В. В., Рамазанов М. П.* Резонансное взаимодействие возмущений в течении Пуазейля // *ДАН СССР.* 1984. Т. 275. С. 1346—1349.
16. *Head M. R., Vandyopadhyay P.* New aspects of turbulent boundary-layer structure // *J. Fluid Mech.* 1981. Vol. 107. P. 297—338.
17. *Siggia E. D., Zippelius A.* Pattern selection in Reyleigh—Benard convection near threshold // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 47. P. 835—838.
18. *Хакем Г.* Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985.
19. *Езерский А. Б., Рабинович М. И., Реутов В. П., Старобинец И. М.* Пространственно-временной хаос капиллярной ряби при параметрическом возбуждении жидкости // *ЖЭТФ.* 1986. Т. 91, вып. 6 (12). С. 2070—2083.
20. *Арансон И. С., Горшков К. А., Рабинович М. И.* Стохастическое движение солитона в периодическом поле: Препр. ИПФ АН СССР, № 51. Горький, 1982. 25 с.
21. *Gorshkov K. A., Ostrovsky L. A.* Interaction of solitons in nonintegrable systems: Direct perturbation method and applications // *Physica. D.* 1981. Vol. 3. P. 428—438.
22. *Львов В. С., Предтеченский А. А.* Позатанный переход к турбулентности в течении Куэтта // *Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность.* Горький: ИПФ АН СССР, 1980. С. 57—77.

23. *Eckman J. P., Ruelle D.* Ergodic theory of chaos and strange attractors// Rev. Mod. Phys. 1985. Vol. 57. P. 617—656.
24. *Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.* Развитие хаоса в ансамблях динамических структур // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 92—105.
25. *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М.* Рождение многомерного хаоса в активных решетках // ДАН СССР. 1984. Т. 279. С. 596—601.
26. *Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М.* Странные аттракторы и пространственное развитие турбулентности в потоковых системах // ЖЭТФ. 1986. Т. 90, вып. 5. С. 1707—1718.
27. *Анищенко В. С., Арансон И. С., Постнов Д. Э., Рабинович М. И.* Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // ДАН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1120—1124.
28. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мнр, 1984.
29. *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М.* Динамическая модель пространственного развития турбулентности // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39. С. 561—565.
30. *Афраймович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных средах//Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 28, № 9. С. 981—990.
31. *Дубинин Ф. Д.* Оптоэлектронная модель однородных сред. М.: Наука, 1980.
32. *Abraham R.* Simulation of cascades by video feedback//Lecture notes in mathematics. Berlin etc.: Springer, 1976. Vol. 525. P. 10—14.
33. *Ferraro G., Häusler G.* TV optical feedback systems//Opt. Eng. 1980. Vol.19. P. 442—451.
34. *Crutchedfield J. P.* Space-time dynamics in video feedback//Physica D. 1984. Vol. 10. P. 229—245.
35. *Жуков С. А., Барелко В. В., Мержанов А. Г.* Динамика перехода между пузырьковым и пленочным кипением в режиме бегущей волны // ДАН СССР. 1979. Т. 245. С. 94—98.
36. *Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г.* Автоволновые процессы в распределенных кинетических системах // УФН. 1979. Т. 128, № 4. С. 625—666.
37. *Барелко В. В., Володин Ю. Е.* О распространении волны активности по поверхности катализатора//ДАН СССР. 1975. Т. 223. С. 112—116.
38. *Шкловер В. В.* Нелинейные волновые процессы в возбудимых средах. Моделирование на ТВ-системе с оптической обратной связью: [Дипломная работа]. Горький: ГГУ, 1985.
39. *Голубев В. Н., Рабинович М. И., Таланов В. И.* и др. Критические явления в неоднородных возбудимых средах. Моделирование на «ТВ-аналоге» // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 42. С. 84—87.
40. Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький: ИПФ АН СССР, 1981.
41. *Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Мебрович В. Б., Михвиладзе Г. М.* Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
42. *Бобырев В. А., Булкин Ф. В., Кириченко Н. А.* и др. Диссипативные структуры при лазерном окислении ванадия: Препр. ИОФАН № 68. М., 1986.
43. *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.* Нелинейная физика. Стохастичность и структуры//Физика XX века: Развитие и перспективы. М.: Наука, 1984. С. 219—280.

ДИНАМИКА И ИНФОРМАЦИЯ

Б. Б. КАДОМЦЕВ

Введение

При школьном знакомстве с механикой невольно создается представление об этой области физики как о точной науке, имеющей дело с набором четко поставленных и точно решенных изящных динамических задач. По крайней мере, именно так механика обычно преподается. Из такого представления о механике довольно естественно вытекает механистический подход к другим явлениям в физике, и, казалось бы, вполне оправдан лапласовский детерминизм: достаточно найти силы, действующие между отдельными телами, и затем по начальным условиям можно предсказать эволюцию мира. Однако мы знаем, что природа устроена и развивается более сложным образом. Но, может быть, еще не так широко известно, что и в самой механике взгляды существенно изменились за последние несколько лет.

Оказалось, что все точно решаемые, так называемые интегрируемые задачи принадлежат к классу специально подобранных сильно упрощенных задач. Большая же часть механических систем неинтегрируема. Это не просто неумение найти решение в конечном виде, а факт сложного поведения динамической системы, поведения, похожего на хаотическое, случайное. Такое поведение, получившее название динамического хаоса, показано и проанализировано на большом числе частных примеров и представляется достаточно универсальным. Близкие траектории такого движения разбегаются в фазовом пространстве, т. е. оно локально неустойчиво. Поэтому для его описания, наряду с точным расчетом траекторий с помощью ЭВМ, могут быть использованы и статистические методы, если представляет интерес изучение поведения системы в течение достаточно длительного времени.

Но этого мало. При рассмотрении поведения и в особенности взаимодействия систем со стохастичностью могут быть использованы представления, заимствованные из теории управления и кибернетики, которые были развиты для описания искусственно созданных человеком систем с управлением, но которые нашли свои аналоги и в природных явлениях, в частности в биологических процессах

Именно этой теме и посвящено последующее изложение. При этом, как будет видно, мы естественно затронем проблему самоорганизации, также живо обсуждаемую в последние годы, в частности, в рамках синергетического подхода [1—13].

1. Динамический хаос

Хаотическое поведение свойственно большей части динамических систем, как консервативных, с сохранением энергии, так и диссипативных. Для гамильтоновых систем, у которых фазовый объем сохраняется, движение носит характер перемешивания в фазовом пространстве: начальная «капля» фазового пространства, размер которой задан неопределенностью начальных данных, сложным образом деформируется в процессе движения. «Капля» испускает из себя «отростки», которые затем вытягиваются, деформируются и постепенно «прорастают» во все фазовое пространство, сохраняя свой объем так, что все это становится похожим на комочек ваты. Близкие траектории при таком движении экспоненциально быстро расходятся друг от друга, средний темп их разбегания характеризуется энтропией Колмогорова—Синая. В процессе размешивания траектории могут сколь угодно близко подходить к любой заданной точке в пространстве. Такие системы называются эргодическими — средние значения некоторой функции от координаты фазового пространства по времени и по пространству совпадают между собой.

В системах с диссипацией в процессе движения фазовый объем сокращается. В простейшем случае такая система эволюционирует к состоянию равновесия — соответствующая траектория в фазовом пространстве имеет вид устойчивого фокуса. При подпитке энергией извне диссипативная система может испытывать устойчивые колебания — это устойчивый цикл в фазовом пространстве (в многомерном случае — тор), а может перейти в режим сложного стохастического движения, которое получило название странного аттрактора. Таким образом, все траектории диссипативной системы в фазовом пространстве соответствуют аттракторам — равновесию, периодическим колебаниям или странному аттрактору. Одним из аттракторов может быть разрушение системы.

Если диссипативная система имеет много степеней свободы, то у нее может быть много зон притяжения в фазовом пространстве. Если они составлены из устойчивых фокусов, то система будет стремиться к одной из точек устойчивого равновесия. В этом случае говорят о мультиравновесной системе — это простейший пример запоминающего устройства для компьютера. Предельное состояние может быть также одним из многих предельных циклов — такие запоминающие устройства также существуют (например, циклическая цепочка бегущих друг за другом цилиндрических магнитных доменов). В более общем случае система может стремиться к одному из многих возможных аттракторов, включая странные аттракторы. При выведении одной системы из заданного аттрактора с помощью внешнего воздействия она будет эволюционировать к другому аттрактору, зона притяжения которого покрывает точку начального состояния системы.

2. Самоорганизация

В простейшем случае самоорганизация — это появление порядка в первоначально однородной среде, другими словами, возникновение спонтанного нарушения симметрии в неустойчивом однородном состоянии. Имеется масса примеров самоорганизации этого типа в физике, химии и других естественных науках.

Фазовые переходы второго рода можно, следуя Ландау, описывать введением параметра упорядочения. Аналогичный подход используется для описания возникновения ячеек Бенара в подогреваемом снизу слое жидкости. На этих примерах видно, что появление порядка и новой симметрии связано с возрастанием физического параметра существенно выше первоначального теплового уровня. При развитии неустойчивости жидкости это макроскопические параметры жидкости: скорость, плотность, температура. Химические автоволны могут описываться в терминах концентраций участвующих в реакции веществ.

Макроскопические величины, такие, как скорость, плотность, температура и концентрация химических веществ, являются непрерывными функциями точки, т. е. физическими полями. Поэтому формально такие поля имеют бесконечное число степеней свободы. Однако при появлении порядка или развитии структур возбуждается только конечное число степеней свободы. Особенно хорошо это видно на примере ячеек Бенара или вихрей Тейлора. Поэтому системы с упорядочением часто можно рассматривать как системы с конечным числом степеней свободы, они допускают моделирование (по крайней мере численное) простыми механическими системами. Напомним, что именно на примере описания конвекции жидкости были найдены странные аттракторы.

При переходе к турбулентности число сильно возбужденных степеней свободы может быть большим. Однако и в этом случае число эффективно действующих свободных переменных не слишком велико. Известно, что фрактальная размерность эффективного фазового пространства не очень большая: мелкомасштабные степени свободы просто подстраиваются под крупномасштабные и выполняют роль более интенсивной диссипации.

Резюмируя, можно сказать, что самоорганизация в однородных средах и образование структур выводят некоторые коллективные степени свободы на уровень, очень далекий от теплового. Эти степени свободы могут описываться в терминах макроскопических параметров, играющих роль обобщенных координат в соответствующих механических моделях. Поэтому описание самоорганизованных систем сходно с описанием динамических систем.

Более сложный тип самоорганизации возникает в том случае, когда на появившихся структурах может дальше развиваться иерархия структур с появлением и взаимодействием новых струк-

турных элементов. Примером может служить добиологическая эволюция макромолекул и биологическая эволюция. Упрощенно, такая самоорганизация вовлекает в игру новые степени свободы, которые с точки зрения динамического моделирования можно рассматривать как элементы памяти на мультистабильных состояниях. Например, барханы пустыни можно рассматривать как медленно эволюционирующую динамическую систему, запоминающую историю взаимодействия поверхности песка с ветрами. Количественное описание соответствующих процессов развития можно моделировать динамическими моделями с диссипацией и памятью с достаточно большим числом степеней свободы.

3. Аттракторы и информация

Сам факт существования стохастических систем с небольшим числом степеней свободы должен заметно изменить наше представление о постановке динамических задач. В самом деле, раньше существовала точка зрения, что стохастичность присуща только системам с очень большим числом степеней свободы, для которых естественно использовать статистическое описание, а системы с небольшим числом степеней свободы должны описываться точно. «Точно» в рамках принятой модели, которая, может быть, не всегда достаточно полно соответствует реальности, но последнее обстоятельство можно заменить анализом отклика системы на малые возмущения: в устойчивой системе возмущения остаются малыми.

Если система неустойчива, то все траектории в фазовом пространстве разбегаются, и поэтому очень большое значение приобретают начальные данные. Если мы хотим, чтобы траектория реального движения была близка к выбранной нами траектории, т. е. чтобы она попадала в некоторую область фазового пространства в конце траектории, начальные данные должны быть выбраны с определенной степенью точности. Другими словами, нужно указать достаточно много десятичных знаков в каждой из координат q . Число знаков после запятой пропорционально $-\ln(1/\Delta q)$, где Δq — точность задания координаты. При задании всех координат и импульсов с некоторой точностью мы получаем величину, пропорциональную $\ln(V/\Delta V)$, где ΔV — доля объема фазового пространства. Величина $\ln(V/\Delta V)$ называется количеством информации. Таким образом, в неустойчивых системах наряду с динамической частью задачи, связанной с силовым взаимодействием тел, большую роль играет информационная часть, связанная с заданием начальных значений координат.

Но и это еще не все. Рассмотрим, к примеру, гамильтонову систему и предположим, что мы интересуемся задачей о попадании фазовой траектории в некоторую конечную «каплю» в фазовом пространстве. Спроектируем эту «каплю» вдоль фазовых траекторий на начальное время. Тогда соответствующая капля

расплывается в «комочек ваты», с большой скважностью покрывающей заметную часть фазового объема. Случайная точка в объеме, скорее всего, не попадает на «волокно», и очень малым смещением в фазовом пространстве можно попасть на траекторию внутри «волокна», оканчивающуюся в «капле». Итак, очень малое смещение в фазовом пространстве может привести нас на нужную траекторию — необходимо только знать, куда смещаться. Знание — это тоже информация. Самым простым способом это знание может быть получено путем прослеживания за траекториями. Именно так и устроены системы управления: они следят за реальной траекторией и малыми сигналами изменяют ее, переводя на нужную.

Итак, в неустойчивых системах малыми сигналами можно сильно изменить траекторию. Для этих сигналов важна не их величина, а точное соответствие возможности перевода траектории на нужную, т. е. следует задать правильную информацию о структуре фазового портрета.

Рассмотрим теперь системы с диссипацией. Как уже было сказано выше, у открытых систем такого типа фазовое пространство упрощенно можно представить себе разделенным на области притяжения к различным аттракторам. Для перевода системы с одного аттрактора на другой ее нужно перебросить из одной области притяжения в другую. При этом опять на первый план выступает не величина силового воздействия, а его информационная характеристика: воздействие должно перебросить систему в любую точку притяжения второго аттрактора, т. е. системе следует сообщить определенное количество информации $\ln(V/\Delta V)$, где ΔV — объем притяжения второго аттрактора. Если система перебрасывается на часть этого объема, то это означает просто, что системе передана избыточная информация. Разумеется, чтобы осуществить переброс системы с одного аттрактора на другой, требуется затратить определенное количество энергии, и, вероятно, существует некоторое минимальное ее значение, ниже которого такой перенос невозможен и соответствующий сигнал не имеет новой информации.

Не динамический, а именно информационный аспект оказывается важным для рассматриваемого перехода. Соответственно и описывать его нужно в терминах информационных процессов. При этом оказывается важным не только количество сообщаемой информации, но ее содержание (иногда говорят — семантическое содержание), т. е. указание, в какой именно аттрактор система переводится.

4. Системы с информационным поведением

Рассмотрим некоторую систему, динамически неустойчивую, т. е. с разбегающимися траекториями. Чтобы упростить рассуждения, рассмотрим ее крайне упрощенную дискретную модель,

в которой траектория последовательно проходит через точки бифуркации.

В каждой точке ветвления система совершает «по поступок» — она выбирает один из последующих участков траектории. Если в каждой точке выбор случаен и корреляция между выборами отсутствует, то это пример цепи Маркова. Однако не он нас интересует.

Мы предположим, что исходная система на самом деле сложная и наряду с рассматриваемыми динамическими переменными у нее есть внутренние степени свободы, например соответствующие мультистабильным состояниям или внутренним аттракторам. Тогда выбор траектории в точках бифуркации будет определяться состоянием внутренних степеней свободы. Для этого выбора опять важно лишь информационное указание, какая траектория предпочтительна, величина же сигнала безразлична. Такую систему можно рассматривать как систему с управлением, которое определяется состоянием внутренней динамической системы.

На фоне силовой динамики поведение такой системы начинает определяться информационными свойствами системы, и соответственно ее можно назвать системой с информационным поведением. Если к тому же имеется обратная связь между динамическими и внутренними степенями свободы, то такая система может очень сложно реагировать на все внешние воздействия.

5. Информационная динамика

Поведение сложных систем, безусловно, представляет собой предмет конкретных исследований. Тем не менее можно высказать и некоторые общие соображения, впрочем, пока без достаточно надежного обоснования.

При сравнении простых и сложных систем, например простых механизмов и биологических систем со сложной иерархической организацией, резко бросается в глаза их принципиальное различие, состоящее в том, что движение простых механических систем полностью предопределено, а в живых организмах, даже простейших, мы видим признаки свободного поведения, не определяемого только внешними причинами. Разумеется, эта свобода действий еще более ярко выражена у сложных организмов.

Спрашивается, нельзя ли проследить за этой тенденцией развития исходя из представлений о самоорганизации.

Как мы уже обсуждали выше, у самоорганизующихся систем имеется возможность расслоения на динамическую и информационную, управляющую части. Если речь идет о биологических или добиологических системах, у которых имеется возможность репликации и многократного повторения цикла развития, то нетрудно себе представить, что системы с информационным поведением могут иметь и фактически имеют преимущества в борьбе за жизнь, т. е. за расширение фазового пространства своего устойчивого существования. Таким образом, в условиях кон-

курении динамическое поведение системы и ее развитие в большей мере начинают определяться ее информационными свойствами, включая информационное отношение к внешнему миру.

Такие системы наряду с обычным обменом энергией и энтропией с внешним окружением, необходимым для сохранения открытой самоорганизованной структуры, получают возможность информационного развития, т. е. усложнения и совершенствования своего управления. Этот процесс связан с усложнением управляющей части, т. е. появлением в ней новых степеней свободы или параметров порядка за счет все новых бифуркаций. Феноменологически этот процесс можно охарактеризовать как получение дополнительной информации от неравновесного внешнего мира.

При взаимодействии систем с памятью и информационным поведением могут развиваться процессы адаптации одних систем к другим. Это аналог появления «знаний» о реакции других систем на поведение данной. Дальнейшее развитие механизмов адаптации и оптимизации поведения системы приводит к возможности обработки информации, т. е. к появлению элементов сознания.

6. Свобода, воля, знание, цель

Свобода — это возможность выбора из нескольких альтернатив, акт воли — сам этот выбор. В неустойчивых системах с разбегающимися траекториями для выбора одной из траекторий достаточно очень мало изменить начальные данные, т. е. использовать для этой цели очень малый сигнал с определенной информацией. В сложной системе с информационным поведением этот выбор может быть сделан сигналом из части управления. Этот сигнал вырабатывается системой управления в процессе ее динамического движения и с использованием накопленной ранее памяти, т. е. знаний. Эти знания представляют собой продукт длительного развития данной системы в процессе ее взаимодействия с другими информационными системами, они в некоторой мере приобретают невременной характер, т. е. становятся не связанными с событиями только ближайшего прошлого. Благодаря этому волевой акт выглядит как бы свободным — он не предопределен видимыми в настоящий момент причинами.

Более того, проинтегрированные за большой промежуток времени и накопленные в памяти сведения содержат информацию о временном поведении системы и ее окружения, поэтому появляется возможность предугадывания событий, а следовательно, принятия решений с определенной целью. Другими словами, в отличие от обычной динамики, где поведение системы определяется ее мгновенной конфигурацией и соответствующими этой конфигурации силами, в информационных процессах выбор делается на основе долговременной памяти и с возможной экстраполяцией на будущее. Отсюда и появляется возможность вы-

бора цели. Таким образом, целесообразность и возможность выбора цели можно считать достаточно естественным продуктом развития сложных систем с информационным поведением.

Чем система сложнее, тем, казалось бы, в большей мере у нее должны проявляться аспекты информационного поведения. В природе в целом «волевое начало» связано с той структурой и памятью, которые сложились в ней в результате ее длительного развития. Когда в процессе исследований мы изолируем некоторую систему от внешнего окружения, мы, безусловно, создаем более простую и доступную для понимания ситуацию, но вместе с тем и обедняем ее путем информационной изоляции от внешнего мира.

При переходе к изучению все более сложных систем именно структурные, информационные аспекты их поведения и развития выступают на первый план, а динамика создает лишь основу для информационного развития.

Заключительные замечания

Идеи о самоорганизации и образовании диссипативных структур в открытых системах оказались очень важными для того, чтобы перебросить мостик между физикой и биологией. Но видно, что следует идти дальше и изучать развитие иерархизации структур, образование структур с памятью и информационными возможностями извлечения информации извне, накопления ее в памяти, использование информации для управления и обработки этой информации с целью оптимального управления. Все это предметы будущих исследований. Нам хотелось лишь показать, что существует много общих черт в поведении сложных систем, как органических, так и неорганических, и что неорганические системы со сложной структурой тоже не являются простыми ни в структурном плане, ни по характеру их поведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лихтенберг А. Дж., Либман М. А. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
2. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
3. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
4. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.
5. Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов. М.: Изд-во иностр. лит., 1980.
6. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетики. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
7. Поплавский Р. П. Термодинамика информационных процессов. М.: Наука, 1981.
8. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975.
9. Волькенштейн М. В. Биофизика. М.: Наука, 1981.
10. Иваницкий Г. Р., Кринский В. И., Сельков Е. Е. Математическая биофизика клетки. М.: Наука, 1978.

11. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
12. *Эбелинг В.* Образование структур при необратимых процессах. М.: Мир, 1981.
13. Термодинамика и регуляция биологических процессов/Под ред. А. И. Зотина. М.: Наука, 1984.



УДК 577.3 : 51

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ПАМЯТЬЮ И ФУНКЦИИ НЕЙРОННЫХ АНСАМБЛЕЙ

А. А. ВЕДЕНОВ, А. А. ЕЖОВ, Е. Б. ЛЕВЧЕНКО

Введение

Мозг непрерывно осуществляет многоступенчатую, иерархически организованную (в пространстве и во времени) обработку поступающих в него сигналов. Элементарные процессы, отвечающие за выполнение всех процессов обработки информации в нервной системе, происходят в мембранах специализированных клеток — нейронов; в настоящее время эти процессы изучены довольно подробно [1]. В то же время механизмы, лежащие в основе таких функций мозга, как распознавание образов, память, обучение и др., и, как считается (см., например, [1—3]), связанные с деятельностью тех или иных групп (ансамблей) нейронов в различных частях нервной системы, поняты существенно меньше.

Каждый такой ансамбль представляет собой систему сильно взаимодействующих элементов: «средний» нейрон образует связи с 10^2 — 10^4 другими клетками¹, которые передают ему сигналы и, в свою очередь, получают сигналы от данного нейрона. В ответ на внешнее возбуждение (например, со стороны рецепторов или других нейронов) формируется одна из стереотипных ответных реакций данной группы нейронов. Механизмы формирования реакций, которые определяются свойствами нейронов и связей между ними, по-видимому, одни и те же для различных частей мозга; предполагается также [1], что число разновидностей стереотипных реакций сравнительно невелико.

Характерной чертой обработки информации в нервной системе является пластичность связей между нейронами: состояние контактов между ними (синапсов) может изменяться при прохождении сигналов по нейронным цепям. Этот процесс обеспечивает долговременное запоминание части информации, поступающей в мозг. Таким образом, память оказывается рассредоточенной по большо-

¹ Полное число нейронов в ансамбле — величина такого же порядка.

му числу межнейронных связей; извлечение информации, содержащейся в ней, возможно лишь в процессах ассоциативного типа [4], т. е. путем предъявления стимула — образа, в соответствии с которым ансамбль нейронов формирует свою ответную реакцию — распознает образ. Кроме того, процесс обработки информации мозгом носит, по-видимому, параллельный характер [5, 6].

Начиная с работы Мак-Каллока и Питтса [7], рассматривавших мозг как ансамбль взаимодействующих пороговых элементов — формальных нейронов, был предложен ряд моделей, описывающих различные формы активности нейронных сетей (см., например, обзор [8]). В частности, широко обсуждались так называемые голографические модели мозга [9, 10]. В этих моделях используются переменные, описывающие связи между нейронами (оператор памяти T), переменные, определяющие состояние нейронов (поле активности, или вектор состояния σ), и постулируются уравнения, отражающие изменение σ и T со временем. В голографическом процессе вектору состояния и оператору T отвечают распределение амплитуд электромагнитной волны и почернение фотоэмульсии.

Системы уравнений, имеющие аналогичную структуру, кроме голографии, описывают также целый ряд других физических ситуаций, например явление модуляционной неустойчивости (коллапса) турбулентной плазмы [11], некоторые явления в нелинейной оптике и др. В последнее время развивается подход, в котором свойства ансамбля нейронов моделируются с помощью нелинейных динамических систем [12—20]. Вектором состояния в моделях этого типа является вектор в фазовом пространстве системы, а память определяется числом и типом устойчивых многообразий в этом пространстве — аттракторов; запоминание новой информации осуществляется путем усложнения (по определенному алгоритму) структуры аттракторов в фазовом пространстве динамической системы.

Коллективное поведение нейронов в этих моделях описывается уравнениями изображающей динамической системы; уравнения отражают ряд интересных свойств ансамбля, которые можно интерпретировать как обучение, распознавание образов, бистабильность восприятия, забывание, выработку прототипа.

1. Модель нейронной сети

Рассмотрим динамическую систему, элементы которой (нейроны) взаимодействуют между собой и термостатом. Состояние i -го нейрона в системе ($i = 1, \dots, N$) описывается переменной $\sigma_i(t)$ (t — время), изменяющейся в интервале $-\sigma_0 \leq \sigma_i(t) \leq \sigma_0$; состояние с $\sigma_i = -\sigma_0$ отвечает невозбужденному, а с $\sigma_i = \sigma_0$ — возбужденному нейрону, генерирующему импульсы с максимально возможной частотой. Предположим [15], что энергия системы является квадратичной функцией σ , и будем рассматривать величину

$$L = -E = \frac{1}{2} \lambda \sum_{ij} T_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (1)$$

($\lambda > 0$ — параметр) как лагранжиан взаимодействия системы, являющийся функционалом независимых переменных σ_i и T_{ij} . Учитывая взаимодействие нейронов с термостатом, приводящее к появлению сил трения ($\dot{\sigma}/\gamma_1$, \dot{T}/γ_2), из (1) получим динамические уравнения для σ_i и T_{ij} :

$$\frac{1}{\gamma_1} \dot{\sigma}_i - f_i(\sigma) - \zeta_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \sigma_i} = \lambda \sum_j T_{ij} \sigma_j, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\gamma_2} \dot{T}_{ij} - F_{ij}(T) - \xi_{ij}(t) = \frac{\partial L}{\partial T_{ij}} = \frac{1}{2} \lambda \sigma_i \sigma_j. \quad (3)$$

Добавленные в эти уравнения нелинейные слагаемые (f , F) препятствуют неограниченному возрастанию абсолютных величин σ и T , в рамках лагранжевой схемы они могут быть включены в выражение (1) в виде потенциалов, быстро возрастающих вблизи $|\sigma_i| = \sigma_0$, $|T_{ij}| = T_0$.

Величины $\zeta_i(t)$, $\xi_{ij}(t)$ в уравнениях (2), (3) представляют собой лапжевенковские источники шума. В нервных сетях шум возникает вследствие дискретного характера выделения нейромедиатора в синаптических окончаниях (дробовой шум), а также вследствие несинаптических взаимодействий нейронов между собой и с другими клетками мозга. В простейшем случае шум можно охарактеризовать введением эффективной температуры

$$\langle \zeta^2 \rangle = \langle \xi^2 \rangle \propto T_{\text{эф}}, \quad \langle \zeta \rangle = \langle \xi \rangle = 0,$$

где скобки обозначают усреднение по времени.

Функции типа энергии (1), уменьшающиеся (в отсутствие флуктуаций) в процессе эволюции системы, естественным образом возникают при рассмотрении различных задач оптимизации. Например, при конструировании электронных схем [21, 22] минимум функционала типа энергии отвечает минимальной длине проводников, соединяющих различные элементы схемы (матрица T , определяющая топологию связей, в этом случае заранее задана), либо минимальному времени распространения сигналов. В случае ансамбля нейронов уменьшение со временем функционала типа (1) может быть связано, например, с уменьшением энергии, расходуемой системой на метаболизм.

При построении динамической системы (2), (3) предполагалось, что состояние ансамбля нейронов может быть представлено как многопериодическое движение изображающей динамической системы, причем i -й элемент этой системы описывает периодическую (с периодом, определяемым переменной σ_i) траекторию. В принципе для моделирования нейронных сетей могут использоваться динамические системы с более сложными притягивающими мно-

жествами, например типа странных аттракторов, обладающих внутренней информационной структурой [20].

Динамические уравнения (2) и (3) описывают существенно различные физические процессы, которые можно назвать «обучением» и «распознаванием образов». Рассмотрим сначала первый из них.

Обучение состоит в том, что в уравнение (2) включается сильное внешнее поле, действующее в течение времени t_1 , в результате чего вектор $\sigma(t)$ принимает стационарное значение φ^1 , соответствующее образу с компонентами $\pm\sigma_0$. В результате обучения элементы матрицы T_{ij} , изменяясь со временем в соответствии с уравнением (3), получают приращение $\Delta T_{ij} = \gamma_2 \lambda t_1 \varphi_i^1 \varphi_j^1$; при этом предполагается, что t_1 значительно больше времени релаксации во внешнем поле вектора $\sigma(t)$ к своему стационарному значению φ^1 . Процедуру обучения можно повторить многократно, используя образы φ^s , $s = 1, \dots, s_0$. Считая, что до начала обучения $T_{ij} = 0$, после окончания этого процесса получим

$$T_{ij} = \sum_{s=1}^{s_0} \mu^s \varphi_i^s \varphi_j^s, \quad (4)$$

где коэффициенты μ^s зависят от длительности обучения.

Матрица T_{ij} (4) определяет структуру аттракторов в фазовом пространстве изображающей динамической системы, к которым приближается вектор состояния системы в процессе релаксации от произвольного начального состояния. Из (2)—(4) следует, что в отсутствие внешнего поля характерные времена релаксации переменных σ ($\tau_\sigma \approx (\gamma_1 \lambda N s_0)^{-1}$) и T ($\tau_T \approx (\gamma_2 \lambda s_0)^{-1}$) существенно различаются: $\tau_\sigma \ll \tau_T$. Динамику системы (2), (3) на временах порядка τ_σ можно интерпретировать как процесс распознавания образов. Рассмотрим этот процесс более подробно.

2. Распознавание образов. Категоризация

Пусть вектор $\sigma = \sigma^0$ выбран в качестве начального условия для уравнения (2); будем считать, что матрица связей имеет вид (4). Покажем, что в процессе релаксации вектор состояния σ^0 перейдет в один из углов N -мерного куба в фазовом пространстве системы с координатами $\pm\sigma_0$. Считая для простоты, что все образы φ^s ($s = 1, \dots, s_0$) взаимно ортогональны:

$$(\varphi^s, \varphi^{s'}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i^s \varphi_i^{s'} = \delta_{ss'},$$

линеаризуем уравнение (2) при $|\sigma_i| \ll \sigma_0$. Полагая $\sigma_i \propto \exp(\Gamma t)$, получим уравнение на собственные значения ($\zeta_i(t) \rightarrow 0$):

$$\Gamma \sigma = \gamma_1 \lambda \sum_{s=1}^{s_0} (\varphi^s, \sigma) \varphi^s \mu^s.$$

Этому уравнению удовлетворяют, в частности, векторы $\sigma^s = \varphi^s$, имеющие собственные значения (инкременты) $\Gamma_s = \gamma_1 \lambda \mu^s N >$

> 0 . Таким образом, особая точка уравнения (2) $\sigma_i = 0$ ($i = 1, \dots, N$) является неустойчивой, вектор состояния с течением времени будет удаляться от нее и перейдет в область, где существенно нелинейное слагаемое уравнения (2), т. е. $|\sigma_i| = \pm\sigma_0$. Конечное состояние переменной σ определяется, по существу, видом силы взаимодействия, испытываемой i -м нейроном со стороны остальных, — молекулярным полем $\sum_j T_{ij}\sigma_j$, где $\sigma_i = \pm\sigma_0$ (далее полагаем $\sigma_0 \equiv 1$). Устойчивое состояние системы удовлетворяет условию минимума энергии (1), причем вектор состояния σ находится теперь в одной из вершин N -мерного куба. Таким образом, динамическая система (2) в процессе эволюции осуществляет категоризацию [14, 15]: каждый начальный вектор — стимул — сопоставляется с определенным вектором, принадлежащим к дискретному набору устойчивых состояний системы.

Пусть сначала $s_0 = 1$, т. е. в матрице T записан всего один образ φ^1 . Скалярное произведение произвольного вектора σ и φ^1 дается выражением

$$(\varphi^1, \sigma) = N - 2m, \quad (5)$$

где m — хеммингово расстояние между векторами φ^1 и σ , равное числу элементов, отличающих эти векторы. Подставляя (4), (5) в (1), получим

$$E = -1/2\lambda\mu^1 (N - 2m)^2. \quad (6)$$

Из этого выражения видно, что минимум E достигается, когда $m = 0$, т. е. вектор σ совпадает с образом, либо $m = N$, когда σ совпадает с негативом образа φ^1 : $\sigma = -\varphi^1$.

Таким образом, эволюция любого начального состояния системы при равной нулю температуре термостата $T_{эф}$ заканчивается в состояниях $\sigma = \pm\varphi^1$. Это простейший из возможных типов категоризации.

В случае $s_0 = 2$ скалярные произведения, входящие в (1), удобно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\varphi^1, \sigma) &= N_1 - 2m_1 + N_2 - 2m_2, \\ (\varphi^2, \sigma) &= N_1 - 2m_1 - N_2 + 2m_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь N_1 — число позиций, в которых $\varphi_i^1 = \varphi_i^2$; N_2 — число позиций, в которых $\varphi_i^1 = -\varphi_i^2$; m_1 и m_2 — число компонент вектора σ соответственно в первой и второй группе нейронов, отличающих σ от φ^1 . С учетом (7) выражение для энергии примет вид

$$E = -1/2\lambda\mu [(N_1 - 2m_1)^2 + (N_2 - 2m_2)^2], \quad (8)$$

где мы для простоты положили $\mu^1 = \mu^2 = \mu$. Из (8) следует, что система имеет четыре устойчивых состояния, соответствующих $m_1 = 0, N_1$; $m_2 = 0, N_2$ и совпадающих с одним из векторов: $\pm\varphi^1, \pm\varphi^2$.

При $s_0 \geq 3$ среди устойчивых состояний системы имеются, вообще говоря, векторы, не совпадающие ни с образами, ни с их

негативами [15, 23]. Покажем, что все устойчивые точки системы находятся в вершинах некоторого n -мерного параллелепипеда, где $n \leq \max(2^{s_0}, N)$, определяемого структурой образов φ^s , $s = 1, \dots, s_0$. Это утверждение легко доказывается методом индукции по s_0 , если заметить, что все скалярные произведения, входящие в (1), можно представить в виде

$$(\varphi^s, \sigma) = \sum_{k=1}^N \varepsilon_k^s (N_k - 2m_k). \quad (9)$$

Для $s_0 = 1$ и $s_0 = 2$ это выражение совпадает соответственно с (5) и (7). При увеличении числа образов s_0 на единицу число различных групп, на которые можно разбить компоненты векторов φ^s , удваивается (если $2^{s_0+1} \leq N$), а величины N_k (число элементов в группе k) и m_k (число отличий σ от φ^1 в k -й группе) уменьшаются. Матрица $\|\varepsilon_k^s(s_0 + 1)\|$, имеющая в общем случае размерность $(1 + s_0) \times 2^{s_0+1}$, может быть построена по $\|\varepsilon_k^s(s_0)\|$:

$$\varepsilon_{2^l-1}^s(s_0 + 1) = \varepsilon_{2^l}^s(s_0 + 1) = \varepsilon_k^s(s_0), \quad 1 \leq s \leq s_0,$$

$$\varepsilon_k^s(s_0 + 1) = (-1)^{l+1}, \quad s = s_0 + 1.$$

Для $s_0 = 1, 2, 3$ имеем

$$s_0 = 1: \quad \|\varepsilon_k^s\| = \|1\|; \quad s_0 = 2: \quad \|\varepsilon_k^s\| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

$$s_0 = 2: \quad \|\varepsilon_k^s\| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix};$$

С помощью выражения (9) выражение для энергии (1) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2} \lambda \sum_{s=1}^{s_0} \mu^s \left[\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^s (N_k - 2m_k) \right]^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \lambda \sum_{l, l=1}^n Q_{kl} (N_k - 2m_k) (N_l - 2m_l), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$Q_{k,l} = \sum_{s=1}^{s_0} \mu^s \varepsilon_k^s \varepsilon_l^s.$$

Отметим, что выражение (11) можно снова привести к хопфилдовскому виду (1), если ввести переменные $\tilde{\sigma}_k = 1 - 2(m_k/N_k)$, $\tilde{T}_{kl} = N_k Q_{kl} N_l$. Из (11) получаем условие устойчивости состояния с данными m_k ($k = 1, \dots, n$):

$$\delta E = \lambda \sum_{l=1}^n Q_{kl} (N_l - 2m_l) \delta m_k \geq 0. \quad (12)$$

Коэффициент при δm_k в этом выражении в общем случае отличен от нуля (за исключением точек типа $m_k = N_k/2$ при четных N_k , в которых достигается максимум E), поэтому величина δE не знакоопределенна. Исключение составляют точки $m_k = 0, N_k$, в которых определен знак δm_k : $\delta m_k > 0$ при $m_k = 0$ и $\delta m_k < 0$ при $m_k = N_k$. Поэтому устойчивыми точками системы могут быть граничные точки $m_k = 0, N_k$ (вершины n -мерного параллелепипеда), удовлетворяющие условиям (12). Так, проверка условий (12) при $s_0 = 3$ показывает, что система может иметь 14 устойчивых состояний; при $N \geq 16$ это число не зависит от N .

Часть устойчивых состояний системы является образами, остальные можно назвать ложными образами [15, 23]. Покажем, что при небольших s_0 состояния с $\sigma = \varphi^s$ ($s = 1, \dots, s_0$) устойчивы [17]. Положим $\sigma^s = \varphi^r + \delta^s$ и рассмотрим вариацию энергии (1) ($\mu^s = 1$):

$$\frac{1}{\lambda} \delta E = -N(\varphi^s, \delta^s) - \sum_{r \neq s} (\varphi^r, \varphi^s) (\varphi^r, \delta^s) - \frac{1}{2} \sum_h (\varphi^r, \delta^s)^2. \quad (13)$$

В случае, когда различные φ^s приближенно ортогональны друг другу, второе слагаемое в (13) мало по сравнению с первым и для вариации δ^s , соответствующей изменению одного из символов ± 1 в образе φ^s на противоположный, первое слагаемое равно $2N$, а третье $-2s_0$. Таким образом, $\delta E > 0$ — образ устойчив — при $s_0 < N$.

При увеличении s_0 минимумы энергии, отвечающие разным φ^s , могут сливаться. Рассмотрим, например, группу образов φ^s ($s = 1, \dots, s_0$), получающихся при небольших искажениях δ^s некоторого вектора φ_0 (при этом группа не содержит самого исходного вектора φ_0): $\varphi_0 + \delta^s$. Покажем, что φ_0 может отвечать минимуму энергии системы.

Действительно, вариация на величину δ вектора φ_0 приводит к изменению энергии, соответствующей этому вектору, на величину ($\lambda = 1$)

$$\begin{aligned} \delta E &= -\frac{1}{2} \sum_s (\varphi_0 + \delta^s, \varphi_0 + \delta)^2 + \frac{1}{2} \sum_s (\varphi_0 + \delta^s, \varphi_0)^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_s [2(N + (\varphi_0 + \delta^s), (\varphi_0 + \delta)) + 2(N + (\varphi_0, \delta^s))(\delta^s, \delta) + \\ &\quad + (\varphi_0, \delta)^2 + (\delta^s, \delta)^2 + 2(\varphi_0, \delta)(\delta^s, \delta)]. \end{aligned} \quad (14)$$

При $2m = -(\varphi_0, \delta^s) \ll N$, $s_0 \gg 1$ и случайном искажении исходного вектора φ_0 при построении группы образов может выполняться неравенство $\delta E > 0$, и, следовательно, исходный вектор отвечает минимуму энергии системы. В психологии [5] образ, аналогичный φ_0 (т. е. являющийся в определенном смысле «средним» некоторого числа образов и остающийся в памяти человека наряду с действительно предъявляемыми образами), получил название прототипа.

Вычислим вероятность того, что при записи в матрицу T s_0 случайных векторов, отличающихся от φ_0 в m позициях, вектор φ_0 будет реализовывать минимум энергии системы. Из (14) получаем, что при $\delta E > 0$

$$x = \frac{1}{s_0} \sum_{s=1}^{s_0} (\delta, \delta^s) \leq 2, \quad N > 2m \quad (15)$$

(предполагается, что $N, m \gg 1$). Распределение вероятности величины x дается функцией

$$f(x) = \left\langle x - \sum_{s=1}^{s_0} x_s \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{-iqx} \prod_{s=1}^{s_0} \langle e^{iqx_s} \rangle, \quad (16)$$

где $x_s = s_0^{-1} (\delta, \delta^s)$, а угловые скобки означают усреднение по векторам δ^s , имеющим в m позициях значения ± 2 , а в остальных позициях — нули. Вычисляя среднее в предположении, что значения $+2$ и -2 встречаются в δ^s равновероятно, и подставляя его в (16), получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-iqx} \left(1 - \frac{m}{N} + \frac{m}{N} \cos \frac{4q}{s_0} \right)^{s_0}.$$

При $s_0 \gg 1$ можно разложить $\cos(4q/s_0)$ в ряд Тейлора и, ограничиваясь первыми двумя членами, получить приближенное выражение:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{Ns_0}{8m} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{Ns_0 x^2}{32m} \right).$$

Вероятность того, что $x \leq 2$, дается интегралом вероятности

$$p(x \leq 2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z du e^{-u^2}, \quad z = \sqrt{\frac{Ns_0}{8m}}.$$

Из этого выражения видно, что вероятность возникновения прототипа тем больше, чем меньше m (при заданном отношении s/N) или чем больше число образов s_0 (при заданном m/N), использованных для его формирования.†

3. Ансамбль нейронов при конечной температуре

При моделировании ансамбля нейронов на ЭВМ конечная температура термостата (которая в динамических уравнениях (2), (3) отражена введением источников шума $\zeta_i(t)$, $\xi_{ij}(t)$) может быть учтена, например, методом Метрополиса и др. [24] (см. также [21, 22], где этот метод был применен для нахождения минимума функционала типа энергии, возникающего в задаче оптимизации электронных схем). Флуктуационная динамика системы описывается в этом случае следующим алгоритмом: если $\sigma_i(k)$ описы-

вает состояние i -го нейрона на k -м шаге по времени, то $\sigma_i(k+1)$ определяется равенствами

$$\sigma_i(k+1) = \begin{cases} \sigma_i(k), & i \neq i_k, \\ \sigma_i(k), & i = i_k, \quad \rho_k > q_k, \\ -\sigma_i(k), & i = i_k, \quad \rho_k \leq q_k, \end{cases} \quad (17)$$

где $q_k = \exp(-\Delta E_k/T_{\text{эф}})$; ΔE_k — изменение энергии системы (1) при изменении состояния i_k -го нейрона; i_k — случайный номер нейрона, выбираемый заново на каждом шаге; ρ_k — случайное число ($0 \leq \rho_k \leq 1$).

При низких температурах динамика системы, описываемая (17), аналогична динамике, описываемой алгоритмом Хопфилда [15], в котором каждое изменение состояния выделенного нейрона (определяемое знаком молекулярного поля, действующего на этот нейрон) сопровождается уменьшением энергии системы. При повышении $T_{\text{эф}}$ возрастает относительная роль процессов, при которых энергия (1) увеличивается. Асимптотически, в пределе больших значений k , состояние системы (17) приближается к термодинамически равновесному (см. [25]), в котором вероятность появления каждой конфигурации определяется распределением Гиббса.

Рассмотрим сначала случай $s_0 = 1$. Свободная энергия системы для заданного вектора состояния σ определяется выражением

$$F = -^{1/2}(N - 2m)^2 - T_{\text{эф}} S(m), \quad (18)$$

где первое слагаемое представляет собой энергию системы (6) ($\lambda\mu^1 = 1$), а $S(m)$ — энтропия состояния с заданным m :

$$S(m) = \ln \frac{N!}{m!(N-m)!} \approx N \left[\left(1 - \frac{m}{N}\right) \ln \frac{N}{N-m} + \frac{m}{N} \ln \frac{N}{m} \right]. \quad (19)$$

При низких температурах свободная энергия (18) имеет два минимума: вблизи $m = 0$ и $m = N$, т. е. в состояниях, близких к образу и к его негативу. Минимизируя (18) при $m \ll N$, $T \ll N$, получаем оценку для среднего значения хеммингова расстояния между вектором состояния ансамбля нейронов и образом:

$$m = N \exp(-2N/T_{\text{эф}}) \ll N.$$

При конечных температурах возможен флуктуационный переход между образом и его негативом. Если $T \ll N$, то такой переход требует преодоления энергетического барьера

$$\Delta F = F(m = N/2) - F(m = 0) = -NT_{\text{эф}} \ln 2 + ^{1/2}N^2, \quad (20)$$

вероятность преодолеть который равна

$$w \approx N \exp(-\Delta F/T_{\text{эф}}) = N2^N \exp(-N^2/2T_{\text{эф}}). \quad (21)$$

Из (21) следует, что при низких температурах вероятность перехода мала, а с повышением $T_{\text{эф}}$, когда величина барьера (20)

уменьшается (и при $T_{эф} = T_{кр} = N/2 \ln 2$ обращается в нуль), быстро возрастает. Ширина интервала температур ΔT вблизи $T_{кр}$, в котором происходит заметное изменение w (т. е. $\Delta F \sim T$), приближенно равна $T_{кр} N^{-1}$ и убывает с ростом числа нейронов в системе.

Отметим, что ситуация, когда один и тот же стимул может восприниматься как два совершенно различных образа, причем с течением времени один устойчивый образ переходит в другой, хорошо известна в психологии как феномен обращения. И довольно давно замечена аналогия между процессом распознавания образов и переходом от неупорядоченного к упорядоченному состоянию ферромагнитных систем [26].

При произвольных s_0 свободная энергия системы дается выражением

$$F = -\frac{1}{2} \lambda \sum_{k,l=1}^u Q_{kl} (N_k - 2m_k) (N_l - 2m_l) - T_{эф} \sum_{k=1}^n \ln \frac{N_k!}{m_k! (N_k - m_k)!}. \quad (22)$$

В частности, при $s_0 = 2$, считая для простоты $\mu^1 = \mu^2 = \mu$, $\lambda\mu = 1$, из (22) получаем

$$F = F(m_1, N_1) + F(m_2, N_2), \quad (23)$$

где каждое из слагаемых в правой части имеет вид (18). Это выражение определяет две характерные температуры, а именно

$$T_{кр1} = N_1 / \ln 2, \quad T_{кр2} = N_2 / \ln 2.$$

Если N_1 и N_2 не близки друг другу (например, $N_2 > N_1$), то при повышении $T_{эф}$ могут происходить два резких изменения в динамических свойствах системы. При $T \leq T_{кр1} \ll T_{кр2}$ ансамбль нейронов находится в состоянии, близком к одному из образов или их негативу, и релаксирует к этим состояниям в процессе распознавания образов. При $T \lesssim T_{кр1}$ возникают случайные блуждания между двумя образами (или между двумя негативами), при этом группа из N_2 компонент вектора состояния близка к совпадающим компонентам образов. Наконец, при $T \lesssim T_{кр2}$ начинаются блуждания между образами и их негативами. Таким образом, при повышении температуры ансамбль нейронов может проходить ряд промежуточных фаз, в которых «расплавлена» определенная часть степеней свободы системы. Подобная ситуация имеет место, например, в жидких кристаллах.

Если $N_2 \gg N_1$, то температуры $T_{кр1}$ и $T_{кр2}$ сильно различаются. Рассмотрим поведение системы в температурном интервале $T_{кр1} \ll T \ll T_{кр2}$. В этом интервале минимумы энергии системы, существовавшие при $T_{эф} \rightarrow 0$ в точках $m_1 = 0$ и $m_1 = N_1$, сливаются в один при $m_1 = N_1/2$. При дальнейшем повышении

температуры (при $T \gg T_{кр2}$) могут слиться минимумы, отвечающие $m_2 = 0, N_2$. Эта закономерность — уменьшение числа минимумов свободной энергии, в первую очередь мелких (обычно отвечающих ложным образам), при повышении $T_{эф}$ — выполняется при произвольных s_0 [17], что следует из представления свободной энергии (22). Аналогичный результат получен (другим способом) в работе [27].

Последовательность слияния различных минимумов при повышении температуры термостата, по-видимому, может быть положена в основу установления иерархии в информации, записанной в образах.

4. Самоорганизация нейронных сетей

Набор устойчивых состояний, к которым релаксирует произвольное начальное состояние ансамбля нейронов, в конечном итоге определяется теми стимулами, которые поступают в систему либо в процессе обучения, рассмотренном выше, либо при распознавании образов, когда матрица связей между нейронами модифицируется в соответствии с уравнением (3) (дообучение). На процесс запоминания новых образов может оказывать существенное влияние информация, уже содержащаяся в матрице T .

Пусть в начальный момент времени матрица связей имеет вид (4). В отсутствие внешнего поля (см. разд. 1) каждый акт распознавания заканчивается достижением одного из устойчивых состояний системы $\varphi^{(l)}$ и матрица T получает приращение $\Delta T_{ij} = \varepsilon \varphi_i^{(k)} \varphi_j^{(h)}$ ($\varepsilon > 0$ — параметр). Поскольку $\varphi^{(k)}$ в общем случае не совпадает с φ^s ($s = 1, \dots, s_0$), то количество образов в (4) может увеличиться при этом на единицу. Однако в отличие от случая, рассмотренного в разд. 2, добавление нового образа $\varphi^{(l)}$ не увеличивает числа групп, на которые разбиваются компоненты векторов, соответствующих образам $\varphi^{(k)}$, φ^s ($s = 1, \dots, s_0$). Поэтому n -мерный параллелепипед, в вершинах которого располагаются устойчивые состояния системы, остается неизменным при преобразовании матрицы T на $(l + 1)$ -м шаге дообучения:

$$T_{ij}^l(l + 1) = T_{ij}(l) + \varepsilon \varphi_i^{(l)}(l) \varphi_j^{(h)}(l), \quad (24)$$

где $\varphi^{(h)}(l)$ — устойчивые состояния системы, отвечающие матрице $T = T(l)$. Условия устойчивости тех или иных вершин при таком преобразовании могут, вообще говоря, изменяться.

При предъявлении других стимулов в уравнении (4) будут появляться векторы, отвечающие различным вершинам параллелепипеда. Предъявляя всевозможные стимулы, в принципе иногда можно достичь такой матрицы связей системы, когда каждое устойчивое состояние системы совпадает с одним из образов φ^s в выражении (4) (память без ложных образов). Примерами такой ситуации являются случаи $s_0 = 1, 2$, рассмотренные выше, если считать, что, кроме φ^s , в (4) содержатся также и негативы $-\varphi^s$.

При произвольных s_0 память без ложных образов может, например, реализоваться, когда все вершины n -мерного параллелепипеда устойчивы. Действительно, считая, что в (4) с одинаковым весом входят векторы $\varphi^{(i)}$, отвечающие всем вершинам параллелепипеда, получаем выражение для энергии:

$$E = -\frac{1}{2} \lambda \sum_{(\pm)} [(N_1 - 2m_1) \pm (N_2 - 2m_2) \pm \dots \dots \pm (N_n - 2m_n)]^2 = -\frac{1}{2} \lambda n \sum_{k=1}^n (N_k - 2m_k)^2. \quad (25)$$

Из (25) видно, что в каждой вершине параллелепипеда, т. е. при $m_k = 0$, N_k , действительно достигается минимум энергии системы.

При конечной температуре термостата динамика ансамбля нейронов с энергией, имеющей вид (25), аналогична рассмотренному выше случаю $s_0 = 2$, с тем, однако, отличием, что теперь увеличивается число стадий плавления образа.

Отметим, что матрица T , для которой выполняется соотношение (25) и отсутствуют ложные образы, в общем случае не может быть получена с помощью одной лишь процедуры дообучения (24), поскольку в начальном состоянии часть вершин параллелепипеда может оказаться неустойчивой и система не может в них находиться сколько-нибудь продолжительное время. По-видимому, достижение состояния памяти без ложных образов облегчается, если наряду с дообучением применять процедуру разобучения [23] или аналогичную ей процедуру «промывания мозгов» [16], в которых на каждом шаге матрица T преобразуется согласно уравнению (24), в котором, однако, знак ε выбирается отрицательным. Интересно, что, возможно, существует определенная аналогия между таким разобучением и процессами, происходящими в нервной системе во время так называемого быстрого сна [28].

Изменение матрицы связей в процессе дообучения существенно зависит от последовательности, в которой предъявляются стимулы. Пусть в T записаны два образа, хеммингово расстояние между которыми равно m , и пусть в качестве начального условия для системы (2), (3) выбираются элементы последовательности векторов, первый член которой совпадает с первым (левым) образом, а последний — со вторым (правым) образом. Как показывают численные эксперименты², при определенных значениях параметра $\varepsilon > 0$ в (24) средние стимулы предъявленной последовательности могут восприниматься либо как искаженный левый, либо как искаженный правый образ в зависимости от порядка, в котором предъявляются стимулы, т. е. имеет место бистабильность распознавания [17].

² Моделирование на ЭВМ проведено А. А. Ежовым и Л. А. Книжниковой.

Область гистерезиса нетрудно определить, рассматривая энергию системы на l -м шаге:

$$E = -\frac{1}{2}\lambda [\mu_1(l)(N_1 + N_2 - 2m)^2 + \mu_2(l)(N_1 - N_2 + 2m)^2]. \quad (26)$$

При этом мы считаем, что предъявленные стимулы отличаются от φ^1 только в тех позициях, в которых $\varphi_i^1 = -\varphi_i^2$. Смена устойчивого состояния, к которому релаксирует стимул при распознавании, происходит при $m = m(l)$, определяемом из условия максимума энергии (26):

$$m(l) = \frac{\mu^1(l)(N_1 + N_2) - \mu^2(l)(N_1 - N_2)}{2[\mu^1(l) + \mu^2(l)]}. \quad (27)$$

Подставляя $\mu^1 = 1 + \varepsilon l$, $\mu^2(l) = 1$ в (27) и полагая $m(l) = l$, определяем номер стимула, при котором происходит смена образа в процессе распознавания с дообучением:

$$l = \frac{1}{4\varepsilon} \{[\varepsilon N - 4]^2 + 16N_2\}^{1/2} + \varepsilon N - 4. \quad (28)$$

Из (28) следует, что при $\varepsilon N \gg 4$ номер $l \approx N$, т. е. область гистерезиса охватывает всю последовательность стимулов, а в противоположном предельном случае ($\varepsilon N \ll 4$) $l = N/2$, т. е. область гистерезиса отсутствует. В первом из этих предельных случаев запоминание системой одного из образов, получившегося в результате распознавания последовательности стимулов, приводит к невозможности получить в качестве устойчивого второй образ. Аналогичное явление в психологии получило название проактивного забывания [5].

Если уменьшать число нейронов в системе N (т. е. увеличивать зернистость), то согласно (28) при $\varepsilon = \text{const}$ область гистерезиса будет уменьшаться. Похожее явление наблюдается при исследовании, например, бистабильности зрительного восприятия [29].

Заключение

Коллективные свойства ансамбля нейронов, описываемые в данной работе с помощью нелинейных уравнений изображающей динамической системы с памятью, имеют ряд интересных особенностей, которые могут быть интерпретированы как обучение, распознавание образов, бистабильность восприятия, феномен обращения, забывание, выработка прототипа. Эти явления аналогичны соответствующим функциям мозга, хорошо известным в психологии [5, 26]. В рассмотренной модели состояние отдельных нейронов описывалось с помощью дискретной переменной, а «память» была реализована как система аттракторов в фазовом пространстве этой системы — вершин N -мерного куба. Однако класс нелинейных динамических систем, в которых могут наблюдаться перечисленные выше явления, существенно шире: к нему относятся как многомерные динамические системы, рассматриваемые в нелиней-

ной механике, обладающие подходящей структурой фазового пространства, так и дискретные системы, подобные клеточным автоматам [30], имеющие, кроме устойчивых стационарных состояний, также циклы различной длины (см., например, [16, 18, 19]).

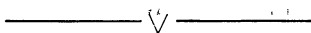
Элементы памяти, по-видимому, могут быть реализованы с помощью более сложных притягивающих множеств — странных аттракторов, обладающих внутренней информационной структурой [20].

Процесс категоризации, модель которого рассмотрена в настоящей работе, является одним из важных элементов деятельности нервной системы. Например, группы нейронов зрительной системы животных формируют несколько стереотипных реакций в ответ на различные типы освещенности сетчатки [1, 3]. Нейробиологическим подтверждением рассматриваемой теории применительно к высшим функциям мозга послужило бы экспериментальное выявление устойчивых «узоров» активности нейронов, возникающих при определенных видах мыслительной деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куффлер С., Николс Дж.* От нейрона к мозгу. М.: Мир, 1979. 439 с.
2. *Эделмен Дж., Маунтклас В.* Разумный мозг. М.: Мир, 1981. 133 с.
3. *Мозг* / Пер. с англ. под ред. П. В. Симонова. М.: Мир, 1982. 279 с.
4. *Козонен Т.* Ассоциативная память. М.: Мир, 1982. 239 с.
5. *Клауки Р.* Память человека: структуры и процессы. М.: Мир, 1978. 319 с.
6. *Parallel models of associative memory* / Ed. G. E. Hinton, J. A. Anderson. N. Y.; L.: Erlbaum, 1981.
7. *McCulloch W. A., Pitts W.* A logical calculus of ideas immanents in nervous activity // *Bull. Math. Biophys.* 1943. Vol. 5. P. 115—133.
8. *Levine D. S.* Neural population modelling and psychology: a review // *Math. Biosci.* 1983. Vol. 66. P. 1.
9. *Прибрам К.* Языки мозга. М.: Прогресс, 1975. 464 с.
10. *Willshaw D.* Holography, associative memory and inductive generalization // *Parallel models of associative memory*. N. Y.; L.: Erlbaum, 1981. P. 83.
11. *Goldman M. V.* Strong turbulence of plasma waves // *Rev. Mod. Phys.* 1984. Vol. 56. P. 709—735.
12. *Little W. A.* The existence of persistent states in the brain // *Math. Biosci.* 1974. Vol. 19. P. 101—120.
13. *Little W. A., Shaw G. L.* A statistical theory of short and long term memory // *Behav. Biol.* 1975. Vol. 14. P. 115—133.
14. *Anderson J. A., Silverstein J. W., Ritz S. A., Jones R. S.* Distinctive features, categorical perception and probability learning: some applications of a neural model // *Psychol. Rev.* 1977. Vol. 84. P. 413—447.
15. *Hopfield J. J.* Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities // *Proc. Nat. Acad. Sci. US.* 1982. Vol. 79. P. 2554—2558.
16. *Clark J. W., Rafelski J., Winston J. W.* Brain without mind: computer simulation of neural network with modifiable neuronal interactions // *Phys. Rep.* 1985. Vol. 123. P. 215—273.
17. *Веденов А. А., Левченко Е. Б.* Об одном классе нелинейных систем с памятью // *Письма в ЖЭТФ.* 1985. Т. 41. С. 328—331.
18. *Huberman B. A., Hogg T.* Adaptation and self-repair in parallel computing structures // *Phys. Rev. Lett.* 1984. Vol. 52. P. 1048—1051.
19. *Huberman B. A., Hogg T.* Understanding biological computation: reliable

- learning and recognition // Proc. Nat. Acad. Sci. US. 1984. Vol. 81. P. 6871—6875.
20. Tsuda I. A hermeneutic process of the brain // Progr. Theor. Phys. Suppl. 1984. Vol. 79. P. 241.
 21. Kirkpatrick S., Gellat C. D., Vecchi M. P. Optimization by simulated annealing // Science, 1983. Vol. 220. P. 671.
 22. Siarry P., Dreyfus G. An application of physical methods to the computer aided design of electronic circuits // J. phys. Lett. (France). 1984. Vol. 45. P. L-39.
 23. Hopfield J. J., Feinstein D. J., Palmer R. G. «Unlearning» has a stabilizing effect in collective memories // Nature. 1983. Vol. 304. P. 158—159.
 24. Metropolis M., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M. N., Teller A. H. Equation of state calculations by fast computing machines // J. Chem. Phys. 1953. Vol. 21. P. 1078—1092.
 25. Peretto P. Collective properties of neural networks: a statistical physics approach // Biol. Cybern. 1984. Vol. 5. P. 51—62.
 26. Сентагомату Я., Арбуш М. Концептуальные модели нервной системы. М.: Мир, 1976. 198 с.
 27. Amit D. J., Gutfreund H., Sompolinsky H. Spin-glass models of neural networks // Phys. Rev. A. 1985. Vol. 32. P. 1007—1018.
 28. Crick F. C., Mitchison G. The function of dream sleep // Nature. 1983. Vol. 304. P. 111—114.
 29. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.
 30. Wolfram S. Statistical mechanics of cellular automata // Rev. Mod. Phys. 1983. Vol. 55. P. 601.



УДК 551.46 : 534.2

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ И САМООРГАНИЗАЦИЯ В НЕУСТОЙЧИВЫХ ТЕЧЕНИЯХ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ МЕЛКОЙ ВОДЕ

М. В. НЕЗЛИН, Е. Н. СНЕЖКИН

Введение

В данной статье рассматриваются результаты лабораторных опытов, полученные в ранее экспериментально не исследованной области геофизической и астрофизической гидродинамики. Ее отличительной особенностью является сочетание в той или иной комбинации следующих условий эксперимента.

I. Опыты проводятся на мелкой воде ($H < L$, H — невозмущенная толщина слоя жидкости, L — горизонтальные размеры рассматриваемых структур).

II. Слой мелкой воды имеет свободную поверхность.

III. Слой мелкой воды вращается в режиме Россби, т. е. число Россби—Кибеля

$$Ro \equiv \omega/f \ll 1, \quad (1)$$

где $f = 2\Omega_0 \cos \alpha$ — параметр Кориолиса; α — полярный угол между нормалью к невозмущенной поверхности жидкости в данной точке и вектором угловой скорости системы Ω_0 ; ω — характерная угловая частота локальных вихревых движений во вращающейся жидкости (частота волн Россби).

IV. Размеры L изучаемых вихрей превышают характерный масштаб дисперсии волн r_R — радиус Россби—Обухова:

$$L \gg r_R = (g^*H)^{1/2}/f, \quad (2)$$

где g^* — ускорение равнодействующей силы тяжести и центробежной силы.

V. Число Рейнольдса сравнительно велико:

$$Re \equiv \omega LH/\nu \simeq 10^3, \quad (3)$$

где ν — кинематическая вязкость жидкости; большая величина Re способствует сохранению двумерного характера движения в рассматриваемых структурах в соответствии с известной теоремой Тейлора—Праудмена [1, 2].

VI. Наличие β -эффекта, т. е. существование зависимости параметра Кориолиса или эффективной толщины H слоя жидкости от меридиональной координаты y , измеряемой в направлении «на север» от некоторой рабочей точки (величина H измеряется по нормали к невозмущенной поверхности жидкости):

$$\beta = \frac{g^*}{r_R^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{H}{f} \right) = \frac{f^2}{H} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{H}{f} \right) \neq 0, \quad (4)$$

где $\partial/\partial y = \partial/R_y \partial \alpha$ и R_y — радиус меридиональной кривизны невозмущенной поверхности жидкости в данной точке¹.

VII. Скалярная или векторная нелинейность (соответственно изменению знаменателя или числителя в выражении для потенциального вихря $(\text{rot } \mathbf{v} + \mathbf{\Omega})_z/H$ (ось z направлена по нормали к невозмущенной поверхности жидкости)).

VIII. Дифференциальное вращение — скачок угловой скорости между быстро вращающейся центральной частью (серединой) жидкости и относительно медленно вращающейся (в частности, неподвижной) периферией; этот скачок может иметь характер «тангенциального разрыва», и тогда его неустойчивость (ниже называемая центробежной) имеет инкремент

$$\gamma \simeq k\Delta u, \quad (5)$$

где Δu — скачок линейной скорости на разрыве; k — характерное волновое число. Если же скачок скорости сравнительно плавный,

¹ Формула (4), как показал анализ, проведенный А. В. Хуторецким и Г. Г. Сутыриным, является более точной, чем приведенная в [3], где в отличие от (4) величина g^* стоит под знаком дифференцирования. Как будет видно из дальнейшего, формула (4) дает лучшее согласие эксперимента [3, 4] с теорией.

то инкремент неустойчивости значительно меньше:

$$\gamma \ll k\Delta u. \quad (6)$$

IX. Существенная двумерная сжимаемость мелкой воды со свободной поверхностью, позволяющая при сравнительно малых амплитудах скачка достигать больших значений эквивалентного числа Маха

$$Ma = \Delta u / (g^*H)^{1/2}.$$

В зависимости от того, какие из перечисленных условий комбинируются, в экспериментах наблюдаются различные нелинейные структуры, которые можно разделить на два класса. К одному из них относятся вихри (солитоны) Россби различных разновидностей в зависимости от типа тех нелинейностей, которые определяют формирование вихрей [3—8]. Ко второму классу структур относятся спиральные волны поверхностной плотности [9, 10] (см. также [11—13]), в которых возвышения и понижения поверхности несжимаемой жидкости аналогичны сгущениям и разрежениям газа в двумерной газодинамической среде.

Указанные структуры проявляют себя в ряде нелинейных эффектов, основные из которых состоят в следующем. Во-первых, это сам факт формирования солитонов Россби. Во-вторых, это ярко выраженная циклон-антициклонная асимметрия (циклоны сравнительно быстро диспергируют, а антициклоны являются солитонами и живут сравнительно долго) [3—8]. В-третьих, это самоорганизация солитонов Россби в неустойчивых встречных геострофических течениях, в результате которой формируется, в частности, стационарный автосолитон Россби, моделирующий глобальные вихри в атмосферах планет [8]. В-четвертых, это реализация сильно нелинейных волн на мелкой воде, моделирующих соответствующие газодинамические волны благодаря существованию такого интересного явления, как аналогия между мелкой водой (имеющей свободную поверхность) и двумерной газодинамической средой с заменой

$$c_s \rightarrow (g^*H)^{1/2}, \quad (7)$$

где c_s — скорость звука в газе [14].

Одним из примеров таких волн являются спиральные волны, формируемые, в частности, в режиме центробежной неустойчивости течений со скачком скорости при достаточно большом числе Маха ($Ma \gg 1$). По мере увеличения числа Маха происходят скачкообразные переходы ко все более низким азимутальным модам неустойчивости, вплоть до $m = 0$ (m — номер моды), причем эти переходы обнаруживают ярко выраженный гистерезис. Эти волны моделируют гидродинамический механизм генерации спиральной структуры галактик [9—13].

В-пятых, это качественно одна и та же картина смены мод центробежной неустойчивости как при формировании спиральных волн, так и при генерации автосолитона Россби, свидетельствующую

щая об общности механизмов возникновения и существования указанных атмосферных и галактических структур [8—10].

Сформулируем также требования, которым с необходимостью должны удовлетворять и удовлетворяют параметры рассматриваемых ниже экспериментальных установок, сконструированных с целью исследования солитонов Россби так, чтобы интерпретация получаемых экспериментальных данных на основе существующих теорий нелинейных вихревых (солитонных) структур могла быть достаточно определенной и однозначной.

Первое необходимое требование состоит в том, что время жизни τ наблюдаемых вихрей Россби должно быть существенно больше минимального характерного времени τ_{\min} дисперсионного расщепления линейного пакета волн Россби:

$$\tau > \tau_{\min}, \quad (8)$$

где согласно [15]

$$\tau_{\min} \simeq 8r_R/V_R \quad (9)$$

(этот минимум реализуется при радиусе вихря, близком к радиусу r_R), $V_R = \beta r_R^2$ — скорость Россби. Только при условиях (8), (9) наблюдаемые вихри можно будет называть долгоживущими; в противном случае они не могут быть отличимы от нестационарных структур, находящихся в состоянии дисперсионного распада.

Второе требование состоит в том, что число N оборотов вокруг своей оси, которое успевает совершить наблюдаемый вихрь за время жизни, должно удовлетворять условию

$$N \gg 1. \quad (10)$$

Третье требование является одним из тех, которые связаны с так называемым приближением β -плоскости [2], на основе которого построены известные теории вихрей (солитонов) Россби, и в частности теория [16, 17]. Это требование гласит:

$$\operatorname{tg} \alpha \gg L/R_y \quad (11)$$

(и, конечно, $L/R_y \ll 1$). В случае планеты или ее модели условия (11) и (1) означают, что упомянутые теории справедливы вне областей, примыкающих к полюсам и экватору, т. е. в средних широтах. Мы вернемся к условиям (8)—(11) при описании экспериментальных установок и полученных результатов.

Перейдем теперь к рассмотрению вихревых и спиральных структур, наблюдаемых в эксперименте.

1. Вихри Россби в отсутствие течений

Эти структуры возникают вследствие сочетания перечисленных выше условий эксперимента I—VII. В зависимости от того, какая нелинейность определяет их формирование — векторная [16] или скалярная [18—20], могут существовать соответственно «век-

торные» или «скалярные» вихри Россби. Мы рассмотрим эти структуры в том хронологическом порядке, в котором они были обнаружены в лабораторных опытах.

«Скалярные» вихри Россби. Эти структуры наблюдаются при выполнении условий I—VI и при преобладании скалярной нелинейности. В экспериментах [3—5] впервые были созданы солитоны Россби в мелкой жидкости, имеющей постоянную толщину по всей невозмущенной свободной поверхности и вращающейся как целое (без течений). Начало этих экспериментов стимулировало сообщение [19] о возможности наблюдения солитонов Россби в слое жидкости, вращающемся вместе с сосудом параболоидальной формы. Эксперименты были выполнены в сосудах с приблизительно параболоидальным профилем дна, в которых толщина слоя жидкости либо была постоянна (при номинальной скорости вращения), либо имела градиент, направленный к периферии — при более быстром вращении или к центру — при более медленном вращении. Геометрия этих «параболоидов» была выбрана так, чтобы удовлетворялись необходимые условия (8)—(11). С этой целью параболоиды были сделаны достаточно крутыми.

В опытах [3—5] было показано, что солитон Россби — это антициклонический вихрь, у которого направления вращения вокруг собственной оси и дрейфа относительно жидкости противоположны направлению вращения системы как целого. Солитон Россби является уединенным вихрем (т. е. сильно нелинейной уединенной волной) на ветви волн Россби с дисперсией

$$\omega = - \frac{k_x \beta}{k_x^2 + k_y^2 + 1/r_R^2}, \quad (12)$$

где k_x и k_y — волновые числа, отвечающие направлениям вдоль параллели и меридиана (ось x направлена на восток). Максимальная скорость волн этой ветви (скорость Россби) в сосуде параболоидальной формы при постоянной толщине H_0 слоя жидкости согласно (12) и (4) равна

$$V_R = 1/2 H_0 \Omega_0 \sin \alpha. \quad (13)$$

Если же толщина H слоя жидкости не постоянна вдоль ее поверхности, то

$$V_R = H_0 \Omega_0 \sin \alpha (1/2 + C \partial H / \partial y), \quad (14)$$

где C — геометрический коэффициент [3].

Соотношения (13), (14) позволяют увидеть простой физический смысл приближения β -плоскости (11). Оно (аналогично дрейфовому приближению в теории плазмы) означает, что изменение V_R на меридиональном размере структуры (вихря) мало по сравнению с самой величиной V_R , а именно

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} V_R \right) L \equiv \frac{L}{R_y} \frac{\partial V_R}{\partial \alpha} \ll V_R,$$

откуда с учетом (13), (14) непосредственно следует (11).

Обнаруженный в [3—5] солитон Россби дрейфует со скоростью $V_{др} \approx 0,8V_R$, близкой к скорости Россби (13), (14), и имеет размер (диаметр $2a$), в несколько раз больший, чем радиус r_R . Указанная скорость дрейфа вихря несколько меньше теоретической (которая должна несколько превышать V_R); это отличие может рассматриваться как небольшой аппаратурный эффект. Внутри вихря существует четкая область захваченных частиц. Это является следствием того, что максимальная линейная скорость вращения v на (приблизительно гауссовском, т. е. солитонном) профиле вихря

$$v > V_{др}; \quad (15)$$

при этом дрейфующий вихрь эффективно переносит содержащиеся в нем частицы. В тех же опытах было показано, что скорость дрейфа вихря на запад увеличивается при наличии градиента глубины жидкости, направленного к периферии, и уменьшается, если толщина слоя H растет к центру. В последнем случае при достаточно большой абсолютной величине градиента H вихрь дрейфует «на восток». Все эти результаты хорошо соответствуют закону дисперсии (12)—(14) волн Россби.

Описанный вихрь существует в режиме Россби (1), в котором реализуется геострофическое равновесие (характерное для атмосфер планет):

$$fv \simeq g^* \Delta H/a, \quad (16)$$

где a — радиус вихря; ΔH — его возвышение над уровнем поверхности окружающей жидкости. В условиях рассматриваемых опытов время жизни солитона Россби оказывается ограниченным в основном вязкостью. Характерное время вязкостного затухания вихря Россби заключено между двумя оценками. Одна из них дает

$$\tau_{вяз} \simeq H_0^2/\nu, \quad (17)$$

т. е. для условий опытов [3—5] $\tau_{вяз} \simeq 20$ с, что совпадает с наблюдаемым в этих условиях временем жизни рассматриваемого антициклона Россби. Другая оценка дает

$$\tau_{вяз} \simeq cH_0/(\nu\Omega_0)^{1/2}, \quad (18)$$

где численный коэффициент c имеет порядок нескольких единиц и существенно возрастает с увеличением отношения размера вихря к радиусу r_R [1, рис. 4.12.1].

В [3—5] было также показано, что за указанное время жизни изучаемый вихрь успевает пройти путь, равный приблизительно десяти собственным диаметрам (без намеков на какое-либо дисперсионное расплывание), и совершить около десяти оборотов вокруг собственной оси. Размер описываемого вихря ($2a \gtrsim 2r_R$) соответствовал минимуму (9) дисперсионного времени: для рассматриваемых условий $\tau_{min} \simeq 8$ с, что существенно меньше того времени (20 с), в течение которого наблюдаемый антициклон сохраняет свою форму неизменной, т. е. распространяется как уединенная волна. Видно, что этот вихрь удовлетворяет критериям

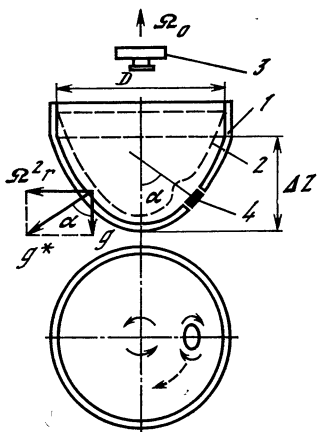
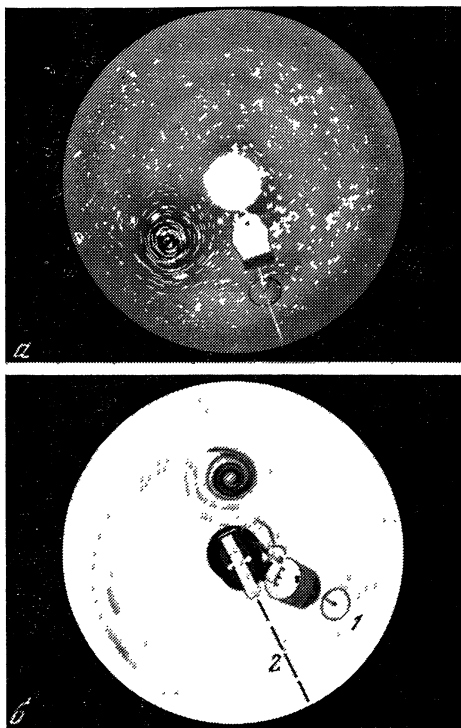


Рис. 1. Принципиальная схема установок для наблюдения солитонов Россби

1 — сосуд, 2 — поверхность воды, 3 — фотоаппарат (или кинокамера), 4 — диск накачки

Рис. 2. Антициклонический солитон Россби в различных условиях опыта (малый параболоид, диаметр диска накачки 3 см)



(8), (10) и по совокупности перечисленных свойств может рассматриваться как одиночный (монопольный) солитон Россби [3—5], формирование которого определяется скалярной нелинейностью [18—20].

В тех же опытах [3—5] было показано, что циклонические вихри Россби в отличие от описанных антициклонов сравнительно быстро диспергируют: у них дисперсия не уравнивается скалярной нелинейностью. Эта циклон-антициклонная асимметрия является важнейшим нелинейным свойством вихрей Россби, с ее другими проявлениями мы неоднократно встретимся ниже.

Иллюстрацией к данному разделу являются рис. 1, 2. На рис. 1 приведена схема экспериментальных установок для наблюдения монопольных и дипольных солитонов Россби [3—5] в слое мелкой воды во вращающемся против часовой стрелки сосуде с профилем дна, близким к параболическому. Параметры этих установок: у малого параболоида диаметр $D = 28$ см, высота $\Delta Z = 12$ см, период вращения $T_0 = 2\pi/\Omega_0 = 579$ мс, у большого параболоида $D = 70$ см, $\Delta Z = 35$ см, $T_0 = 840$ мс. Солитоны возбуждаются диском накачки, который вращается в течение импульса длительностью в несколько секунд. Расстояние диска накачки от оси вращения в обоих случаях $r_0 = R_0/\sqrt{2}$, где $R_0 = D/2$ — радиус параболоида. Визуализация движений жидкости осуществляется

белыми частицами, плавающими на поверхности зеленой жидкости (раствор серноокислого никеля в воде), или капельками красителя, вводимыми в вихрь, а также по контрасту изображения в красных лучах, проходящих сквозь раствор и отражающихся от белого дна сосуда. Съемка производится фотоаппаратом, вращающимся вместе с сосудом.

На рис. 2, *а* приведен снимок антициклонического солитона Россби, сделанный через 2—3 с после выключения диска накачки (белые детали — привод диска). Вихрь дрейфует по часовой стрелке, против вращения сосуда [3—5]. На рис. 2, *б* иллюстрируется дрейф антициклонического солитона Россби с захваченными им частицами жидкости. Вихрь формируется в чистой воде вблизи диска накачки 1 и подкрашивается в положении 2 капельками жидкого красителя, которые вводятся сверху с помощью катапульты. Дрейф вихря происходит также против направления вращения сосуда (по часовой стрелке). Снимок сделан примерно через 20 с после формирования вихря.

«Векторные» вихри Россби. Согласно теоретической работе [16] при сочетании условий I—VI и преобладании векторной нелинейности может существовать дипольный солитон Россби в виде симметричной пары вихрей циклон—антициклон, имеющей экспоненциально спадающий (солитонный) профиль скорости (в отличие от парного вихря, описанного в книгах [21, 22], профиль которого на периферии имеет вид $\sim r^{-2}$). Уединенность рассматриваемого вихря обусловлена сочетанием дисперсии (β -эффект) и нелинейности. Для дипольного солитона Россби существуют два «разрешенных» диапазона скорости дрейфа: при постоянной толщине слоя жидкости дрейф на запад происходит со скоростью

$$|V_{др}| \geq V_R, \quad (19)$$

дрейф на восток — с любой скоростью

$$V_{др} > 0. \quad (20)$$

Эти соотношения являются условиями стационарности парного вихря: только при их выполнении его скорость будет лежать вне диапазона возможных скоростей линейных волн Россби (см. (12)—(14)) — в противном случае вихрь диссипировал бы вследствие черенковского излучения волн Россби.

Следующее важное свойство дипольного солитона Россби состоит в том, что у каждого из составляющих его вихрей имеется (центральная) область захвата частиц жидкости. Такая структура согласно условию захвата (15) возможна только при достаточно большой амплитуде ΔH . Например, в солитоне, дрейфующем на запад, возвышение антициклона согласно (15), (16)

$$\Delta H \geq af_0 V_{др} / g^*.$$

Видно, что амплитуда пары, дрейфующей на восток, согласно (19), (20) может быть значительно меньше амплитуды пары, дрейфующей на запад.

Принципиально важно, что, как следует из теории [16—20], векторная нелинейность, формирующая дипольный солитон, преобладает над скалярной нелинейностью, формирующей монополярный солитон, рассмотренный в предыдущем разделе, только при достаточно малых размерах вихря:

$$a < r_R, \quad (21)$$

Если же выполняется обратное соотношение:

$$a > r_R, \quad (22)$$

то формирование дипольного вихря Россби и его свойства могут существенно определяться скалярной нелинейностью².

Эксперименты по созданию дипольных вихрей и их исследованию были проведены на большом параболоиде (см. рис. 1). Эти опыты, подробное описание методики которых содержится в работе [3], привели к созданию дипольных вихрей Россби, обладающих следующими свойствами: 1) вихри имеют размер (расстояние между центрами циклона и антициклона) $a \lesssim (1,5 \div 2) r_R$; 2) вихри дрейфуют на запад (по часовой стрелке) со скоростью V_W , существенно большей, чем скорость Россби: $V_W \approx 1,5 V_R$; 3) дипольные вихри дрейфуют также и на восток (против часовой стрелки) со скоростью V_E , существенно меньшей, чем на запад: в среднем $V_E \approx 0,7 V_R$ (здесь всюду имеется в виду случай отсутствия меридионального градиента толщины H_0 слоя жидкости)³; 4) амплитуда вихрей, дрейфующих на запад, значительно больше амплитуды вихрей, дрейфующих на восток (это связано со спецификой способа создания вихрей); 5) в вихрях четко видны области захвата частиц; в диполях, дрейфующих на запад, внутренним (ближе к оси системы) вихрем является антициклон, а в вихрях, дрейфующих на восток, — циклон. Все эти свойства наблюдаемых дипольных вихрей, иллюстрируемые рис. 3—5, вполне соответствуют свойствам дипольных солитонов Россби, предсказываемым рассмотренной выше теорией [16].

Вместе с тем из обсуждаемых экспериментов следует, что если глубина жидкости недостаточно велика (например, если $H \lesssim 3$ см), то наблюдаемые дипольные вихри не являются солитонами. Это следует прежде всего из того факта, что и в парных вихрях весьма четко проявляется описанная выше циклон-антициклонная асимметрия, свойственная вихрям монополярным. Она выражается в том, что в вихревой паре циклон сравнительно быстро диспергирует, а антициклон после этого существует еще довольно долго (см. рис. 3). Этот эффект вполне соответствует экспериментальным данным, рассмотренным выше, а также теории для режима (22),

² Точнее, вместо размера a в подобные соотношения входит характерный размер горизонтального градиента скорости вихря.

³ Из указанных свойств видно, что поведение дипольных вихрей принципиально определяется β -эффектом.

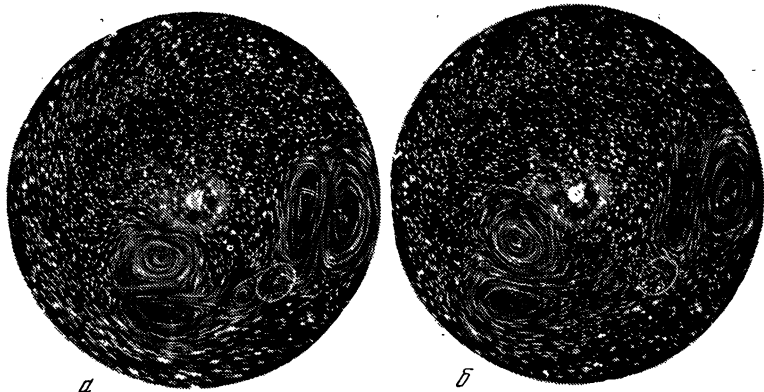


Рис. 3. Возбуждение и эволюция двух дипольных вихрей Россби

Большой параболоид, период вращения сосуда $T = 840$ мс, $H_0 = 1$ см. *a* — диск накачки диаметром 10 см, вращавшийся в течение 5 с, создал протяженное циклоническое возмущение, которое распалось на два циклона (темные области на снимке), рядом с которыми образовались антициклоны; *б, в* — в дрейфующем на «запад» (по часовой стрелке) диполе внешний вихрь (циклон) распадается и «выживает» антициклонический солитон (промежутки между кадрами *a* и *б* — 4с, *б* и *в* — 5с)

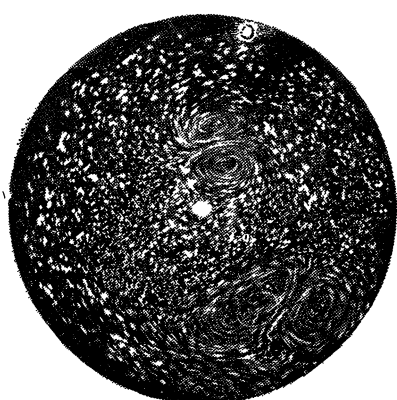
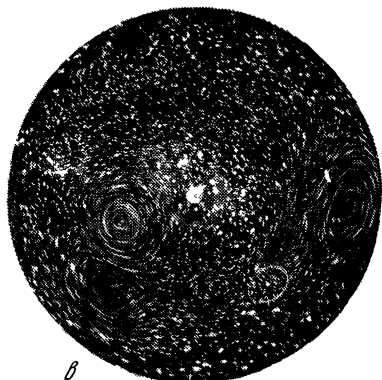


Рис. 4. Иллюстрация более быстрого движения дипольной пары вихрей дрейфующей на запад

$H_0 = 2,5$ см, период вращения сосуда $T = 840$ мс

Рис. 5. Долгоживущий дипольный вихрь Россби, дрейфующий на восток
Большой параболоид, глубина жидкости в центре сосуда 4 см

который имел место в описываемых опытах; он, очевидно, обусловлен влиянием скалярной нелинейности. Эта нелинейность в данном случае выражается не столь «катастрофично», как в случае монополюсных вихрей в [3—5], что связано с большей глубиной жидкости в рассматриваемой установке большего размера. Нетрудно также видеть, что дипольные вихри типа показанных на рис. 3 не удовлетворяют необходимым критериям (8)—(10). Таким образом, они (при указанных условиях) не являются солитонами.

Положение, однако, радикально меняется при дальнейшем увеличении глубины жидкости — до 4 см и несколько более. При этом, как показывает рис. 5, время жизни дипольной пары значительно возрастает и, что принципиально важно, исчезает циклон-антициклонная асимметрия: уже не наблюдается явно преждевременного распада циклона, который при меньших глубинах жидкости ограничивал время существования парного вихря.

Количественные характеристики вихрей, показанных на рис. 5, таковы: максимальная на профиле линейная скорость вращения частиц вокруг оси вихря около 10 см/с (в среднем за время жизни), она примерно в 7 раз больше скорости дрейфа пары; размер вихря $2a = (1,2 \div 1,3) r_R$; скорость Россби при заданном периоде вращения параболоида 840 мс около 3 см/с; радиус $r_R \simeq 9$ см, т. е. минимальное дисперсионное время (9) примерно 24 с; время жизни вихревой пары τ около 15—16 с, т. е. все еще меньше времени дисперсии⁴. Чтобы рассматриваемые вихри могли считаться солитонами, необходимо увеличить их время жизни еще в 2—3 раза.

На дополнительную возможную причину ограничения τ , связанную с непостоянством скорости дрейфа на размере вихря, указывается в теоретических работах [20, 23]. Этот вопрос еще требует дополнительного экспериментального изучения.

Таким образом, приведенные здесь результаты позволяют сделать вывод, что описанные парные вихри по характеристикам распространения похожи на дипольные солитоны Россби [16, 17], формируемые векторной нелинейностью, хотя и живут недостаточно долго, чтобы называться солитонами. Ясно, что если дипольные солитоны [16, 17] существуют (а это после описанных опытов представляется весьма вероятным), то они могут наблюдаться лишь в тех условиях, в которых помехи их формированию со стороны скалярной нелинейности минимальны. Однако уверенный ответ на этот вопрос требует дополнительного экспериментального исследования.

В заключение данного раздела укажем на опыты [24] с парными вихрями на «глубокой воде» без существенного β -эффекта. В отличие от описанных опытов в [24] не выполнялись также условия I и IV.

⁴ В условиях рис. 5 существовал градиент глубины жидкости, направленный к центру сосуда, поэтому скорость Россби (в согласии с (14)) была меньше, а дисперсионное время (9) больше, чем при $H_0 = \text{const}$.

2. Цепочки солитонов Россби в неустойчивых геострофических течениях

Эти структуры формируются при сочетании условий I—VI и при преобладании скалярной нелинейности. Экспериментальное исследование их проведено в работах [4, 6—8]. В них применялись установки типа изображенной на рис. 6, основой которых служил параболоид, описанный выше. Отличие состояло в том, что теперь отдельные участки дна сосуда могли вращаться дифференциально, создавая тем самым встречные течения жидкости во вращающемся параболоидальном слое. Опыты показали, что созданные таким образом встречные течения, начиная с некоторой скорости, проявляют неустойчивость по отношению к генерации вихрей с размерами, превышающими радиус Россби—Обухова.

Примеры таких вихрей приведены на рис. 7, 8. Эти вихри получены при принципиально различных профилях скорости течений: в случае рис. 7 профиль плавный, его характерный размер

$$\delta > r_R, \quad (23)$$

а в случае рис. 8 профиль течений имеет характер «тангенциального разрыва» скорости,

$$\delta < r_R. \quad (24)$$

Опыты показали, что в зависимости от того, какой режим реализуется — (23) или (24), — характер циклогенеза принципиально меняется. А именно, в режиме (23) крупные вихри ($2a \gtrsim 2r_R$) генерируются только в виде антициклонов (и создаются течениями с антициклоническим ротором скорости), генерации же крупных циклонов (течениями с циклоническим ротором скорости) не происходит. Иными словами, имеет место ярко выраженная циклон-антициклонная асимметрия, которая неоднократно упоминалась выше.

В [4, 6—8] показано, что антициклоны, демонстрируемые рис. 7, могут рассматриваться как солитоны Россби. Отсутствие крупных циклонов в условиях (23) объясняется следующим образом. Как было показано выше, циклонические вихри Россби сравнительно быстро распадаются (диспергируют). Для того чтобы они могли существовать стационарно, необходимо, чтобы инкремент их накачки течениями γ был больше декремента распада d . Самый большой инкремент неустойчивости встречных течений соответствует условию (5), которое физически близко режиму (24). При этом

$$\gamma \simeq ku \simeq u/a; \quad (25)$$

с увеличением же ширины профиля скорости δ в соответствии с (6) инкремент падает [25, 26]:

$$\gamma \ll u/a. \quad (26)$$

В последнем случае этого инкремента может «не хватить», и, как показывает опыт, действительно не хватает для компенсации дис-

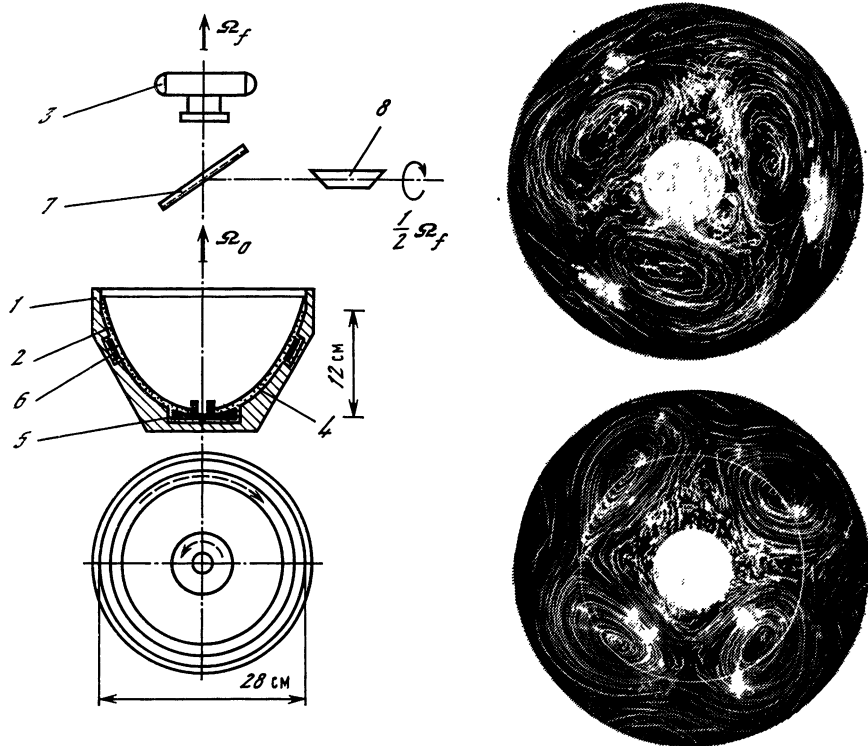


Рис. 6. Схема опыта, в котором был получен автосолитон Россби

Малый параболид. 1—3 — то же, что на рис. 1, 4 — участок (толстого) дна параболида, ширина которого регулировалась от 1 мм (в опытах с тангенциальным «разрывом» скорости течений) до 11 см (в опытах с автосолитоном), 5 — участок дна параболида, вращающийся быстрее сосуда, 6 — участок дна параболида, вращающийся медленнее сосуда, 7 — полупрозрачное зеркало, 8 — ротоскоп — вращающаяся призма Дове, позволяющая вести наблюдения во вращающейся системе отсчета

Рис. 7. Цепочка антициклонов Россби [4, 7]

Ширина участка 4 (см. рис. 6) составляет 3 см

Рис. 8. Картина течений жидкости при резком профиле скорости встречных течений циклонического направления [6]

Ширина участка 4 (см. рис. 6) составляет 1 мм — «тангенциальный разрыв» скорости; белая окружность — линия разрыва скорости в течениях

персионного распада циклонов. Именно этим, на наш взгляд, и объясняется циклон-антициклонная асимметрия циклогенеза в режиме (23).

С переходом в режим (24) эта асимметрия исчезает и наблюдается генерация стационарных крупномасштабных циклонических структур (см. рис. 8), которые «ничем не хуже» антициклонических структур типа изображенных на рис. 7. В этом режиме

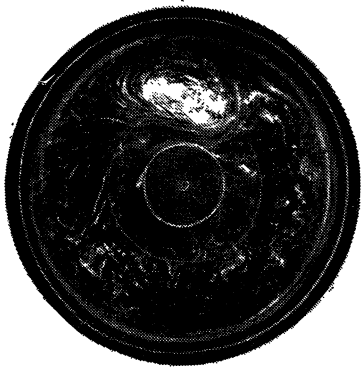


Рис. 9. Автосолитон Россби [8]

Малый параболоид; ротор течений — антициклонический; фотоаппарат вращается вместе с вихрем (а не вместе с сосудом, как ранее)

«тангенциального разрыва» специфика наших опытов в принципе исчезает (см., впрочем, разд. 4), и (при небольших значениях числа Маха) условия генерации вихрей в наших опытах близки к условиям совсем других опытов, в которых либо вообще исключено

влияние сил инерции [27] (и которые поэтому не имеют отношения к режиму Россби), либо почти отсутствует дисперсия, а также не выполняется условие IV [28, 29]. Некоторые аспекты рассмотренных выше вопросов обсуждаются также в теоретических работах [20, 30, 31] (солитоны Россби в течениях) и [32] (цепочки солитонов в отсутствие течений).

3. Автосолитон Россби

Для генерации этой структуры также требуется выполнение условий I—VI и преобладание скалярной нелинейности. Еще в опытах [4, 7] было обнаружено, что с увеличением скорости встречных течений наблюдается вполне определенное чередование мод неустойчивости: номер азимутальной моды (число вихрей в цепочке по периметру системы) уменьшается. Дальнейшие опыты [8] показали, что в режиме (23) можно подобрать такую геометрию эксперимента с встречными течениями (достаточно удаленными одно от другого), когда при достаточно большом скачке скорости генерируется первая мода неустойчивости. Она представляет собой локализованный антициклонический вихрь, единственный на всем периметре системы и стационарный во времени. Этот вихрь (рис. 9) по своим основным параметрам (размеры, направление дрейфа и собственного вращения, скорость дрейфа) соответствует солитону Россби, описанному в разд. 1.

Такой вихрь проявляет весьма интересную самоорганизацию. До его возникновения начальный профиль течений имеет вид двух тангенциальных разрывов. Соответственно инкремент неустойчивости отвечает условиям (5), (24) и значительно превышает возможный декремент распада вихря. Поэтому происходит раскачка вихря течениями. По мере раскачки профиль течений, естественно, размывается и инкремент неустойчивости падает в соответствии с (6) и (26). Стационарное состояние устанавливается тогда, когда уменьшающийся инкремент γ сравнивается с декрементом распада вихря (включая его вязкую и, возможно, иную диссипацию).

Таким образом, учитывая все перечисленные свойства рассматриваемого незатухающего (несмотря на вязкость) солитона, самоорганизующегося и самоподдерживающегося в течениях, мы называем его автосолитоном Россби.

Рассмотренная здесь структура согласно точке зрения, аргументируемой в [8, 33, 34], представляет собой стационарную двумерную модель глобальных атмосферных вихрей типа Большого Красного Пятна Юпитера.

Автосолитон Россби генерируется центробежной неустойчивостью дифференциально вращающейся жидкости в условиях IV—IX. Дальнейшее обоснование этого вывода будет дано ниже (см. разд. 5). Укажем здесь на опыты по термогироконвекции [35, 36], которые проводились на глубокой воде в отсутствие β -эффекта; в них условия I—IV и VI—IX не выполняются.

4. Срыв неустойчивости тангенциального разрыва при «сверхзвуковом» движении мелкой воды

Этот эффект возникает при сочетании условий I, II, V и IX. Физически он соответствует результату, полученному Л. Д. Ландау [37]: в сжимаемой среде тангенциальный разрыв скорости поступательного движения (без вращения) устойчив по отношению к двумерным возмущениям (вдоль скорости и нормально к плоскости разрыва) при

$$Ma > 2\sqrt{2}. \quad (27)$$

Для разрыва на мелкой воде аналогичное условие устойчивости было получено в теоретической работе [38], в которой роль числа Маха в соответствии с аналогией (7) играет величина $Ma = \Delta u / (gH)^{1/2}$.

Указанные теоретические предсказания были подтверждены в опытах [6], выполненных в условиях (25) на установке с разрывом скорости встречных течений во вращающемся параболическом слое мелкой воды, при циклоническом знаке ротора течений, когда периферия вращается быстрее, чем середина. Последнее было необходимо для исключения центробежной неустойчивости вращающейся жидкости, которая не учитывалась в теории [37, 38]. Эти опыты показали, что эффективная генерация крупных вихрей (цепочек циклонов) вследствие рассматриваемой неустойчивости Кельвина—Гельмгольца (КГ) происходит только тогда, когда относительная скорость встречных течений ниже некоторого порога. Если же скачок скорости на разрыве превосходит указанный порог, то течения становятся практически ламинарными. Величина порогового скачка скорости на разрыве с точностью опыта соответствует критерию (27). Отметим, что описанные опыты являются экспериментальной демонстрацией аналогии (7).

5. Стационарные спиральные волны на вращающейся мелкой воде, генерируемые течениями со «сверхзвуковым» разрывом скорости

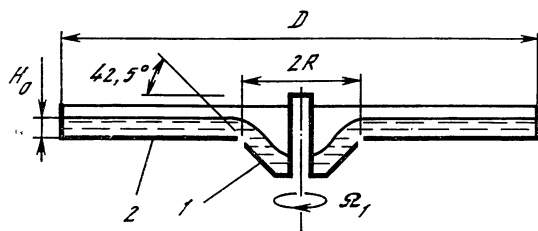
Эти структуры возникают при сочетании условий I, II, V, VIII (с инкрементом неустойчивости (5)) и IX. Они обнаружены и исследованы в опытах [9, 10], поставленных в связи с теорией [11—13]. Экспериментальная установка схематически показана на рис. 10. В этой установке на мелкой воде ($H_0 = 2 \div 4$ мм) создается тангенциальный разрыв скорости (шириной $\sim H_0$) между быстро вращающейся конической серединой (ядром) и неподвижной почти горизонтальной периферией. В такой системе генерируются стационарные волны поверхностной плотности, представляющие собой чередование «хребтов» (темные участки на рис. 11) и впадин между ними. В связи с аналогией (7) они соответствуют звуковым сжатиям и разрежениям в двумерном газе. Спиральные волны распространяются в сторону вращения ядра, и их «хвосты» обращены в обратную сторону — так называемые отстающие спирали. Роль числа Маха в данном случае играет величина $Ma = R\Omega_1/(gH_0)^{1/2}$, где R — радиус разрыва; H_0 — глубина жидкости на его неподвижной части; Ω_1 — угловая скорость вращения ядра. Опыты показывают, что при постепенном увеличении скорости вращения ядра наблюдается чередование азимутальных мод неустойчивости: от $m = 8$ при $Ma \simeq 1$ до $m = 0$ при $Ma \gtrsim 6$ (рис. 12). Переходы между модами происходят скачком и характеризуются наличием гистерезиса, что является индикатором нелинейности процесса.

Принципиально важно, что неустойчивость тангенциального разрыва, генерирующая рассматриваемые спиральные волны, отнюдь не прекращается при условии (27), а, наоборот, выглядит при этом особенно контрастно, хотя неустойчивость КГ, описанная в разд. 4, исчезает. Это означает, что в данном случае изучаемые структуры генерируются не неустойчивостью КГ, для которой безразлично, какая часть системы вращается быстрее — внешняя или внутренняя, а центробежной неустойчивостью, возникающей только при более быстром вращении середины относительно периферии. Все представленные закономерности качественно соответствуют линейной теории центробежной неустойчивости «тангенциального разрыва конечной ширины» при $Ma \gg 1$ [13] — это следует из сопоставления эксперимента с теорией, проведенного в [9, 10].

Структуры, показанные на рис. 11, за исключением моды $m = 0$, являются стационарными. Мода $m = 0$ существует в релаксационном режиме: когда она развивается, жидкость отходит от разрыва и неустойчивость прекращается; после возвращения волны, отраженной от барьера на краю сосуда, неустойчивость «вспыхивает» вновь, и т. д.

При нестационарном вращении ядра (при его ускорении) в переходном режиме от одной моды к другой наблюдаются спиральные волны с более сильной закруткой, а также нестационарные струк-

Рис. 10. Экспериментальная установка с разрывом скорости вращения на мелкой воде и генерацией нелинейных спиральных волн поверхностной плотности в несжимаемой, жидкости [9, 10]



1 — конус, быстро вращающийся с угловой частотой Ω_1 ; 2 — неподвижный диск (периферия)

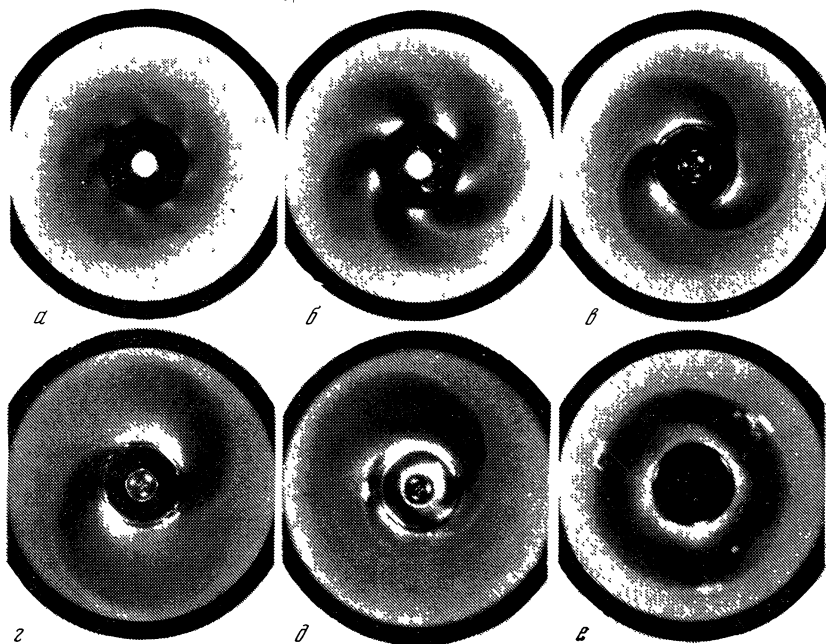


Рис. 11. Спиральные волны поверхностной плотности различных азимутальных мод [9, 10]

туры, у которых номер моды увеличивается к периферии. Вопрос о возможности влияния β -эффекта (который в данных опытах отсутствовал) на спиральные волны требует отдельного изучения.

В работах [9, 10] подробно обсуждается точка зрения, согласно которой рассмотренные спиральные волны моделируют гидродинамический механизм формирования спиральной структуры галактик (о проблеме спиральной структуры см., например, [11, 12]). В частности, нестационарные моды соответствуют галактическим спиральям, «ветвящимся» к периферии (последние наблюдаются довольно часто).

Интересно отметить, что рассмотренная здесь закономерность смены спиральных мод (см. рис. 11, 12) оказывается физически

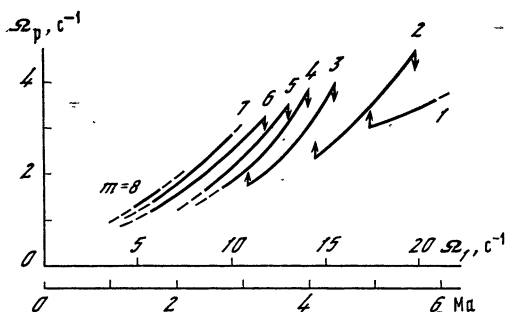


Рис. 12. Зависимость угловой скорости вращения спирального узора Ω_p от угловой скорости вращения ядра Ω_1 при постоянной глубине жидкости $H_0 = 2 \text{ мм}$

По оси абсцисс отложены также значения числа Маха. Стрелками показаны моменты переходов между модами при изменении величины Ω_1 ; скорость вращения периферии $\Omega_2 = 0$

той же самой, что и при возбуждении цепочек солитонов Россби. Это обстоятельство, а также наблюдаемая циклон-антициклонная асимметрия циклогенеза (см. разд. 2, 3) указывают на то, что и автосолитон Россби, и спиральные волны генерируются, по-видимому, одной и той же центробежной неустойчивостью, развивающейся при условии VIII. Это вселяет надежду на то, что такие явления природы, как атмосферные и галактические вихри, моделируемые рассмотренными в данной статье нелинейными структурами, возможно, имеют общий механизм генерации⁵.

ЛИТЕРАТУРА

1. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984. Т. 1. 400 с.
2. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. М.: Мир, 1981. Т. 1. 480 с.
3. Антипов С. В., Незлин М. В., Снежкин Е. Н., Трубников А. С. Солитон Россби в лаборатории // ЖЭТФ. 1982. Т. 82, вып. 1. С. 145—160.
4. Антипов С. В., Незлин М. В., Родионов В. К. и др. Солитоны Россби: устойчивость, столкновения, асимметрия и генерация течениями со сдвигом скорости // Там же. 1983. Т. 84, вып. 4. С. 1357—1372.
5. Антипов С. В., Незлин М. В., Снежкин Е. Н., Трубников А. С. Солитон Россби // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33, вып. 7. С. 368—372.
6. Антипов С. В., Незлин М. В., Родионов В. К. и др. Стабилизация неустойчивости тангенциального разрыва на мелкой воде при «сверхзвуковом» течении жидкости // Там же. 1983. Т. 37, вып. 7. С. 319—322.
7. Незлин М. В., Снежкин Е. Н., Трубников А. С. Неустойчивость Кельвина—Гельмгольца и Большое Красное Пятно Юпитера // Там же. 1982. Т. 36, вып. 6. С. 190—193.
8. Антипов С. В., Незлин М. В., Трубников А. С. Автосолитон Россби // Там же. 1985. Т. 41, вып. 1. С. 25—28.
9. Морозов А. Г., Незлин М. В., Снежкин Е. Н., Фридман А. М. Моделирование процесса генерации спиральной структуры галактик на установке с вращающейся жидкостью // Там же. 1984. Т. 39, вып. 11. С. 504—507.
10. Морозов А. Г., Незлин М. В., Снежкин Е. Н., Фридман А. М. Лабораторное моделирование процесса генерации спиральной структуры галактик (теория и эксперимент) // УФН. 1985. Т. 145, вып. 1. С. 160—165.
11. Поляченко В. Л., Фридман А. М. Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: Наука, 1976. 447 с.

⁵ По изложенным в данной статье вопросам см. также вышедшие в последнее время работы [39—41].

12. *Fridman A. M., Polyachenko V. L.* Physics of gravitating systems. N. Y.: Springer. 1984. Vol. 1. 458 p. Vol. 2. 356 p.
13. *Морозов А. Г.* Генерация спиральной структуры в плоских галактиках с двугорбыми кривыми вращения // *Астрон. журн.* 1979. Т. 56, вып. 3. С. 498—504.
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
15. *Flierl G. R.* The application of linear quasigeostrophic dynamics to Gulf-stream rings // *J. Phys. Oceanogr.* 1977. Vol. 7, N 5. P. 365—379.
16. *Ларичев В. Д., Резник Г. М.* О двумерных уединенных волнах России // *ДАН СССР.* 1976. Т. 231, вып. 5. С. 1077—1079.
17. *Flierl G. R., Larichev V. D., McWilliams J. C., Reznik G. M.* The dynamics of baroclinic and barotropic eddies // *Dynam. Atmos. and Oceans.* 1980. Vol. 5, N 1. P. 1—41.
18. *Михайлова Э. Н., Шапиро Н. Б.* Двумерная модель эволюции синоптических возмущений в океане // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1980. Т. 16, вып. 8. С. 823—833.
19. *Петвиашвили В. И.* Красное Пятно Юпитера и дрейфовый солитон в плазме // *Письма в ЖЭТФ.* 1980. Т. 32, вып. 11. С. 632—635.
20. *Петвиашвили В. И.* Уединенные вихри в зональном потоке во вращающейся атмосфере // *Письма в «Астрон. журн.».* 1983. Т. 9, вып. 4. С. 253—256.
21. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: Гостехтеориздат, 1947. 928 с.
22. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
23. *Романова Н. Н., Цейтлин В. Ю.* О квазигеострофических движениях в баротропной и бароклинной жидкости // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1984. Т. 20, вып. 2. С. 115—124.
24. *Flierl G. R., Stern M. E., Whitehead J. A.* The physical significance of modons: Laboratory experiments and general integral constraints // *Dynam. Atmos. and Oceans.* 1983. Vol. 7. P. 233—263.
25. *Рэлей (Стрэтт Дж. В.)* Теория звука. 2-е изд. М.: Гостехтеориздат, 1955. Т. 2. 477 с.
26. *Зельдович Я. Б., Кольхалов П. И.* Неустойчивость растянутого тангенциального разрыва — первый член разложения по волновому вектору // *ДАН СССР.* 1982. Т. 266, № 2. С. 302—304.
27. *Rabaud M., Couder Y.* A shear flow instability in circular geometry // *J. Fluid Mech.* 1983. Vol. 136. P. 291—319.
28. *Должанский Ф. В.* О генерации вихревых возмущений на фоне двумерного течения со сдвигом, возбуждаемого в поле сил Кориолиса источниками и стоками массы // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1981. Т. 17, вып. 6. С. 563—573.
29. *Черноусько Ю. Л.* Экспериментальные исследования двумерных течений с горизонтальным сдвигом во вращающейся системе // *Там же.* 1980. Т. 16, вып. 4. С. 423—427.
30. *Maxworthy T., Redekopp L. G.* A solitary wave theory of the Great Red Spot and other observed features of the Jovian atmosphere // *Icarus.* 1976. Vol. 29. N 4. P. 261—271.
31. *Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И.* Большое Красное Пятно как синоптический вихрь в юпитерианской атмосфере // *Письма в «Астрон. журн.»* 1981. Т. 7, вып. 8. С. 505—509.
32. *Михайловский А. Б., Кудашев В. Р., Лагин В. П.* и др. Цепочки солитонов России и градиентных солитонов // *Письма в ЖЭТФ.* 1984. Т. 40, вып. 7. С. 273—275.
33. *Незлин М. В.* Бароклиническая модификация баротропной модели Большого Красного Пятна Юпитера // *Там же.* Т. 34, вып. 2. С. 83—86.
34. *Незлин М. В.* О солитонной модели Большого Красного Пятна Юпитера и других крупных вихрей в атмосферах планет // *Письма в «Астрон. журн.»* 1984. Т. 10, вып. 7. С. 530—541.
35. *Read P. L., Hide R.* Long-lived eddies in the laboratory and in the atmospheres of Jupiter and Saturn // *Nature.* 1983. Vol. 302. P. 126—129.
36. *Read P. L., Hide R.* An isolated baroclinic eddy as a laboratory analogue of the Great Red Spot of Jupiter // *Ibid.* 1984. Vol. 308. P. 45—48.

37. Ландау Л. Д. Об устойчивости тангенциальных разрывов в сжимаемой жидкости // ДАН СССР. 1944. Т. 44, № 4. С. 151—153.
38. Базденков С. В., Погуце О. П. О «сверхзвуковой» стабилизации тангенциального разрыва в тонкой атмосфере // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 37, вып. 7. С. 317—319.
39. Незлин М. В. Солитоны Россби (экспериментальные исследования и лабораторная модель природных вихрей типа Большого Красного Пятна Юпитера) // УФН. 1986. Т. 150, вып. 1. С. 3—60.
40. Антипов С. В., Незлин М. В., Снежкин Е. Н., Трубников А. С. Автосолитон Россби и лабораторная модель Большого Красного Пятна Юпитера // ЖЭТФ. 1985. Т. 89, вып. 6 (12). С. 1905—1920.
41. Незлин М. В., Поляченко В. Л., Снежкин Е. Н. и др. Предсказание вихревого движения газа между спиральными рукавами галактик на основе лабораторного моделирования // Письма в «Астрон. журн.» 1986. Т. 12, № 7. С. 504—521.



УДК 523.4

СТРУКТУРА ПЛАНЕТНЫХ КОЛЕЦ

Н. Н. ГОРЬКАВЫЙ, А. М. ФРИДМАН

Данная работа посвящена недавно открытым удивительным структурам планетных колец. Авторы поставили перед собой задачу описать наиболее интересные структуры, наблюдаемые в кольцах, и рассмотреть существующие в литературе сценарии их образования. Из приведенных в заключение статьи выводов следует, что планетные кольца представляют собой замечательный природный полигон для разыгрывания разнообразных (пока мало изученных) коллективных процессов, приводящих к наблюдаемым структурам.

1. Некоторые основные наблюдательные данные

Общие сведения. На сегодняшний день в Солнечной системе известны четыре планеты, имеющие кольца: Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун. Кольца Сатурна открыты в XVII в., кольца Урана — в 1977 г. (по затмению звезды [1, 2]), кольцо Юпитера — в 1979 г. (по наблюдениям «Вояджера-1» [3]), а в последнее время появились сообщения об открытии колец Нептуна [4, 5]. Наибольший объем информации приходится на кольца Сатурна, вблизи которого пролетели межпланетные станции «Пионер-11» (сентябрь 1979 г.), «Вояджер-1» (ноябрь 1980 г.), «Вояджер-2» (август 1982 г.) [6, 7].

Планетные кольца можно разделить на два класса [8]: *космогонически первичные* и *вторичные*. Под первичными понимаются кольца массивных частиц метровых размеров, существующие миллиарды лет. Вторичные кольца, состоящие из газа и микрочастиц, образуются при выбросах вещества со спутников планет (вследствие вулканической деятельности, метеоритной бомбардировки и т. д.). К первичным можно отнести классические кольца А, В, С

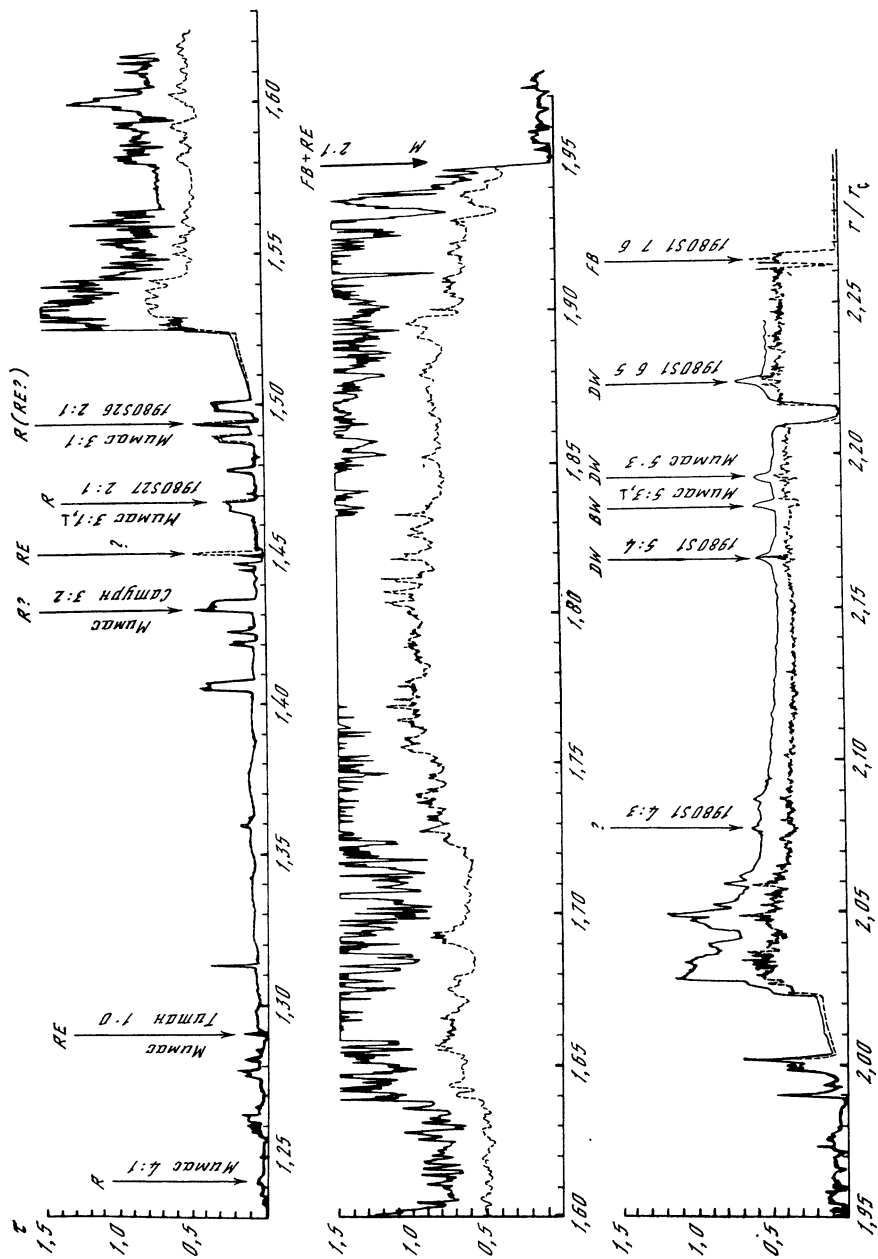
Таблица 1. Характеристики первичных и вторичных колец планет

Планета	Кольцо	Радиус, тыс. км	Ширина, км	Толщина, км	Оптическая толща
Первичные кольца					
Сатурн	С	74,5—92,0	$17,5 \cdot 10^3$	10^{-2}	0,08—0,15
	В	92,0—117,5	$25,5 \cdot 10^3$	10^{-2}	1,2—1,8
	Щель Кассини	117,5—122,2	$4,5 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^{-2}$	0,12
Уран	А	122,2—136,8	$14,6 \cdot 10^3$	$4 \div 6 \cdot 10^{-2}$	0,57—0,7
	6	41,877	0,4—2	—	$\geq 0,5$
	5	42,275	0,8—2	—	$\geq 1,0$
	4	42,610	0,7—2	—	$\geq 0,8$
	α	44,758	5—10	—	$\sim 1,4-0,7$
	β	45,701	5—11	—	$\sim 1,5-0,35$
	η	47,215	0,5—2	—	$\geq 0,6$
	Компан он η	47,215—47,27	~ 55	—	$\sim 0,03-0,1$
	γ	47,666	~ 3	—	$\geq 1,5$
	δ	48,339	2—3	—	$\geq 1,5$
Нептун	ϵ	51,188	20—96	—	$> 1,2$
	3	69,88	9,0	—	0,17
	2	70,02	5,1	—	0,13
	1	70,05	5,3	—	0,17
	Вторичные кольца				
Сатурн	G	~ 170	$\sim 10^3$	~ 100	$\leq 0,1$
	E	181—483	$3 \cdot 10^5$	7500—35000	$\sim 10^{-(6 \div 7)}$
Юпитер	Главное кольцо	122,8—129,2	6400	< 30	$\sim 3 \cdot 10^{-5}$
	Гало	> 100	$\sim 3 \cdot 10^4$	$\sim 10^4$	$\sim 5 \cdot 10^{-6}$

Примечание. Данные для первичных колец взяты из [5, 7, 9—11], для вторичных — из [12]. Оптическая толща измеряется поперек плоскости колец. При $\tau=1$ свет ослабляется в $e \approx 2,7$ раз. Ошибка в орбитальных радиусах колец Урана $\pm 16-17$ км. Ошибка для колец Нептуна ± 300 км — неточность нуля-пункта [11]. Поверхностная плотность колец Сатурна следующая: А — 40—50; 132 [10], В — 60—70, С — 10—16 [10], щель Кассини — 15; 40 г/см² [10].

Сатурна, кольца Урана и, видимо, Нептуна. К вторичным отнесем кольца G и E Сатурна, кольцо Юпитера (табл. 1).

Кольца Сатурна состоят из ледяных частиц [7], материал колец Урана, согласно данным [11], аналогичен углистым хондритам, а спектр колец Юпитера соответствует каменным породам [12]. По радионаблюдениям «Вояджеров» определено распределение частиц по размерам в кольцах Сатурна А, С и щели Кассини. Основная масса этих колец содержится в частицах с характерными



радиусами $a_x \sim 3 \div 5$ мм [10]. Вклад частиц с радиусом a в плотность колец резко уменьшается с ростом $|a - a_x|$; в частности, для $a > 5$ м концентрация частиц $\sim a^{-(5+\epsilon)}$. В то же время оптическая толща колец определяется в значительной степени сантиметровыми частицами.

Информация о кольцах Нептуна и Юпитера пока очень скудна. Кольца Урана исследованы лучше, и главной их поразительной особенностью является эксцентриситет (и наклонение), которым обладают почти все из девяти открытых узких колец [11].

Структуры. Наибольшее богатство пространственных структур обнаружено в кольцах Сатурна. В них наблюдается целый ряд резонансных явлений, связанных с воздействием внешних спутников: тугозакрученные спиральные волны плотности и изгибные волны, а также узкие плотные кольца (которые могут обладать эксцентриситетом) [13, 14]. Некоторые из резонансов от внешних спутников указаны на рис. 1. Отметим также, что в кольцах периодически возникают радиальные «спицы» [7]. Их образование сейчас объясняют в рамках гравито-электродинамики [15, 16] (совместным действием сил Лоренца — взаимодействием электрически заряженных частиц мелкой пыли с магнитным полем Сатурна — и гравитационных сил).

На рис. 1 показано изменение оптической толщ колец Сатурна, а на рис. 2 видно иерархическое расслоение внешней и внутренней частей кольца В (рис. 3, *a* — фотография внешней части кольца В). С расслоением кольца В коррелируют радиальные флуктуации альbedo частиц, которое меняется от 0,6 до 0,4 (от альbedo льда до альbedo камня) [7]. На фотографии кольца С (рис. 3, *b*) хорошо видна тысячекилометровая «синусоидальная» структура. Тонкая структура колец Сатурна состоит из колец шириной $d \sim 10^3$ км, которые делятся на порядок более узкие колечки, $d \sim 10^2$ км, и т. д. Сверхтонкая структура колец Сатурна состоит из колечек, ширина которых лишь в несколько раз превосходит толщину колец.

Одна из основных задач динамики колец Сатурна — объяснение иерархической структуры колец — до сих пор количественно не решена. В последующих двух разделах предложен путь решения этой проблемы, который состоит в следующем. В кольцах возможно развитие ряда неустойчивостей. Одни приводят к росту преимущественно узких колечек — так образуется

←

Рис. 1. Радиальное изменение оптической толщ τ колец Сатурна [7]

Сплошная линия — оптические наблюдения, прерывистая линия — радионаблюдения на волне 3,6 см. Стрелками указаны некоторые резонансы (типа $n:m$) от внешних спутников. Знаком \perp отмечены вертикальные резонансы [7]; DW — спиральные волны плотности, BW — изгибные спиральные волны, R — узкое плотное кольцо, RE — узкое кольцо с эксцентриситетом, FB — асимметричный край плотного кольца А и В; $r_C = 60\,330$ км — радиус Сатурна

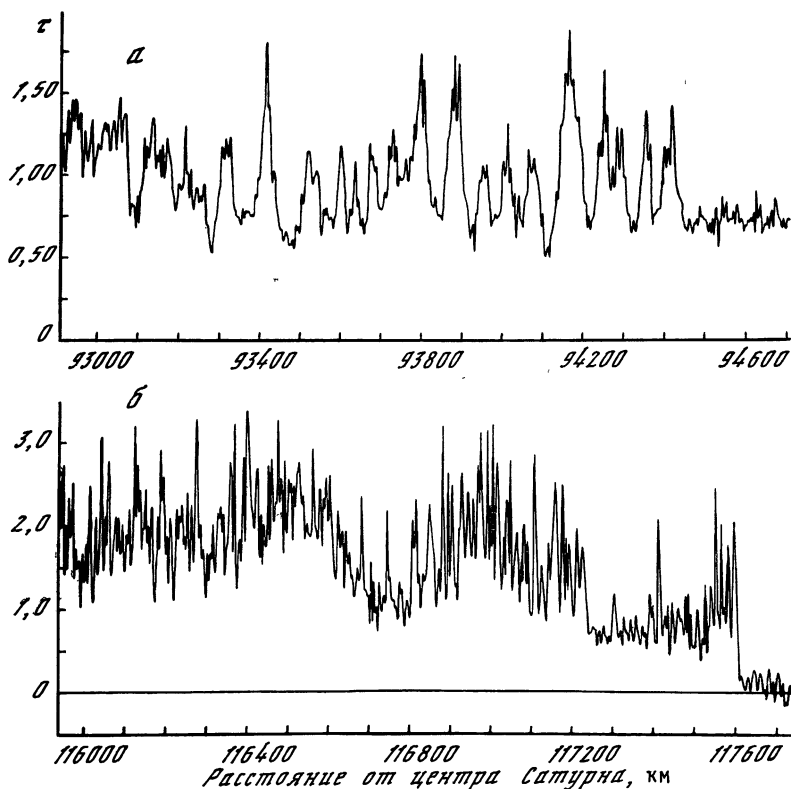


Рис. 2. Профиль оптической толщи внутренней (а) и внешней (б) частей кольца В [7]

а: выделяется структура с масштабом ~ 50 км; б: видна крупномасштабная структура в несколько сотен километров и более мелкомасштабная — от десятков километров до 3 км (предел разрешения)

сверхтонкая структура, другие неустойчивости генерируют широкие кольца. Качественно физика этих неустойчивостей описана ниже.

2. Качественное описание элементарных и коллективных процессов

Постановка задачи. В качестве модели начального состояния системы выберем диск частиц, вращающихся вокруг гравитирующего центра — большой центральной массы. Пусть в этом диске произведена аксиально-симметричная модуляция плотности, в результате которой в плоскости диска возникли концентрические кольцевые возмущения плотности. Нас будут интересовать те физические механизмы, которые приведут к увеличению начальной модуляции плотности.

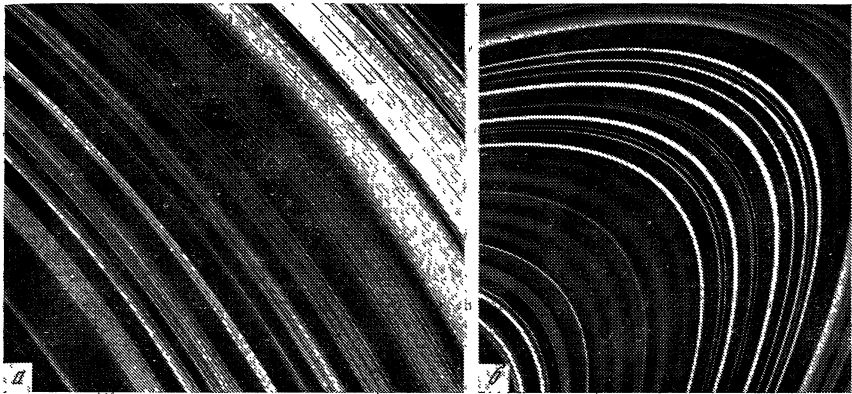


Рис. 3. Фотографии внешней части кольца В (участок в 6 тыс. км) (а) и кольца С (б)

а: хорошо видна иерархия кольцевых структур различных масштабов; темный угол справа вверху — щель Кассини; б: в центральной части кольца выделяется регулярная тысячекилометровая структура с небольшим контрастом плотности (фото NASA)

Физика джинсовской неустойчивости. Пусть первоначальный диск был бесконечно тонким. Выберем одно из колец, на которое мы разбили первоначальный диск частиц. Пусть пробная частица единичной массы находится на расстоянии ξ от ближайшей точки кольца шириной d , причем $\xi \gg d$. Тогда кольцо можно считать бесконечно тонкой гравитирующей нитью, потенциал которой $\psi \sim \ln(1/\xi)$, а сила притяжения пробной частицы $\partial\psi/\partial\xi \sim 1/\xi \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow 0$. Последнее, очевидно, может выполняться лишь для бесконечно узкого кольца, $d \rightarrow 0$, что в принципе допускается приближением бесконечно тонкого диска. Однако если диск имеет первоначальную толщину h , то $(\partial\psi/\partial\xi)_{\max} \sim 1/h$ — дестабилизирующая сила тем больше, чем тоньше диск. Следовательно, безразмерный дестабилизирующий фактор есть r/h , где r — радиус диска, а безразмерный стабилизирующий фактор есть M/m , где M и m — массы соответственно центрального тела и диска.

Смысл стабилизирующего фактора M/m состоит в том, что с его ростом увеличивается относительное влияние центрального тела. Когда сила притяжения частиц к центральной массе превосходит силу взаимного притяжения частиц, система устойчива по той же причине, по которой устойчива точка, вращающаяся в центральном поле (здесь не учитываются другие взаимодействия, кроме гравитационных). Другими словами, система оказывается неустойчивой, если дестабилизирующий фактор превосходит стабилизирующий, т. е. $r/h > M/m$ или

$$Q < 1, \quad Q \equiv \frac{M}{m} \frac{h}{r}. \quad (1)$$

Параметр Q называется коэффициентом запаса Тоомре, в несколько ином виде¹ он был введен Тоомре в 1964 г. [17].

Условие неустойчивости диска в виде (1) справедливо для наиболее коротковолновых возмущений с длиной волны $\lambda \sim h$. В этом случае диск разбивается на кольца шириной $d \sim h$. Если же $\lambda \sim d > h$, то из наших рассуждений следует, что в условии (1) h следует заменить на d — чем больше ширина колец, тем труднее выполнить критерий неустойчивости $Q(d) \equiv \frac{M}{m} \frac{d}{r} < 1$.

Диск, для которого выполняется критерий (1), называется самогравитирующим. Следовательно, наиболее неустойчивыми в самогравитирующем диске являются коротковолновые возмущения.

Согласно результатам обработки данных «Вояджера-2» [18] для кольца В Сатурна $Q \simeq 2$, т. е. кольцо В находится на границе гравитационной устойчивости. Полагая, что массу кольца В трудно установить с достаточной точностью, заключаем, что кольцо В может находиться на границе гравитационной устойчивости. Следовательно, в кольце В сверхтонкая структура может быть результатом развития джинсовской неустойчивости.

Физика диссипативной неустойчивости. Элементарные соударения и разрушение частиц колец. По вопросу о типичной модели частиц колец и характере элементарных соударений существуют самые противоположные мнения. В работах [19—21] принимается модель гладких, ледяных частиц с высокой степенью упругости. В [22] частицы колец представлены сверхрыхлыми снежными шарами (с прочностью на разрыв на пять порядков меньше самого сыпучего земного снега). В работе [23] на основе экспериментальных данных, а в [24] на основе теоретических оценок показано, что ледяные частицы при соударении испытывают контактное разрушение, несмотря на малые скорости соударения (~ 1 мм/с), и покрываются рыхлым слоем мелкодробленого льда. При толщине поверхностного слоя в несколько тысячных радиуса частицы соударение частиц можно считать полностью неупругим [24]. В работе [8] показано, что с учетом касательных соударений толщина поверхностного реголита составляет по крайней мере несколько процентов от радиуса частицы. В случае сильно неупругих частиц в роли упругих соударений выступает гравитационное рассеяние частиц друг на друге [25, 26].

Трудной проблемой является объяснение малых размеров частиц колец (фактически нет частиц с радиусом больше 10 м (все цифры в этом пункте относятся к кольцам Сатурна)). Традиционно максимальный размер частиц в кольцах и внешний радиус колец, за которым начинается зона спутников, связывались с приливными силами, запрещающими рост частиц колец.

¹ В [17] решалась задача об устойчивости галактического диска в отсутствие недисковой составляющей (в нашем случае центральной массы), однако, если M выразить через скорость вращения диска, приходим к критерию Тоомре.

Но для разрушения частиц колец приливными силами необходимо, чтобы прочность на разрыв p_d по всему объему частицы (объемная плотность ρ) была достаточно малой [27]: $p_d \lesssim \rho \Omega^2 a^2$, где Ω — угловая скорость вращения. Для 10-метровых частиц $p_d \lesssim 10^{-7}$ Н/см² [22] (прочность земного снега $p_d \sim 10^{-2}$ Н/см²).

В [8] показано, что более эффективен механизм столкновительного разрушения, который приводит к аналогичному неравенству $E_d \lesssim \rho \Omega^2 a^2$, но уже для удельной энергии разрушения поверхностных слоев E_d . Это условие гораздо более мягкое, так как энергия разрушения зависит от размеров обломков и может быть достаточно малой для рыхлого скопления сантиметровых частиц. При этом необходимое условие эффективного разрушения $\Omega_a \gtrsim Gm_i/a$ — сдвиговые скорости должны быть больше скоростей убегания с поверхности частиц массы m_i — определяет внешний радиус планетных колец (формально это условие совпадает с определением зоны Роша [28]). Таким образом, зона колец — это зона интенсивного разрушения частиц вследствие больших сдвиговых скоростей в дифференциально-вращающемся диске. В качестве модели типичной частицы можно принять гравитирующей неупругий шар радиусом 3–5 м со слоем поверхностного реголита.

Раскачка волн отрицательной энергии. Итак, система планетных колец является диссипативной системой. С помощью диссипативных процессов из системы отводится положительная энергия. Следовательно, в такой системе могут раскачиваться волны, имеющие отрицательную энергию. В частности, в дисках такие волны могут возникать при условии более «мягком», чем условие неустойчивости Джинса [29].

Действительно, энергия возмущений в диске [30]

$$\delta E = 1/2 \int (\sigma_0 v^2 + \sigma \psi + c_s^2 \sigma^2 / \sigma_0) dr \quad (2)$$

(невозмущенные величины от возмущенных будем отличать нулевым индексом; σ — поверхностная плотность, $c_s^2 \equiv \partial p / \partial \sigma$; p — давление в плоскости диска) есть аддитивная функция трех слагаемых: кинетической, гравитационной и тепловой энергий. Для определения критерия устойчивости в линейном приближении достаточно вычислить энергию возмущений отдельной фурье-гармоники:

$$\delta E_k \sim \frac{k^2 |\psi|^2}{\kappa^2} \left(1 - \frac{k^2 c_s^2}{2\pi G \sigma_0 |k|} \right) \frac{\omega_J^2}{2\pi G c_0 |k|}, \quad (3)$$

$$\omega_J^2 = \kappa^2 - 2\pi G \sigma_0 |k| + k^2 c_s^2,$$

$$\kappa^2 = 4\Omega_0^2 \left(1 + \frac{r}{2} \frac{\Omega_0'}{\Omega_0} \right), \quad (4)$$

где G — гравитационная постоянная; $\Omega_0(r)$ — частота вращения частиц диска. Как и следует из (3), в устойчивом (по Джинсу, см. выше) диске ($\omega_J^2 > 0$) энергия k -й гармоники оказывается

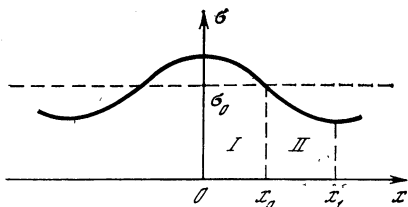


Рис. 4. Распределение поверхностной плотности частиц в соседних кольцах

$$\text{отрицательной при условии} \quad 2\pi G\sigma_0 |k| > k^2 c_s^2, \quad (5)$$

которое и должно являться условием диссипативной неустойчивости. Условие (5) можно переписать в виде $\lambda < c_s^2/G\sigma_0$, т. е. неустойчивость, связанная с раскачкой волн отрицательной энергии, является так же, как и джинсовская, коротковолновой.

Неустойчивость отрицательной диффузии. На рис. 4 изображена функция $\sigma(x)$ поверхностной плотности частиц диска в двух соседних кольцах I и II с повышенной (σ_1) и пониженной (σ_2) плотностью, $\sigma_1 > \sigma_2$. Через единицу длины границы раздела областей I и II в единицу времени в положительном направлении оси x перетекает следующее количество вещества: $\sigma_1 v_1 - \sigma_2 v_2$, где v_1, v_2 — диффузионные скорости, пропорциональные средним тепловым скоростям частиц в областях I и II соответственно. Условие неустойчивости состоит в том, чтобы увеличить плотность частиц в области I за счет перемещения частиц из области II, т. е.

$$\sigma_1 v_1 - \sigma_2 v_2 < 0. \quad (6)$$

Так как $\sigma_1 > \sigma_2$, то условие (6) может быть выполнено, например, в случае, когда $v \sim \sigma^{\alpha-1}$, где $\alpha < 0$. Последнее означает, что скорость должна уменьшаться с ростом плотности частиц. Это может быть в случае неупругих столкновений, когда с ростом плотности растет частота столкновений и, следовательно, увеличивается отток кинетической энергии в единицу времени — скорость падает. Итак, приходим к выводу, что условие неустойчивости (6) определяет критическую величину коэффициента неупругости столкновений, при превышении которого участки I будут продолжать уплотняться за счет разрежения участков II.

На рис. 4 точка x_0 соответствует точке перегиба функции $\sigma(x)$, $\partial^2\sigma(x_0)/\partial x^2 = 0$. Точку x_0 условно можно считать границей областей I и II, поскольку в этой точке плотность не меняется, что следует из уравнения диффузии

$$\partial\sigma/\partial t = D \partial^2\sigma/\partial x^2. \quad (7)$$

В области I $0 < x < x_0$, $\partial^2\sigma/\partial x^2 < 0$, в области II $x_0 < x < x_1$, $\partial^2\sigma/\partial x^2 > 0$. Следовательно, в области I плотность будет расти ($\partial\sigma_1/\partial t > 0$), а в области II — падать ($\partial\sigma_2/\partial t < 0$), если коэффициент диффузии в обеих областях отрицательный ($D < 0$). Теперь понятно, почему рассмотренная выше неустойчивость носит название «неустойчивости отрицательной диффузии» [31, 32].

Представляя модуляцию плотности σ в виде синусоидальной волны с экспоненциально растущей со временем амплитудой ($\sigma \sim \sigma_0 e^{\gamma t} \cos kx$), из (7) получаем $\gamma \simeq k^2 |D|$, т. е. инкремент неустойчивости оказывается максимальным для коротких волн.

Аккреционная неустойчивость [33]. Рассмотренные выше три типа неустойчивостей являются коротковолновыми, т. е. прежде всего приводят к росту узких колец — образованию сверхтонкой структуры. Тонкая же структура может возникать в результате так называемой аккреционной неустойчивости, связанной с аккрецией вещества — перетеканием «внешнего» вещества через систему колец. Механизм этой неустойчивости родственен механизму образования барханов в пустыне: движущийся к планете поток частиц вдоль плотности колец «застревает» в кольцах повышенной поглощающей способности. Для разреженных колец типа С с положительным коэффициентом диффузии время расплывания первоначальной коротковолновой модуляции плотности сравнительно мало ($t \sim \lambda^2$) — «барханы» не успевают «вырасти». Поэтому для эффективного роста «барханов» нужны первоначально крупномасштабные модуляции плотности. В оптически плотном кольце В возможно $D < 0$ и аккреционная неустойчивость могла развиваться на ранней стадии образования колец (когда D было положительным). По мере роста плотности при изменении знака D стали расти также и малые масштабы, «заморозив» рост крупных масштабов на наблюдаемом уровне. В этом случае крупные масштабы отражают «память» системы о прошлых динамических процессах, как волны на донном песке.

Модуляционная неустойчивость. В работах [34—37] была развита нелинейная теория диска, находящегося как на границе области джинсовской неустойчивости [34—36], так и в устойчивой (по Джинсу) области [37]. В обоих случаях была вычислена нелинейная добавка к джинсовской частоте ω_J :

$$\omega = \omega_J + \beta |\xi_R|^2, \quad (8)$$

зная которую можно выяснить, выполняется ли для диска критерий Лайтхилла модуляционной неустойчивости [38]:

$$\beta_0 d^2 \omega_J / dk^2 < 0. \quad (9)$$

В разд. 3 будет показано, что условие (9) оказывается справедливым лишь для узкой области значений объемного показателя адиабаты γ_V . У нас отсутствуют доказательства существования таких значений γ_V в кольцах Сатурна.

3. Исследование неустойчивостей планетных колец

Гидродинамическое приближение. Масштабы иерархической структуры колец — от 1000 км до сотен метров (см. разд. 1). Длина свободного пробега частиц l в кольцах порядка толщины диска, $l \sim h$, т. е. несколько десятков метров. Вычисленные

ниже времена характерных коллективных движений оказываются много больше времени свободного пробега частиц. Следовательно, для исследования устойчивости колец относительно возмущений наблюдаемых масштабов ($\lambda \gg h$) можно использовать гидродинамическое приближение ($\lambda \gg l$).

Основные уравнения. Разработка общей теории переноса дифференциально вращающихся дисков неупругих частиц [19, 20, 39] показывает, что для исследования принципиальных вопросов устойчивости колец удобно применять обычную систему уравнений гидродинамики для диска с учетом неупругости соударений:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma V_r) = N^+ - N^-, \quad (10)$$

$$\sigma \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_\phi^2}{r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} - \sigma \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{4}{3} \nu \sigma \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r V_r + \frac{2}{3} \frac{\partial \nu \sigma}{\partial r} \left(2 \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r} \right), \quad (11)$$

$$\sigma \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_r V_\phi}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu \sigma r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\phi}{r} \right) \right], \quad (12)$$

$$\frac{3}{2} \sigma \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + p \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\chi r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \nu \sigma \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\phi}{r} \right) \right]^2 + \frac{4}{3} \nu \sigma \left[\left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 - \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{V_r}{r} \right] - \sigma E^-. \quad (13)$$

Здесь σE^- — скорость потерь энергии хаотического движения при неупругих соударениях; $T = v^2/3$, где v — дисперсия хаотических скоростей частиц. Коэффициент кинематической вязкости записывается в следующем виде [19, 20, 39]:

$$\nu \approx T t_c / [(b \Omega t_c)^2 + 1], \quad (14)$$

где $b \approx 2$; t_c — время свободного пробега частицы. Аналогичное выражение получено для вязкости замагниченной плазмы [40]. Коэффициент теплопроводности $\chi \approx {}^{15}/_4 \nu$, где ${}^{15}/_4$ — коэффициент Эйнена (для принятых определений величин). В уравнении непрерывности учитывается, что плотность диска может меняться не только при диффузионных движениях частиц диска, но и при внешних (или недиффузионных) потоках вещества, т. е. для диска допускается возможность обмена массой с некоторым резервуаром вещества: функция N^+ описывает увеличение, а N^- — уменьшение массы диска.

Запишем систему линеаризованных относительно радиальных возмущений ($\sim \exp(-i\omega t + ikr)$) уравнений в ВКБ-приближении (длина волны гораздо меньше характерных масштабов диска: $\lambda \ll r$; $kr \gg 1$):

$$\gamma \hat{\sigma} = - ik \sigma_0 \hat{V}_r - \left(\frac{\partial N^-}{\partial \sigma_0} - \frac{\partial N^+}{\partial \sigma_0} \right) \hat{\sigma} - \left(\frac{\partial N^-}{\partial I_0} - \frac{\partial N^+}{\partial I_0} \right) \hat{T},$$

$$\begin{aligned}
\gamma \widehat{V}_r - 2\Omega \widehat{V}_\varphi &= i(2\pi G\sigma_0 - kc^2) \frac{\widehat{\zeta}}{\sigma_0} - ik\widehat{T} - \frac{4}{3} \nu k^2 \widehat{V}_r, \\
\gamma \widehat{V}_\varphi + \frac{\kappa^2}{2\Omega} \widehat{V}_r &= -\nu k^2 \widehat{V}_\varphi - ik \frac{\partial \nu}{\partial T_0} (-r\Omega') \widehat{T} - \\
&\quad - ik \frac{\partial \nu \sigma_0}{\partial \sigma_0} (-r\Omega') \frac{\sigma}{\sigma_0}, \\
\frac{3}{2} \gamma \widehat{T} + ikc^2 \widehat{V}_r &= -\chi k^2 \widehat{T} - \left(\frac{\partial E^- \sigma_0}{\partial \sigma_0} - \frac{\partial E^+ \sigma_0}{\partial \sigma_0} \right) \frac{\widehat{\zeta}}{\sigma_0} - \\
&\quad - \left(\frac{\partial E^-}{\partial T_0} - \frac{\partial E^+}{\partial T_0} \right) \widehat{T} - ik2\nu (-r\Omega') \widehat{V}_\varphi.
\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $\gamma \equiv -i\omega$; $c^2 = T_0$; амплитуды возмущенных величин отмечаем знаком « \wedge »; $E^+ = \nu (r\Omega')^2$ — увеличение скорости хаотического движения частиц вследствие вязкой диссипации энергии дифференциального вращения; $\Omega' \equiv \partial\Omega/\partial r$. Предполагаем, что в стационарном состоянии $E^+ = E^-$, $N^+ = N^-$, а также существует динамическое равновесие по координатам z (толщина диска $h \approx c/\kappa$) и r .

Джинсовская неустойчивость. Пренебрегая в уравнениях (15) всеми видами диссипативных процессов и приравнявая определитель полученной системы нулю, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 [\omega^2 - (5/3 k^2 c^2 - 2\pi G\sigma_0 k + \kappa^2)] = 0. \tag{16}$$

Отсюда получаем ветку джинсовских колебаний

$$\omega_J^2 = 5/3 k^2 c^2 - 2\pi G\sigma_0 k + \kappa^2 \tag{17}$$

и ветку нулевых колебаний $\omega_0^2 = 0$, которая раскачивается при учете диссипации. Можно показать, что возмущения (17) сохраняют угловой момент частиц, а возмущения с $\omega_0 = 0$ характеризуются отрицательной энергией [29] и не сохраняют угловой момент [41].

Диссипативные неустойчивости. Для достаточно устойчивого по Джинсу диска ($5/3 k^2 c^2 - 2\pi G\sigma_0 k + \kappa^2 > 0$) диссипативные медленные ($\gamma \sim \nu k^2 \ll \Omega$) колебания можно рассматривать независимо от высокочастотных ($\omega_J \sim \Omega$) джинсовских. Для данного случая, пренебрегая N^+ и N^- , получим из (15) следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned}
\gamma^2 \omega_J^2 + \gamma \left[\frac{2}{3} \omega_*^2 (\chi k^2 + \Delta E_T) + \nu k^2 \left(\frac{5}{3} k^2 c^2 - 2\pi G\sigma_0 k \right) + \right. \\
+ \frac{4}{3} k^2 c^2 \Omega \alpha - \frac{2}{3} k^2 \sigma_0 \Delta E_\sigma - \frac{\kappa^2}{2\Omega} k^2 \mu - k^2 \beta 2\Omega \sigma_0 \left. \right] + \\
+ \frac{2}{3} [(\chi \nu k^4 + \nu k^2 \Delta E_T + k^2 \alpha \mu) (k^2 c^2 - 2\pi G\sigma_0 k) +] \\
+ \sigma_0 k^4 (\chi \beta 2\Omega - \beta \mu - \Delta E_\sigma \nu) + k^2 \sigma_0 2\Omega (\Delta E_T \beta - \Delta E_\sigma \alpha) = 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial T_0} (-r\Omega'); \quad \beta = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial v \sigma_0}{\partial \sigma_0} (-r\Omega'); \quad \mu = 2v (-r\Omega'); \\ \Delta E_\sigma = \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{\partial E^- \sigma_0}{\partial \sigma_0} - \frac{\partial E^+ \sigma_0}{\partial \sigma_0} \right); \quad \Delta E_T = \frac{\partial E^-}{\partial T_0} - \frac{\partial E^+}{\partial T_0}; \\ \omega_*^2 = k^2 c^2 - 2\pi G \sigma_0 k + \kappa^2.$$

Для твердотельно вращающегося диска упругих частиц ($r\Omega' = 0$; $E^- = 0$) из (18) получим уравнение, описывающее вековую неустойчивость [29]:

$$\gamma^2 \omega_*^2 + \gamma [{}^2/3 \omega_*^2 \chi k^2 + vk^2 ({}^5/3 k^2 c^2 - 2\pi G \sigma_0 k)] + \\ + {}^2/3 \chi v k^4 (k^2 c^2 - 2\pi G \sigma_0 k) = 0. \quad (19)$$

Критерий неустойчивости $k^2 c^2 - 2\pi G \sigma_0 k < 0$ точно совпадает с (5) (с инкрементом $\gamma \sim vk^2 (kh)^2$), что означает раскачку волн отрицательной энергии (см. разд. 2).

Для дифференциально вращающегося диска неупругих частиц из (18) получим в пределе для длин волн, гораздо больших толщины диска ($kh \ll 1$), две возможные неустойчивости. Первая связана с раскачкой температурных колебаний, $\gamma \approx -{}^2/3 \Delta E_T$ (неустойчивость при $\Delta E_T < 0$), вторая — неустойчивость отрицательной диффузии

$$\gamma \approx -Dk^2, \quad \text{где } D = \sigma_0 (\beta - \alpha \Delta E_\sigma / \Delta E_T) 2\Omega / \kappa^2. \quad (20)$$

Отсюда следует длинноволновая асимптотика критерия диффузионной неустойчивости колец

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial v \sigma_0}{\partial \sigma_0} \Delta E_T - \frac{\partial v}{\partial T_0} \Delta E_\sigma < 0 \quad (21)$$

(коэффициент диффузии $D < 0$). Условие (21) в виде $dv\sigma/d\sigma < 0$ получено в работах [31, 32] (эти условия совпадают, если учесть соотношение $dT = -(\Delta E_\sigma / \Delta E_T) d\sigma$, получаемое из уравнения баланса).

Диффузионная неустойчивость колец Сатурна исследована в модели гладких негравитирующих шаров [21] и в модели неупругих гравитирующих частиц [26]. Как уже отмечалось выше (см. разд. 2), диффузионно неустойчивыми могут быть диски, в которых $\Omega t_c \lesssim 1$, т. е. диски с достаточно частыми соударениями. Длины максимально неустойчивых волн можно качественно определить из общего критерия неустойчивости — отрицательности свободного члена уравнения (18). Видно, что положительный член $\chi v c^2 k^6$ стабилизирует отрицательную диффузию в области $kh \sim 1$ [39]. Очевидно, что максимум инкремента в данном случае находится вблизи коротковолновой границы неустойчивости. Таким образом, диффузионная неустойчивость может быть ответственной только за самые мелкие масштабы расслоения в сотни метров (см. разд. 2).

Запишем систему (15) для низкочастотных ($\gamma \sim \gamma k^2 \ll \Omega$; $kh \ll 1$) колебаний устойчивого по Джинсу диска:

$$\begin{aligned} \gamma \dot{\sigma} &= -ik\sigma_0 V_r - \Delta N_\sigma \dot{\sigma} - \Delta N_T T, \\ \frac{\kappa^2}{2\Omega} \widehat{V}_r &= -ik \left[\frac{\partial v \sigma_0}{\partial \sigma_0} (-r\Omega') \right] \frac{\widehat{\sigma}}{\sigma_0} - ik \left[\frac{\partial v}{\partial T_0} (-r\Omega') \right] \widehat{T}; \\ \Delta E_T \widehat{T} &= -\Delta E_\sigma \frac{\widehat{\sigma}}{\sigma_0} - ik2v(-r\Omega') \widehat{V}_\varphi; \quad \widehat{V}_\varphi = -i \frac{2\pi G}{2\Omega} \widehat{\sigma}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\Delta N_\sigma = \partial N^- / \partial \sigma_0 - \partial N^+ / \partial \sigma_0$; $\Delta N_T = \partial N^- / \partial T_0 - \partial N^+ / \partial T_0$. В системе (22) оставляем только те члены, которые существенны для длинных волн $kh \ll 1$. Из (22) получим [33]

$$\gamma = -Dk^2 + Ak + B, \quad (23)$$

где $A = \frac{\Delta N_T}{\Delta E_T} v \left(\frac{-r\Omega'}{\Omega} \right) 2\pi G$; $B = \Delta N_T \frac{\Delta E_\sigma}{\Delta E_T} - \Delta N_\sigma$. Если диск «диффузионно устойчив» ($D > 0$), то при $A > 0$ и $B > -A^2/4D$ развивается длинноволновая неустойчивость, связанная с внешними потоками вещества. Для диска с малой оптической толщиной [26]

$$\frac{\partial E^- \sigma_0}{\partial \sigma_0} - \frac{\partial E^+ \sigma_0}{\partial \sigma_0} \approx 0, \quad \frac{\partial E^-}{\partial T_0} - \frac{\partial E^+}{\partial T_0} \approx \frac{2E^+}{T_0} > 0, \quad \frac{\partial v \sigma_0}{\partial \sigma_0} = 2v.$$

Отсюда

$$D \approx 6v, \quad A = \left(\frac{\partial N^-}{\partial T_0} - \frac{\partial N^+}{\partial T_0} \right) \frac{T_0}{3\Omega^2} 2\pi G, \quad B = - \left(\frac{\partial N^-}{\partial \sigma_0} - \frac{\partial N^+}{\partial \sigma_0} \right).$$

Заметим, что наше рассмотрение корректно, если $B \ll 0$. Для $B > 0$ (диск с переменной массой) требуется дополнительный анализ. Для простой модели взаимодействия частиц диска с внешним потоком критерий неустойчивости выполняется и максимально быстро растут волны с $\lambda \sim \Omega v / G \rho_s$, где ρ_s — объемная плотность вещества во внешнем потоке [33].

Оценим плотность во внешнем потоке при образовании колец на протостадии. Поверхностная плотность газопылевого протоблака 10^6 г/см² [42]. Доля пыли по массе $\sim 10^{-3}$; толщина облака $\sim 10^9$ см. Это дает в предположении равномерного распределения пыли по толщине диска $\rho_s \sim 10^{-6}$ г/см³. Для $\Omega \sim 10^{-4}$ с⁻¹, хаотических скоростей частиц диска $v \sim 0,1$ см/с, $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$ см³/(г·с²) получим $\lambda \sim 10^3$ км с характерным временем роста (при $B = 0$) $t \sim (vk^2)^{-1} \sim 10^6$ лет.

Условие выполнения в гравитационно устойчивом диске критерия Лайтхилла. В критерий Лайтхилла (9) входят: вторая производная по k от линейной частоты ω_J и нелинейная добавка к частоте β_0 . Определим ω_J из дисперсионного уравнения малых аксиально-симметричных колебаний диска [29]:

$$\omega_J = (\kappa^2 - 2\pi G \sigma_0 k + k^2 c_s^2)^{1/2}. \quad (24)$$

Видно, что частота имеет минимум в некоторой точке k_0 ; в ее окрестности

$$d^2 \omega_J / dk^2 > 0. \quad (25)$$

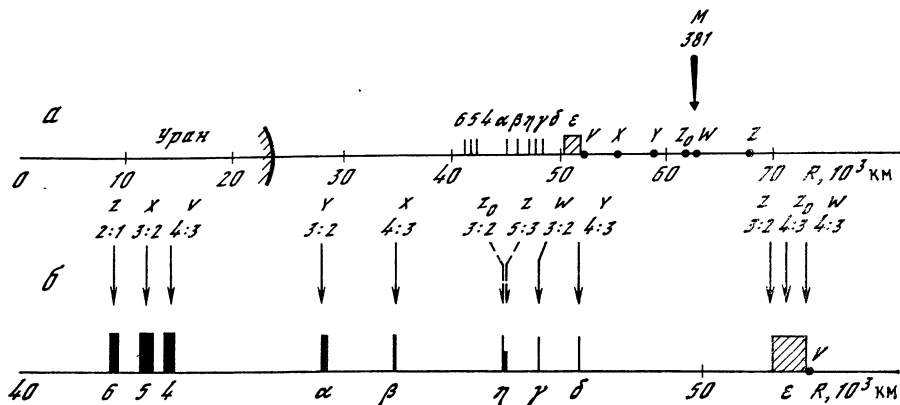


Рис. 5. Схема колец Урана и предполагаемых спутников (а) и резонансы от спутников X, Y, Z, Z₀, V, W в зоне колец (б)

M — Миранда; кольца Урана обозначены линиями (или прямоугольниками), ширина которых соответствует эксцентриситетной зоне кольца. Точность совпадения резонансов с большими полуосьями колец — 20–40 км; слабое кольцо η — единственное, не имеющее заметных эксцентриситета и наклона

Для выполнения критерия Лайтхилла (9) необходимо, чтобы величина β_0 была отрицательной. Определим β_0 из выражения для нелинейной части частоты колебаний в окрестности точки k_0 [37]:

$$\omega^2 = \omega_{\alpha_0}^2 - \frac{3\kappa^4 |\xi|^2}{c_s^2 Q^2 (3Q^2 - 4) (3\gamma_V - 1)^2} \left[(-29\gamma_V^2 + 50\gamma_V - 17) + \frac{84\gamma_V^2 - 136\gamma_V + 36}{3Q^2} \right], \quad (26)$$

где γ_V — объемный показатель адиабаты. От его величины зависит знак β_0 , а именно $\beta_0 < 0$ при $I \leq \gamma_V \leq 1,26$ (при $Q^2 \gg 1$). Доказательство выполнения последнего условия, например, в кольцах Сатурна на сегодняшний день отсутствует.

4. Резонансная природа колец Урана

Два уникальных свойства колец Урана привлекли к себе внимание с момента их открытия в 1977 г.:

а) кольца узкие: их ширина $\Delta \simeq 0,6 \div 10$ км (за исключением внешнего кольца с $\Delta \simeq 20 \div 100$ км); время диффузионного расплывания кольца с $\Delta = 10$ км $t_D \sim \Delta^2/\nu \sim 300$ лет;

б) кольца обладают эксцентриситетом, хотя различие в скоростях прецессии (вызываемой несферичностью Урана) для внутреннего и внешнего краев колец должно было бы привести к разрушению эллиптичности кольца за несколько сотен лет [43].

Очевидно, что существование узких и эксцентриситетных колец невозможно без интенсивного внешнего воздействия.

Таблица 2. Некоторые характеристики открытых и предсказанных спутников Урана

Орбитальный радиус, км		Число (тип) внешних резонансов ст открытыми спутниками в зоне колец	Диаметр спутника, км
Предсказанные спутники	Открытые спутники		
—	85 980	0	165
—	75 100	1 (1:2)	50
—	69 920	1 (1:2)	50
66 450	66 090	2 (1:2, 2:3)	100
—	64 350	1 (2:3)	80
62 470	62 700	2 (2:3, 3:4)	50
61 860 *	61 750	2 (2:3, 3:4)	80
58 600	59 100	2 (2:3, 3:4)	50
55 380	—	—	—
51 580	53 300 **	1 (3:4)	25
—	49 300	0	15

* Неопубликованное значение из первого варианта работы [46].

** Внешний «пастух» кольца ϵ , по-видимому, отодвинулся от кольца вследствие обмена моментом вращения с кольцом.

Большинство авторов считает, что динамика колец Урана определяется мелкими неоткрытыми спутниками, расположенными или внутри каждого кольца [44, 45], или по его краям (спутники — «пастухи») [43]. Но предположение о существовании в

Гипотеза [46]

За внешней границей колец Урана существует серия мелких неоткрытых спутников

Внутри зоны колец спутники не образуются

Существование колец связано с резонансным воздействием типа 1:2, 2:3, 3:4 от неоткрытых спутников

Пять предполагаемых спутников оказывают резонансное воздействие сразу на пару колец, что позволяет вычислить их орбитальные радиусы

Особенности внешнего кольца ϵ связаны с действием спутника-«пастуха» вблизи внешнего края кольца

Предполагаемый диаметр спутников 100 км, альbedo $\geq 0,03$ [49]

Наблюдения [47, 48]

За внешней границей колец Урана открыто девять мелких спутников

В зоне колец (вблизи внешней границы) расположен только один, самый мелкий спутник

Восемь из десяти новых спутников Урана имеют в зоне колец резонансы типа 1:2, 2:3, 3:4

Четыре из десяти спутников оказывают резонансное воздействие сразу на пару колец и хорошо совпадают с предсказанными

Внешнее кольцо ϵ оказалось единственным из девяти колец, возле которого открыты «пастухи»

Диаметр открытых спутников от 15 до 165 км, альbedo $\sim 0,05$

зоне колец большого количества спутников (9 [44, 45] или от 10 до 18 [43]) не согласуется с изложенной выше космогонической моделью образования колец, по которой образование спутников в кольцах запрещено вследствие сильного столкновительного разрушения частиц [8]. Эксцентриситетные кольца в оптически тонких кольцах Сатурна, как правило, связаны с резонансным воздействием внешних спутников (см. рис. 1). В работе [46] авторы выдвинули гипотезу о резонансной природе колец Урана, определяемой его внешними неоткрытыми спутниками (рис. 5). Данные, полученные «Вояджером-2» при пролете вблизи Урана в январе 1986 г., полностью подтвердили эту гипотезу. Сравнение предсказанной и наблюдаемой картин приведено выше (см. также табл. 2).

Заключение

Таким образом, в данной работе показано, что коллективные процессы играют определяющую роль в формировании иерархической структуры колец Сатурна.

Сверхтонкая структура кольца В Сатурна может возникать вследствие развития трех типов неустойчивости: джинсовской, отрицательной диффузии и раскачки волн отрицательной энергии. Тонкая структура колец В и С может определяться развитием аккреционной неустойчивости.

В формировании колец Урана и отдельных структур колец Сатурна важную роль играют резонансные взаимодействия. Кольца Урана определяются резонансным взаимодействием со спутниками вблизи внешней границы колец. Резонансное воздействие внешних спутников порождает в кольцах Сатурна как узкие колечки (часто эксцентриситетные), так и спиральные волны — плотностные и изгибные.

Возможно, что кольца Нептуна также определяются резонансным взаимодействием с неоткрытыми спутниками.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Elliot J. L., Dunham E., Mink D.* The rings of Uranus // *Nature*. 1977. Vol. 267, N 5609. P. 328—330.
2. *Millis R. L., Wasserman L. H., Birch P. V.* Detection of rings around Uranus // *Ibid.* P. 330—331.
3. *Smith B. A., Soderblom L. A., Johnson T. V. et al.* The Jupiter system through the eyes of Voyager 1 // *Science*. 1979. Vol. 204, N 4396. P. 951—971.
4. *Elliot J. L.* Rings around Neptune? // *Planetary rings* / Ed. A. Brahic. Toulouse (France), 1984. P. 197—199.
5. *Cooke M. L., Nicholson P. D., Matthews K., Elias J.* Occultation observations of a possible Neptunian ring system // *Bull. Amer. Astron. Soc.* 1985. Vol. 17, N 3. P. 719.
6. *Morrison D.* Voyages to Saturn. NASA Sp-451. Wash., 1982. P. 227.
7. *Cuzzi J. N., Lissauer J. J., Esposito L. W. et al.* Saturn's rings: properties and processes // *Planetary rings* / Ed. R. Greenberg, A. Brahic. Tucson (Ariz.), 1984. P. 73—199.

8. Горькавый Н. Н., Фридман А. М. О причине существования границы между планетными кольцами и спутниками планет и о размерах и структуре частиц колец // Письма в «Астрон. журн.» 1985. Т. 11, № 8. С. 628—633.
9. Zebker H. A., Tyler G. L. Thickness of Saturn's rings inferred from Voyager 1 observations of microwave scatter // Science. 1984. Vol. 223, N 4634. P. 396—398.
10. Marouf E. A., Tyler G. L., Zebker H. A. et al. Particle size distributions in Saturn's rings from Voyager 1 radio occultation // Icarus. 1983. Vol. 54, N 2. P. 189—211.
11. Elliot J. L., Nicholson P. D. The rings of Uranus // Planetary Rings / Ed. R. Greenberg, A. Brahic. Tucson (Ariz.), 1984. P. 25—72.
12. Burns J. A., Showalter M. R., Morfill G. E. The ethereal rings of Jupiter and Saturn // Ibid. P. 200—272.
13. Holberg J. B., Forrester W. T., Lissauer J. J. Identification of resonance features within the rings of Saturn // Nature. 1982. Vol. 297, N 5861. P. 115—120.
14. Porco C., Nicholson P. D., Borderies N. et al. The eccentric Saturnian ringlets at 1, 29 R_S and 1,45 R_S // Icarus. 1984. Vol. 60, N 1. P. 1—16.
15. Mendis D. A. Gravitoelectrodynamics and the structure of planetary ring systems // Proc. Indian. Acad. Sci. (Earth and Planet. Sci.). 1984. Vol. 93, N 3. P. 177—188.
16. Блюх П. В., Ярошенко В. В. Электростатические волны в кольцах Сатурна // Астрон. журн. 1985. Т. 62, вып. 3. С. 569—579.
17. Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars // Astrophys. J. 1964. Vol. 139, N 4. P. 1217—1238.
18. Lane A. L., Hord C. W., West R. A. et al. Photopolarimetry from Voyager 2: Preliminary results on Saturn, Titan, and the rings // Science. 1982. Vol. 215, N 4532. P. 537—543.
19. Goldreich P., Tremaine S. The velocity dispersion in Saturn's rings // Icarus. 1978. Vol. 34, N 2. P. 227—239.
20. Stewart G. R., Lin D. N. C., Bodenheimer P. Collision-induced transport processes in planetary rings // Planetary Rings / Ed. R. Greenberg, A. Brahic. Tucson (Ariz.), 1984. P. 447—512.
21. Bridges F. G., Hatzes A., Lin D. N. C. Structure, stability and evolution of Saturn's rings // Nature. 1984. Vol. 309, N 5967. P. 333—335.
22. Davis D. R., Weidenschilling S. J., Chapman C. R., Greenberg R. Saturn ring particles as dynamic ephemeral bodies // Science. 1984. Vol. 224, N 4650. P. 744—747.
23. Hartmann W. K. Comments on collision mechanics in ring systems // Planetary rings / Ed. A. Brahic. Toulouse (France), 1984. P. 407—422.
24. Горькавый Н. Н. Коэффициент неупругости сталкивающихся ледяных частиц колец Сатурна // Письма в «Астрон. журн.» 1985. Т. 11, № 1. С. 66—71.
25. Cuzzi J. N., Durisen R. H., Burns J. A., Hamill P. The vertical structure and thickness of Saturn's rings // Icarus. 1979. Vol. 38, N 1. P. 54—68.
26. Горькавый Н. Н. К вопросу об устойчивости колец Сатурна // Письма в «Астрон. журн.» 1985. Т. 11, № 6. С. 469—474.
27. Jeffreys H. The relation of cohesion to Roche's limit // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1947. Vol. 107, N 3. P. 260—262.
28. Бобров М. С. Кольца Сатурна. М.: Наука, 1970. 118 с.
29. Fridman A. M., Polyachenko V. L. Physics of gravitating system. N. Y.: Springer, 1984. Vol. 1. 468 p.; Vol. 2. 358 p.
30. Чурилов С. М., Шухман И. Г. Слабая турбулентность в самогравитирующем диске // Астрон. журн. 1981. Т. 58, вып. 2. С. 260—272.
31. Ward W. R. On the radial structure of Saturn's rings // Geophys. Res. Lett. 1981. Vol. 8, N 6. P. 641—643.
32. Lin D. N. C., Bodenheimer P. On the stability of Saturn's rings // Astrophys. J. Lett. 1981. Vol. 248, N 2. P. L83—L86.
33. Горькавый Н. Н. К динамике планетных колец: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1986. 136 с.

34. Михайловский А. Б., Петвиашвили В. И., Фридман А. М. Спиральные волны плотности в галактиках — движущиеся солитоны // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26, № 3. С. 129—133.
35. Михайловский А. Б., Петвиашвили В. И., Фридман А. М. Взрывная неустойчивость гравитирующего диска // Там же. 1977. Т. 26, № 4. С. 341—343.
36. Михайловский А. Б., Петвиашвили В. И., Фридман А. М. Нелинейная теория вращающегося гравитирующего диска // Астрон. журн. 1979. Т. 56, вып. 2. С. 279—287.
37. Поляченко В. Л., Чурилов С. М., Шухман И. Г. Нелинейная стадия гравитационной неустойчивости в плоских газовых системах // Там же. 1980. Т. 57, вып. 3. С. 497—504.
38. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976. 240 с.
39. Горькавый Н. Н. К теории линейных колебаний вращающихся столкновительных сред // Науч. информ. Астрон. совета АН СССР. 1986. Вып. 61. С. 132—147.
40. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183—272.
41. Морозов А. И., Фридман А. М. Неустойчивость упругой нити, вращающейся вокруг гравитирующего центра // ЖТФ. 1986. Т. 56, вып. 6.
42. Сафронов В. С., Витязев А. В. Происхождение Солнечной системы // Астрофизика и космическая физика. М.: ВИНТИ, 1983. С. 5—93 (Астрономия; Т. 24).
43. Goldreich P., Tremaine S. Towards a theory for Uranian rings // Nature. 1979. Vol. 277, N 5692. P. 97—99.
44. Van Flandern T. C. The rings of Uranus: invisible and impossible? // Science. 1979. Vol. 204. P. 1076—1077.
45. Dermott S. F., Gold T., Sinclair A. T. The rings of Uranus: nature and origin // Astron. J. 1979. Vol. 84. P. 1225—1234.
46. Горькавый Н. Н., Фридман А. М. О резонансной природе колец Урана, определяемой его неоткрытыми спутниками // Астрон. циркуляр. 1985. № 1391. С. 1—2; Письма в «Астрон. журн.», 1985. Т. 11, № 9. С. 717—720.
47. Circular IAU. 1986. N 4164, 4168.
48. Sky. Telescope. 1986. Vol. 71, N 4. P. 338—343.
49. Афанасьев В. Л., Горькавый Н. Н., Смирнов М. А., Фридман А. М. О возможности обнаружения неоткрытых спутников Урана наземными телескопами // Астрон. циркуляр. 1985. № 1391. С. 3—4.



УДК 532.542.4 : 530.182

ДИНАМИКА СТРУКТУР В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

М. М. СУЩИК

Введение

Многочисленные эксперименты (см., например, обзоры [1—6]), выполненные в последние годы, убедительно продемонстрировали, что крупномасштабные когерентные структуры (КС) практически всегда присутствуют в турбулентных сдвиговых течениях и играют существенную роль в переносе импульса, массы, энергии, рейнольдсовых напряжений и т. п. Обычно под такими структурами подразумевают хорошо идентифицируемые долгоживущие

вихревые образования с характерными масштабами l порядка толщины сдвигового слоя δ , внутри которых, несмотря на наличие мелкомасштабной турбулентности, имеются упорядоченные крупномасштабные движения. В кратком обзоре нет возможности рассмотреть все их особенности, и мы обсудим лишь наиболее принципиальные вопросы: о роли неустойчивости в формировании крупномасштабных когерентных структур, о влиянии их на движения и структуры других масштабов, о конечномерной турбулентности в сдвиговых течениях.

1. Формирование когерентных структур в турбулентном сдвиговом слое

В дальнейшем речь будет идти в основном о структурах в двумерном сдвиговом слое, под которым подразумевается область (в общем случае с трехмерными турбулентными движениями) между двумя параллельными потоками, каждый из которых имеет постоянную скорость U_1 и U_2 в x -направлении. Если не оговорено противное, анализ будет проводиться в приближении невязкой жидкости.

Усиление возмущений в сдвиговом слое. Эффект конкуренции. В экспериментах сдвиговые слои формируются в результате слияния двух пограничных слоев вблизи кромки расщепляющей пластины и, как правило, имеют в профиле средней скорости точку перегиба, которая одновременно является точкой максимума завихренности. Как известно [7], такие слои являются неустойчивыми по отношению к малым возмущениям, развитие которых и приводит к формированию КС. Анализ отклика сдвигового слоя на локализованное возмущение показывает [8], что при $U_1 > 0$, $U_2 > 0$ неустойчивость является конвективной.

На рис. 1 [9] представлены инкременты и фазовые скорости возмущений для профиля безразмерной средней скорости $\bar{U}(z) = 0,5(1 + \text{th } z/\theta)$

$$\left(\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(z) - U_2}{U_1 - U_2} \left(1 - \frac{U(z) - U_2}{U_1 - U_2}\right) dz\right),$$

хорошо аппроксимирующего зависимость средней скорости от поперечной координаты в сдвиговых течениях, обычно реализующихся в экспериментах. Из зависимостей, приведенных на рис. 1, следует, что на линейном этапе сдвиговый слой играет роль фильтра, выделяющего узкий спектр возмущений. Поэтому можно было бы ожидать, что на свертывание сдвигового слоя преимущественное влияние будет оказывать мода, имеющая максимальный инкремент, и формирующиеся вихри должны следовать с частотой этой моды (число Струхала $St_m = f_m \theta / U_1 = 0,017$ при $U_2 = 0$; здесь $\theta = \int_{-\infty}^{\infty} (U/U_1)(1 - U/U_1) dz$, f_m — частота моды,

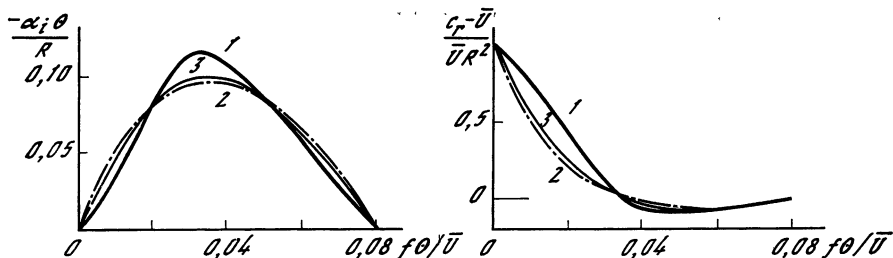


Рис. 1. Зависимости от средней скорости потока \bar{U} пространственного инкремента $-\alpha_i$ и фазовой скорости c_r гармонического возмущения $\sim \exp [i(\alpha x - 2\pi f t)]$

1 — $R = 1$; 2 — $R = 0,5$, 3 — $R \ll 1$; $\bar{U} = (U_1 + U_2)/2$; $R = (U_1 - U_2)/(U_1 + U_2)$

имеющей максимальный инкремент). Однако в экспериментах частота следования вихрей, образовавшихся при свертывании сдвигового слоя, оказывается значительно меньшей [10]. Это свидетельствует о существенном влиянии эффекта взаимной конкуренции мод.

Эффект конкуренции связан с действием двух основных механизмов (или одного из них). Суть первого механизма заключается в том, что различные возмущения, черпающие энергию из одного источника (в данном случае среднего течения), при нелинейном взаимодействии «организуют» друг для друга дополнительное затухание. Второй механизм обусловлен обратным воздействием нарастающих возмущений на среднее течение, а именно на его неустойчивость. В результате преобладающими оказываются возмущения, менее чувствительные к действию остальных, причем зачастую не те, которые на линейном этапе обладали максимальным инкрементом. Хотя строгая теория этого эффекта применительно к сдвиговым слоям пока не развита, некоторые результаты можно предсказать, воспользовавшись следующими качественными соображениями.

В первом приближении конечно-амплитудные возмущения будет приводить к уширению сдвигового слоя и, следовательно, к уменьшению усиления наиболее чувствительных к его состоянию высокочастотных (коротковолновых) мод. На инкременты низкочастотных (длинноволновых) мод уширение сказывается слабее, поэтому в нелинейном режиме максимум усиления должен сместиться в низкочастотную область спектра. Фактически это и наблюдается в экспериментах — свертывание сдвигового слоя происходит не на частоте моды, обладающей наибольшим инкрементом ($St_m = 0,017$), а на заметно меньших частотах [10]. При этом отличие соответствующего числа Струхала St от St_m зависит в основном от уровня пульсаций u'/U_1 в пограничном слое вблизи пластины, и при убывании u'/U_1 от 0,03 до 0,005 число Струхала изменяется от 0,0123 до 0,0154. Можно ожидать, что в пределе очень малых пульсаций в набегающем потоке,

когда расстояние, на котором присходит линейное усиление, велико, влияние частотной зависимости инкремента будет определяющим и $St \rightarrow St_m$.

Наличие в пространственно развивающемся сдвиговом слое механизмов селекции приводит к тому, что его свертывание происходит регулярном образом — вихри образуются примерно на одном и том же расстоянии от пластины и имеют почти одинаковые интенсивности и период следования. Наличие мелко-масштабной турбулентности непосредственно не влияет на характер процесса — она лишь привносит дополнительное перемешивание на мелких масштабах, которое эквивалентно турбулентной вязкости. Для сдвиговых течений, неустойчивость которых обусловлена наличием точки перегиба в профиле средней скорости, малая вязкость не приводит к качественно новым эффектам, и фактически на развитие сдвигового слоя основное влияние оказывают лишь пульсации скорости, попадающие в полосу усиления (см. рис. 1).

Свертывание сдвигового слоя и образование КС. Свертывание сдвигового слоя — нелинейный процесс, единственным эффективным методом исследования которого является численное решение исходных уравнений Эйлера или Навье—Стокса. Большинство результатов здесь получено не для сдвигового слоя, развивающегося в пространстве, а для сравнительно более простой задачи — для безграничных периодических слоев, развивающихся во времени. Если $(U_1 - U_2)/(U_1 + U_2) \ll 1$, то, воспользовавшись преобразованием Галилея, легко убедиться, что в обоих случаях локально задачи эквивалентны. Качественно процессы похожи и при выполнении менее строгого неравенства. Однако при рассмотрении глобальных свойств сдвигового слоя следует иметь в виду, что различия могут быть принципиальными. Они связаны прежде всего с тем, что для временной задачи уравнения параболические, а для эволюции вдоль потока — эллиптические. Физически это означает, что события, происходящие вниз по потоку, например слияния вихрей, влияют на течение вверх по потоку (в том числе и вблизи кромки пластины или сопла). В то же время ясно, что во временной задаче такие события не играют никакой роли для предшествующего развития слоя.

В результате свертывания сдвигового слоя формируется вихрь с довольно сложным распределением завихренности (рис. 2) [11, 12]. Жирная линия на рис. 2 представляет собой седловую линию тока, разграничивающую финитные и нефинитные движения. Основная часть завихренности локализуется внутри области, ограниченной сепаратрисами, и линии изозавихренности имеют сложную структуру. Однако для линий тока, представляющих более грубую характеристику, в качестве нулевого приближения для дальнейшего рассмотрения можно воспользоваться стационарным решением [13] уравнений Эйлера:

$$\Psi = Uk_0^{-1} \ln (\operatorname{ch} k_0 z - \rho \cos k_0 z), \quad U_1 = -U_2 = U, \quad (1)$$

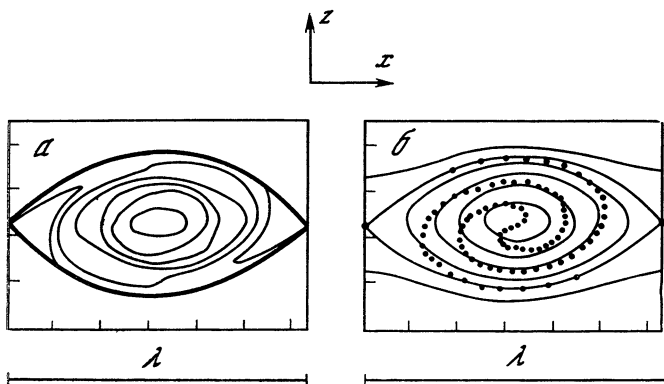


Рис. 2. Линии изозавихренности (а) и линии тока (б) в КС, образующейся в результате развития периодического в пространстве возмущения с длиной волны λ , при $\tau \sim \lambda/U_0$ (от начала нелинейного режима) [12]

Точками обозначены частицы, находившиеся в плоскости симметрии исходного сдвигового слоя; $2\pi\delta/\lambda = 0,43$, $\delta = (\partial U/\partial z)_{\max}/U_0$, $U_1 = -U_2 = U_0$

где Ψ — функция тока; $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ — волновое число; ρ характеризует распределение завихренности ($0 \leq \rho \leq 1$).

Очевидно, что КС, образовавшиеся в результате свертывания сдвигового слоя, могут существовать только в нестационарном режиме. Действительно, в стационарном случае, включив в рассмотрение игнорировавшуюся до этого вязкость ν , получим

$$u_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_z \frac{\partial \omega}{\partial z} - \nu \Delta \omega = 0. \quad (2)$$

Это уравнение совпадает с условием [14] отсутствия локализованных максимумов завихренности, и если бы не было других возмущений, вязкость приводила бы к диффузии завихренности и исчезновению отдельных структур. В результате должен формироваться новый сдвиговый слой с большей толщиной, устойчивый к возмущениям с длинами волн λ , меньшими, чем длина волны исходного возмущения [12]. Действие мелкомасштабной турбулентности должно приводить к такому же эффекту.

Вторичная неустойчивость сдвигового слоя и слияние вихрей. Неизбежно присутствующие в набегающем потоке возмущения с большими длинами волн, по отношению к которым вновь образовавшийся сдвиговый слой является неустойчивым, будут приводить к возникновению новых структур. Поскольку время релаксации структур $\tau \sim (\lambda/U) \text{Re} \sim \tau_0 \text{Re}$ (Re — число Рейнольдса) значительно больше времени развития неустойчивости τ_0 , то она сказывается прежде, чем формируется асимптотический сдвиговый слой. Для модели КС в сдвиговом слое, описываемой решением (1), зависимость инкремента возмущения удвоенного периода ($2\lambda_0$) от степени концентрации завихренности, полученная из численных решений [15] уравнений Эйлера, пред-

Рис. 3. Зависимость временного инкремента σ моды удвоенного периода $2\lambda_0$ от степени концентрации завихренности ρ [15]

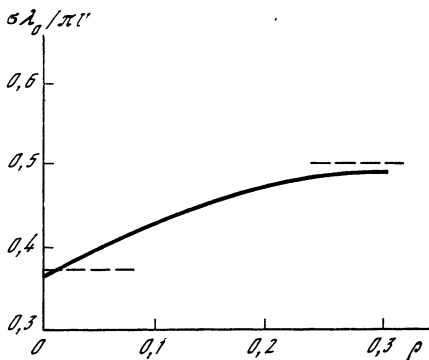
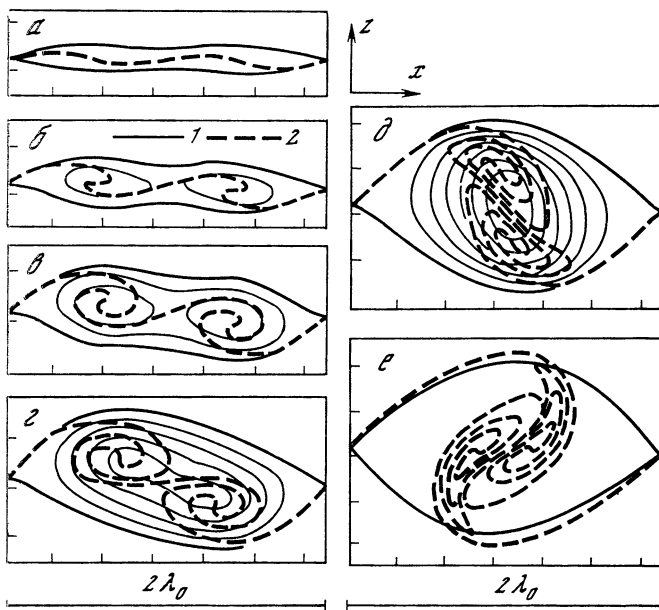


Рис. 4. Процесс слияния вихрей [12]

1 — линии тока, 2 — траектории частиц, находившихся в плоскости симметрии исходного сдвигового слоя ($2\pi\delta/\lambda_0 = 0,43$, $2\pi\delta/\lambda_2 = 0,215$, $Re = 100$); а — $\tau = \lambda_0/U = 0,5$, б — 1,0, в — 1,5, г — 2,0, д — 2,5, е — 3,0



ставлена на рис. 3. Видно, что при значении $\rho = 0,25$, соответствующем наблюдающейся в экспериментах степени концентрации завихренности после свертывания сдвигового слоя [16], инкременты σ достигают асимптотических значений, равных значениям σ для цепочки точечных вихрей [17]. Таким образом, концентрация завихренности в КС является определяющим фактором для вторичной неустойчивости сдвигового слоя и зависимость ее инкремента от длины волны возмущения в первом приближении можно определить, считая завихренность сосредоточенной в точечных вихрях:

$$\sigma(\lambda) = 2\pi U (1 - \lambda_0/\lambda)/\lambda, \quad (3)$$

где λ_0 — период цепочки первичных КС.

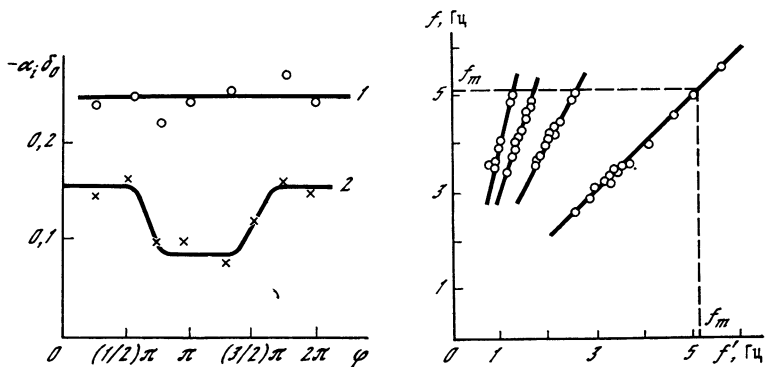


Рис. 5. Зависимость инкремента моды на основной частоте $\sim \exp(i2\pi t f)$ (прямая 1) и субгармоники $\sim \exp(i\pi t f + \varphi)$ (кривая 2) от сдвига фаз φ [19] $0,3 < x < 2,5$ см, $R = 0,73$, $U = 5,19$ см, вода

Рис. 6. Зависимость частоты f моды, имеющей максимальную амплитуду на начальном участке сдвигового слоя, от частоты f' возмущения, возбуждающего сдвиговый слой [18]

$U_1 = 9,5$ см/с, $U_2 = 5$ см/с, вода

Из этого выражения следует, что уже линейный режим вторичной неустойчивости обеспечивает преимущественный рост возмущений удвоенного периода. Как показывают численные решения, развитие этих возмущений в дальнейшем и приводит к слиянию первичных структур с образованием новых КС больших масштабов (рис. 4). При этом процесс слияния и распределение завихренности во вновь образовавшихся структурах зависят от разности фаз возмущений на основной частоте и субгармонике [11]. Поскольку в набегающем потоке эта разность фаз случайна, то слияние КС должно быть случайным процессом, и действительно, в некоторых экспериментах в одних и тех же условиях наблюдается разнообразие вариантов слияния: симметричное слияние, втягивание одной КС в атмосферу другой, дробление и частичное слияние [4]. Однако часто процессы слияния оказываются хорошо повторяемыми [16, 18], свидетельствуя о том, что фазы мод на основной частоте и субгармонике не являются полностью независимыми, а в сдвиговом слое происходит не только частотная, но и фазовая селекция мод. Это подтверждают приведенные на рис. 5 экспериментально измеренные зависимости инкремента субгармоники от сдвига фаз [19]. Существенно, что сдвиг фаз оказывает влияние на усиление субгармоники при сравнительно низком уровне пульсаций ($u'/U \sim 10^{-2}$).

Следует отметить, что возбуждающиеся в сдвиговом слое возмущения даже на начальном участке не являются независимыми из-за влияния нелинейности взаимодействия с кромкой. Это вли-

яние настолько существенно, что при искусственном введении в набегающий поток слабых ($u'/U = 10^{-3} \div 10^{-2}$) низкочастотных пульсаций именно генерируемые вблизи кромки гармоника служат начальным возмущением для моды с частотой $f \approx f_m$ (рис. 6).

Таким образом, на динамику сдвигового слоя, кроме эффекта конкуренции, влияние оказывает также другой не менее важный эффект — синхронизация, который заключается в установлении в ансамбле взаимодействующих возмущений, имеющих вначале близкие или близкие к кратным частоты (масштабы), результирующего движения с вполне определенным периодом (масштабом). В итоге местоположения образования и слияния КС, несмотря на имеющийся статистический разброс, оказываются локализованными на определенных расстояниях вниз по потоку.

Подавление неустойчивости трехмерных возмущений. До сих пор мы полностью игнорировали трехмерные движения на том основании, что наиболее неустойчивыми являются двумерные моды. Однако очевидно, что на больших расстояниях вниз по потоку или на больших временах (при развитии сдвигового слоя во времени) необходим учет трехмерных возмущений. Прежде всего отметим, что по отношению к таким возмущениям стационарное решение (1) является неустойчивым.

На рис. 7 [15, 20] приведены инкременты представляющих наибольший интерес для динамики сдвигового слоя трехмерных возмущений с продольными волновыми числами k_0 и $k_0/2$. Обращает на себя внимание тот факт, что в первом случае инкременты убывают сравнительно медленно с ростом поперечного волнового числа, а во втором случае наибольшим инкрементом обладают квазидвумерные ($k_{\perp} < k_0$) возмущения. Отметим, что цепочка структур оказывается неустойчивой даже по отношению к возмущениям, которые в отсутствие концентрации завихренности не нарастают.

На первый взгляд кажется, что развитие трехмерной неустойчивости должно разрушать двумерные структуры. Однако в экспериментах двумерные КС, образующиеся вследствие последовательных слияний первичных структур, наблюдаются на всех расстояниях вниз по течению, для которых к настоящему времени выполнены лабораторные измерения [21] вплоть до $x = 5\,000 \theta_0 \approx 3$ м, где θ_0 — толщина сдвигового слоя около кромки пластины. Более того, при искусственной турбулизации набегающего потока и пограничного слоя на расщепляющей пластине или при установлении на ней устройств, генерирующих трехмерные вихри, оказывается, что степень двумерности КС растет после первых нескольких слияний, т. е. вниз по потоку [22, 23].

Таким образом, имеется механизм конкуренции двумерных и трехмерных возмущений, ограничивающий рост последних. Вообще говоря, доказательство этого должно проводиться на основе нестационарных решений нелинейной задачи. Однако некоторые его особенности проявляются уже в линейном по трехмерным возмущениям приближении, и для его рассмотрения достаточ-

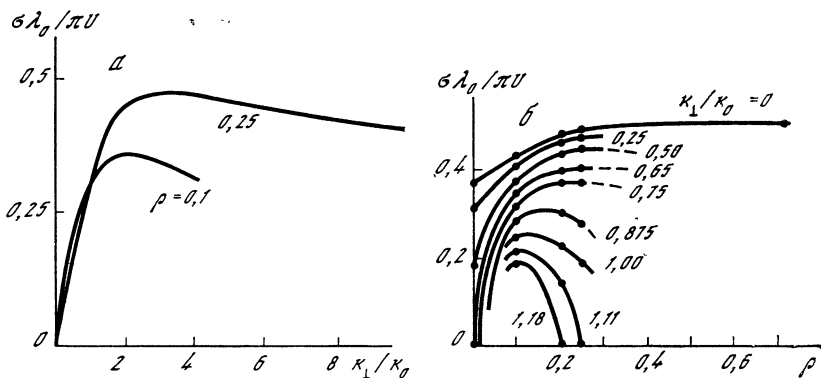


Рис. 7. Зависимости временных инкрементов периодических в пространстве мод от поперечного волнового числа k_{\perp} [15]

a — для мод основного периода $k_{\parallel} = k_0 = 2\pi/\lambda_0$; b — для мод удвоенного периода $k_{\parallel} = k_0/2$

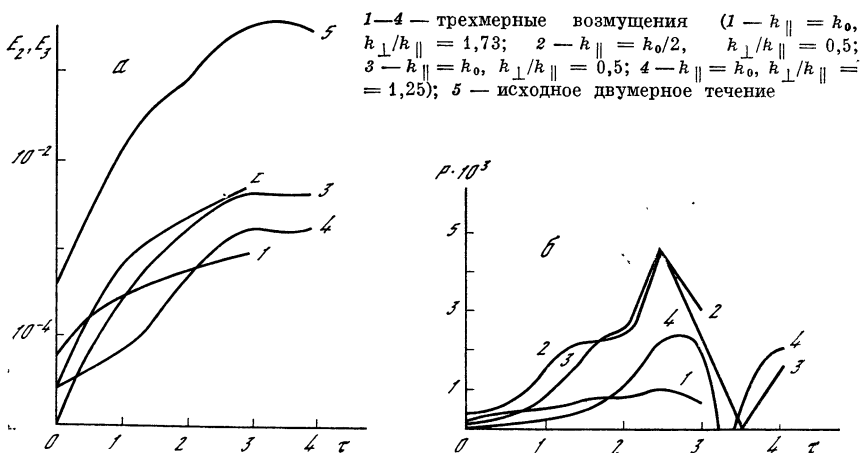
но учесть лишь нелинейность двумерных структур. Для этого можно воспользоваться уравнениями [20]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} + \rho^{-1}\nabla P - \nu\Delta\mathbf{V} = \\ = -\frac{1}{L} \int_{y_0}^{y_0+L} (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} dy = W; \quad \nabla\mathbf{V} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{u} + \rho^{-1}\nabla p - \nu\Delta\mathbf{u} = 0, \quad \nabla\mathbf{u} = 0,$$

где $\mathbf{V} = iV_x + kV_z$ — поле скорости, а P — давление основного двумерного течения; $\mathbf{u} = iu_x + ju_y + ku_z$ — поле скорости, а

Рис. 8. Изменение во времени энергии двумерных (E_2) и трехмерных (E_3) возмущений (a) и скорость передачи энергии от двумерных возмущений к трехмерным (b) [20]



p — давление трехмерного возмущения:

$$u_x = u_1(x, z, t) \cos k_{\perp} y, \quad u_y = u_2(x, z, t) \sin k_{\perp} y,$$

$$u_z = u_3(x, z, t) \cos k_{\perp} y, \quad p = p_0(x, z, t) \cos k_{\perp} y.$$

Результаты численных решений этих уравнений [20] представлены на рис. 8. Видно, что в отсутствие слияния свертывание сдвигового слоя (при $\tau < 2$) и медленная эволюция двумерных структур не приводят к ограничению трехмерных возмущений. Насыщение усиления наступает в тех случаях, когда происходит слияние двумерных структур (на рис. 8 при $\tau > 2$). Характерные зависимости от времени скорости передачи энергии от двумерного течения к трехмерным возмущениям представлены на рис. 8, б [20]. Из приведенных зависимостей видно, что перестройка двумерного течения, обусловленная слиянием двумерных структур, — это именно тот процесс, который ограничивает рост трехмерных возмущений уже в линейном по отношению к ним приближении. В результате такой перестройки лишь часть энергии передается трехмерным возмущениям, являющимся нарастающими собственными модами новой структуры течения, а часть преобразуется в затухающие моды или моды сплошного спектра. Этим и обусловлено уменьшение скорости роста энергии трехмерных возмущений и преобладающая роль квазидвумерных КС на всех расстояниях вниз по потоку [21, 22].

Особенности формирования КС в струях. Напомним, что в простом сдвиговом слое выживание двумерных структур на больших расстояниях было обусловлено преобладанием двумерной неустойчивости над трехмерной и подавление последней в результате слияния КС. В случае осесимметричной струи аналогичная ситуация имеет место лишь до тех пор, пока поперечные размеры δ ядра КС, в котором сконцентрирована завихренность, существенно меньше диаметра d струи. В результате слияний размеры ядра увеличиваются и с некоторого момента начинает сказываться влияние кривизны сдвигового слоя. Представление о ее влиянии на дальнейшее развитие струи можно получить, воспользовавшись линейной теорией неустойчивости с учетом реального профиля скорости.

На рис. 9 приведены инкременты для двух низших мод осесимметричной струи при различных отношениях ее радиуса к толщине сдвигового слоя [24]. Видно, что по мере его утолщения происходит смена наиболее неустойчивого возмущения — начиная с $d/2\theta = 6,25$ наибольшим инкрементом обладает не осесимметричная мода, а спирально-винтовая $\sim \exp[i(\alpha x \pm \varphi m - \omega t)]$, $m = 1$. Взаимодействие возбуждений с разной симметрией — сформировавшихся КС в виде осесимметричных вихревых колец и нарастающих спиральных возмущений — приводит к сложным трехмерным движениям в переходной области $6d \lesssim x \lesssim 20d$ и к исчезновению упорядоченных структур (по крайней мере, легко идентифицируемых). Ниже по течению формируется колоколо-

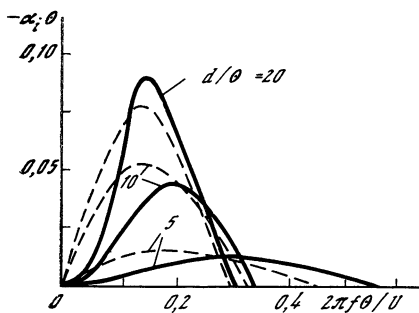


Рис. 9. Инкременты осесимметричной (сплошные кривые) и винтовой (штриховые кривые) мод в цилиндрической струе [24]

дающиеся в дальней зоне (в [25] при $Re \sim 10^3$ до $x \approx 160d$) КС носят на себе отпечатки этой симметрии и имеют вид спиральных вихрей.

Похожим образом ведут себя плоские струи. На начальном участке чаще всего формируются симметрично расположенные структуры, но при $x \approx 6h$ (h — ширина струи) инкременты симметричных мод становятся существенно меньше, чем несимметричных, и в области $6h \lesssim x \lesssim 10h$ происходит смена симметрии, сопровождающаяся усложнением движений. Однако при $x > 15h$ несимметричная мода становится доминирующей и в дальней зоне плоской струи наблюдаются крупномасштабные структуры с чередующимися знаками завихренности, расположенные в шахматном порядке (в [26] при $Re \sim 10^4$ до $x = 80h$).

2. Влияние КС на свойства мелкомасштабных и глобальных движений

Итак, высокая упорядоченность крупномасштабных двумерных (или, точнее, квазидвумерных) движений в свободных сдвиговых слоях является фактором, установленным и подтвержденным многочисленными экспериментами. Сейчас более удивительным является то обстоятельство, что мелкомасштабные и глобальные движения также не являются полностью хаотическими [27—30].

Наиболее существенный момент здесь заключается в том, что первопричиной упорядоченности движений всех масштабов являются КС и их динамика.

Генерация мелкомасштабных вихрей в деформирующем поле скорости КС. Хотя исследования вопроса о происхождении и свойствах мелкомасштабных вихрей в КС только начинаются, уже предложены динамические модели [31, 32], которые качественно соответствуют экспериментальным наблюдениям [27—29]. Наиболее интересной здесь представляется построенная на основе численного и асимптотического анализа модель генерации мелкомасштабной завихренности в поле скорости, создаваемом крупномасштабными КС [31].

Двумерное поле скорости КС вблизи седловой точки (рис. 10) можно представить в виде

$$\mathbf{U} = i\gamma x - kyz,$$

где оси i и k выбраны вдоль сепаратрис линий тока. Поперечная завихренность ω_y постоянно уносится из этой области и наконец становится пренебрежимо малой, а завихренность $\omega = i\omega_1(y, z) + k\omega_2(y, z)$ ориентируется вдоль оси растяжения, так что $\omega \rightarrow i\omega_1(y, z)$ [31]. Рассмотрим эволюцию ω , считая, что в начальный момент она имеет только эту наиболее существенную компоненту. Тогда уравнение движения для нее можно представить в виде [31]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial t} - \gamma \left(z \frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \omega_1 \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial z^2} \right) = \\ = -u_y \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \tilde{u}_z \frac{\partial \omega_1}{\partial z} = L, \end{aligned} \quad (5)$$

где введена новая скорость $\tilde{u}_z = u_z + \gamma z$, так что u_y и \tilde{u}_z — скорости, индуцируемые завихренностью ω_1 .

В линейном приближении ($L = 0$) решение уравнения (5) имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_1(y, z, t) = \left\{ 4\pi\nu \left[t \int_0^t G^2(t') dt' \right]^{1/2} \right\}^{-1} G(t) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dy' dz' \times \\ \times \left\{ \omega_1(y', z', 0) \exp \left[-\frac{(y-y')^2}{4\nu t} - \frac{(z'-zG(t))^2}{4\nu \int_0^t G^2(t') dt'} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $G(t) = \exp \int_0^t \gamma(t') dt'$. Из этого решения следует, что завихренность ω_1 , первоначально заключенная в слое с характерным размером a , за время $\tau \approx \gamma^{-1} \ln(a/a_0)$ стягивается в слой толщиной $a_0 \approx (\nu/\gamma)^{1/2}$ с близким к гауссовому распределением по координате z :

$$\omega_1 \sim \exp(-z^2/a_0^2).$$

Учет нелинейности в уравнении (5), т. е. самоиндуцированного движения завихренности, не изменяет существа явления, хотя и приводит к качественно отличающимся следствиям. Вследствие этого движения завихренная жидкость смещается из плоскости $z = 0$ (рис. 11). Это, в свою очередь, приводит к появлению скорости, направленной к центру вихря, и концентрации завихренности вблизи него. В асимптотике образуется цилиндрический вихрь, из-за быстрого вращения которого усредненное действие плоских деформаций равносильно действию осесимметричных деформаций, и поэтому размер области локализации завихренности такой же, как и в предыдущем случае ($\sim a_0$).

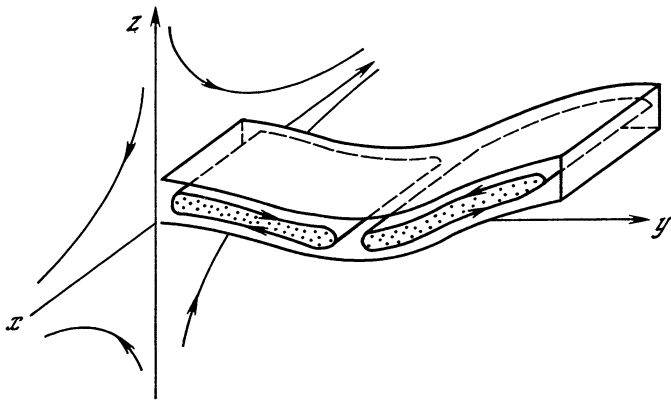


Рис. 10. Деформирующее поле скорости КС вблизи седловой точки [31]

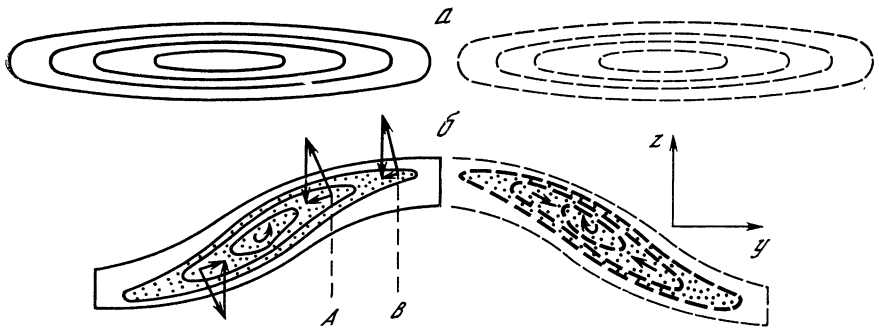


Рис. 11. Фрагмент, иллюстрирующий возникновение скорости, направленной к центру вихря

a — без учета, *б* — с учетом самоиндуцированной скорости

Обсуждаемый выше механизм генерации мелкомасштабных вихрей должен быть существенным для сдвигового слоя, так как характерное время его проявления $t \sim (U/\lambda)^{-1}$ сравнимо со временем развития других процессов, например неустойчивости. При слиянии КС часть мелкомасштабной завихренности вовлекается в ядра вновь образующихся структур, а часть перестраивается в соответствии с изменением поля деформирующей скорости. Поскольку среднее значение продольной завихренности равно нулю, то наиболее вероятной здесь является система одинаковых вихрей с чередующимися знаками завихренности. Это согласуется с представленными на рис. 12 результатами [29] машинной обработки последовательности снимков визуализированного сдвигового слоя [28]. Естественно, данная модель не исчерпывает все возможные механизмы генерации упорядоченных мелкомасштабных движений. Например, можно ожидать, что и в ядрах КС генерируются интенсивные мелкомасштабные вихри подобно тому, как это про-



Рис. 12. Фрагмент трехмерных структур, наблюдаемых в сдвиговых течениях [29]

исходит во вращающейся турбулизованной жидкости [33, 34], однако экспериментальные данные по их наблюдению в сдвиговых течениях пока отсутствуют.

Следует отметить, что приведенные выше модельные представления и результаты экспериментов [27—29] свидетельствуют о возможности бескаскадного обмена энергией структур с существенно различающимися масштабами — КС с масштабами порядка толщины сдвигового слоя δ и продольных вихрей с тейлоровским микромасштабом $\delta_T = \delta/\sqrt{Re}$. Форма и размеры продольных вихрей в определенных пределах не зависят от начальных условий, а определяются вязкостью и скоростью деформации $\gamma \sim U/\delta$, которая в данном случае играет роль неравновесности среды. Это позволяет считать такие вихри автоструктурами, хотя в общем случае и нестационарными, поскольку $\gamma = \gamma(t)$.

Связь динамики КС с глобальными свойствами течения. Связь динамики КС с глобальными свойствами течений, взаимодействующих с препятствиями, естественна и подтверждается многочисленными экспериментами и соответствующими им моделями (см., например, обзор [35]). Взаимодействие КС с препятствиями настолько

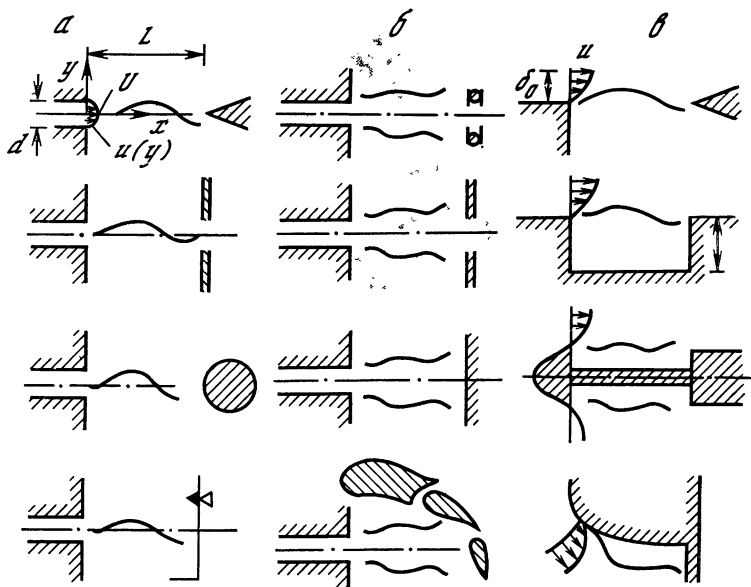


Рис. 13. Варианты течений с обратной связью

a — осесимметричные струи; *б* — плоские струи; *в* — сдвиговые слои [35]

существенно, что может приводить к абсолютной неустойчивости и возникновению автоколебаний. Очевидно, что в этом случае корректной является постановка задачи, в которой рассматривается развитие во времени всего пространственно неоднородного течения. Однако, учитывая, что оно наиболее чувствительно к возмущениям вблизи кромки, можно вдали от нее и от препятствия воспользоваться моделью свободного сдвигового слоя с конвективной неустойчивостью, а влияние взаимодействия учесть введением обратной связи.

Возможные варианты течений с обратной связью, в которых возбуждаются автоколебания, схематично представлены на рис. 13. В пространстве между расщепляющей пластиной и препятствием развивается конвективная неустойчивость сдвигового слоя, в результате которой формируются КС. При взаимодействии с препятствием они разрушаются, что приводит к существенному изменению индуцируемого ими поля скорости, и эти изменения вызывают возбуждения сдвигового слоя вблизи кромки. Это возбуждение модулирует цепочку формирующихся на начальном участке течения вихрей, частота следования которых близка к частоте наиболее неустойчивой моды сдвигового слоя. Вниз по течению из-за развития неустойчивости на частоте модуляции происходит слияние мелких вихрей, которое и приводит к формированию КС, взаимодействующих с препятствием. Возможна и более сложная динамика с несколькими каскадами слияний, как коллективных, так и парных. В результате происходит замыкание цепи

обратной связи и возбуждение автоколебаний на частотах, определяемых условиями резонанса:

$$L/V_{к.с} + L/V_{о.с} = N/f, \quad (7)$$

где $V_{к.с}$ — эффективная конвективная скорость КС, а $V_{о.с}$ — скорость передачи возмущений в обратном канале цепи обратной связи.

Установление автоколебаний приводит к слабой зависимости возмущений вблизи кромки от возмущений в набегающем потоке. Поэтому поведение КС становится более регулярным в том смысле, что местоположения их образования и слияния локализованы на определенных расстояниях вниз по потоку. В связи с этим следует вновь вернуться к рассмотрению свободных сдвиговых течений в отсутствие препятствий. Дело в том, что в таких течениях также имеется механизм обратной связи, аналогичный рассмотренному выше. Источником возмущений на кромке в этом случае являются процессы, связанные с динамикой КС, такие, например, как слияние вихрей или сильная деформация и разрушение КС, которое имеет место в осесимметричных струях в конце участка с потенциальным ядром [36].

Так как амплитуды мод растут вниз по потоку экспоненциально, а поле, создаваемое вблизи кромки, убывает с ростом расстояния от нее до КС не быстрее, чем обратная степень расстояния ($U \sim x^{-n}$), то ясно, что усиление способно скомпенсировать ослабление в цепях обратной связи. Однако влияние этого эффекта на динамику КС и всего течения в целом однозначно определить значительно труднее, чем в предыдущем случае. Во-первых, интенсивность воздействия КС на течение около кромки в свободном сдвиговом слое значительно слабее, так что оно будет подавляться или маскироваться воздействием возмущений в набегающем потоке. Во-вторых, в отсутствие внешнего масштаба длины, обуславливающего дискретность спектра, регулярные автоколебания могут возникнуть лишь при наличии эффективных механизмов конкуренции и синхронизации. В значительной степени этими причинами обусловлен недостаток экспериментальных данных, по которым можно было бы судить о роли обратной связи в свободных сдвиговых течениях. Тем не менее имеются косвенные подтверждения, что она может быть существенной.

Тщательный анализ [30] сигнала скорости, измеренной вблизи сопла, показал, что колебания на частоте наиболее неустойчивой моды имеют низкочастотную модуляцию. В спектре сигнала модуляции четко прослеживается пик на частоте моды ($St = fd/U = 0,31$, d — диаметр сопла), достигающей наибольшей амплитуды и формирующей КС на расстояниях от сопла $x \sim (2 \div 4) d$. Как известно [36], эта структура при прохождении вблизи конца потенциального ядра струи $x = (4 \div 5) d$ сильно деформируется. По-видимому, связанная с этой деформацией нестационарность скорости и создает модуляцию течения вблизи сопла. Это служит основанием для гипотезы [30], заключающейся в том, что возмущения, создаваемые слиянием вихрей, также могут модулировать

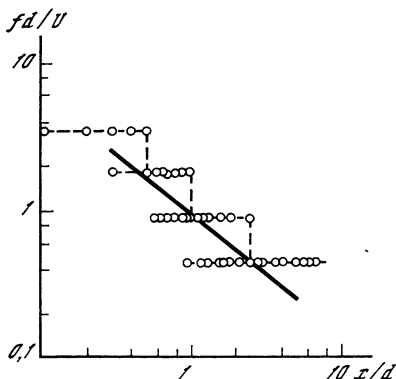


Рис. 14. Частота прохождения вихрей в осесимметричной струе, полученная в различных реализациях [37]

Прямая линия — зависимость, построенная по уравнению (8) при $N = 2$ [6]

течение вблизи кромки. При этом естественно ожидать наибольшего эффекта при выполнении резонансных условий, аналогичных условию (7):

$$\lambda^{(i)}/V_{\text{к.с}} + \lambda^{(i)}/V_{\text{о.с}} = N/f^{(i)}, \quad (8)$$

где $\lambda^{(i)}$ — расстояние, на котором происходит i -е слияние, а $f^{(i)}$ — частота следования образующейся структуры.

На рис. 14 приведены результаты измерения зависимости частоты прохождения структур от расстояния до сопла [37] и зависимости, построенные по соотношению (8). Видно, что условие (8) действительно определяет местоположение слияний, если их определить значением координаты x , после которой вихри предыдущей генерации больше не наблюдаются.

Приведенные результаты показывают, что поля скорости и давления, индуцируемые КС, влияют на течение вблизи кромки, а механизм обратной связи позволяет объяснить тот факт, что каждое последующее слияние происходит на вдвое большем расстоянии, чем предыдущее. По-видимому, вклад этого механизма в динамику сдвигового течения зависит от уровня пульсаций в набегающем потоке. В связи с этим отметим, что роль обратной связи может быть существенной даже тогда, когда интенсивность возмущений, индуцируемых слиянием структур, меньше, чем интенсивность возмущений в набегающем потоке. Индуцируемое КС поле скорости, обладая более высокой скоррелированностью вдоль кромки пластины (сопла), будет более эффективно и в возбуждении двумерных (осесимметричных) мод сдвигового слоя.

Таким образом, слияние КС оказывается существенным механизмом не только с точки зрения рассмотренного ранее подавления трехмерных возмущений в сдвиговом слое и выживания КС на больших расстояниях, но и с точки зрения регуляризации всего течения в целом.

3. Динамическая природа турбулентности в сдвиговых течениях

Выше для акцентирования внимания на механизмах возникновения и поддержания упорядоченных движений наличие структур рассматривалось как антипод хаоса — турбулентности. Такое противопоставление следует считать чисто условным: часто то и другое является результатом действия одних и тех же физических

факторов — неравновесности, нелинейности и диссипации. При этом, хотя переход к хаотическому движению может осуществляться при весьма малом изменении параметров системы (при переходе через критическое число Рейнольдса Re_0), возникающий хаос даже далеко от границы перехода будет сохранять следы исчезнувшего порядка. Поэтому их противопоставление приводит к недооценке или переоценке роли упорядоченных структур и к неоднозначности трактовки экспериментальных данных (см., например, дискуссию в работах [22, 38]).

Более естественным представляется подход, заключающийся в рассмотрении взаимосвязи порядка и хаоса. Плодотворность такого подхода демонстрируется исследованиями турбулентности внутренних течений, например течений Куэтта—Тейлора и течений в конвективных ячейках. Как известно (см., например, [39, 40]), случайные пульсации скорости в таких течениях соответствуют движению конечномерной динамической системы на странном аттракторе. Конечномерная природа турбулентности в этих случаях даже при формальном подходе имеет наглядное объяснение: поле скорости внутреннего течения всегда можно представить в виде разложения по бесконечномерной системе собственных функций с дискретным спектром, а благодаря действию вязкости эта бесконечномерная система обрезается, превращаясь в конечномерную. Число мод, образующих таким образом динамическую систему, не столь уж велико (см., например, [41]).

При такой интерпретации может показаться, что для постановки задачи о конечномерной природе турбулентных пульсаций в свободных сдвиговых течениях нет оснований. Действительно, спектр возможных пространственных возмущений в таких течениях сплошной, и поэтому даже при учете вязкости их число не должно быть конечным. Однако различие выглядит не столь принципиальным, если учесть, что фактически переход к турбулентности в обоих случаях осуществляется через стохастизацию взаимодействующих структур и развивающихся на них возмущений. Поэтому можно ожидать, что и в сдвиговых течениях структуры не только служат носителями порядка, но и приводят к возникновению турбулентности динамического происхождения, образом которой является движение динамической системы на странном аттракторе с размерностью, конечной¹ даже при значительном превышении надкритичности ($Re \gg Re_0$).

Решение этого вопроса должно состоять, во-первых, из выяснения физических механизмов, приводящих к стохастизации в детерминистических моделях течения, во-вторых, из решения общей проблемы о возможности установления в полубезграницных кон-

¹ Здесь термин «конечный» используется в узком смысле слова и подразумевает, что величина размерности значительно меньше, чем определяемая из асимптотических оценок, которые используются для обоснования принципиальной возможности дискретизации уравнений Навье—Стокса при получении их численных решений [42].

вективных системах с бесконечным числом степеней свободы конечномерных турбулентных движений, развивающихся вдоль системы, и, в-третьих, из прямых экспериментальных доказательств соответствия нерегулярных пульсаций в сдвиговых течениях движению на конечномерном странном аттракторе.

Стохастизация процессов переноса в двумерном поле скорости крупномасштабных КС. Движение частиц жидкости в поле КС является наиболее наглядным примером, демонстрирующим взаимосвязь регулярных и стохастических процессов, учет которой необходим для правильной интерпретации результатов визуального наблюдения сдвиговых течений. При описании этого движения для аппроксимации невозмущенного поля скорости можно воспользоваться функцией тока, определяемой решением (4). Движения частиц в невозмущенном поле происходят вдоль линий тока и разделяются сепаратрисой $\text{ch } 2\pi z/\lambda_0 - \rho \cos 2\pi x/\lambda_0 = 1 + \rho$ на финитные и нефинитные. Однако такое разделение имеет место только в случае невозмущенной цепочки КС. В действительности это не так: выше по течению происходит усиление возмущений, а ниже — слияние КС. Оказывается, что даже в предположении малости и регулярности изменений поля скорости, вносимых этими процессами, движение жидких частиц будет стохастизоваться [43, 44].

Действительно, поскольку на фазовой поверхности (в данном случае цилиндре) сепаратриса образует петлю, то такое возмущение, как известно (см., например, обзор [45]), может привести к образованию, теперь уже в расширенном фазовом пространстве (x, z, t) , гомоклинической структуры. Наличие такой структуры, являющееся фактической гарантией стохастичности движения в системе, может быть установлено с помощью критерия Мельникова [46]. Поскольку в данном случае возмущения не вносят диссипацию в исходную гамильтонову систему, то условия критерия [46], а следовательно, и стохастичности, выполняются, как легко убедиться, для широкого класса возмущений. В реальном физическом пространстве проявление такой стохастичности состоит в том, что пролетные и захваченные частицы время от времени меняются ролями. Поэтому между КС на их периферии будет происходить стохастический обмен завихренностью, приводящий к нерегулярной модуляции ее распределения в пространстве и времени.

Стохастизация цепочек КС. В случае КС со сконцентрированной в ядрах завихренностью ($\rho \approx 1$) линии тока, определяемые выражением (1) с заменой $U \rightarrow 2U$, $(x, z) \rightarrow (x/2, z/2)$, описывают также относительное движение центров КС с четными и нечетными номерами на нелинейной стадии развития субгармоники. Поэтому вывод предыдущего подраздела о возникновении стохастичности под влиянием малых регулярных возмущений справедлив и для движения КС, а следовательно, и для всего поля скорости в целом.

Хотя приведенные выше примеры демонстрируют наличие динамических механизмов стохастизации, вопрос о роли, которую они играют в полуограниченном сдвиговом слое, остается откры-

тым, поскольку рассмотрение было проведено в системе координат, движущейся вместе с КС. Такое рассмотрение не учитывает уже отмечавшееся влияние взаимодействия КС с кромкой расщепляющей пластины и возникновения обратной связи, которая может качественно изменить характер стохастичности. В частности, даже при пренебрежимо малых потерях, вносимых вязкостью, возможно возникновение «притягивающего хаоса» — странного аттрактора, связанного с появлением в системе с обратной связью абсолютной неустойчивости, для которой конвективный снос возмущений эквивалентен диссипации.

В связи с этим отметим, что обратная связь, которую мы рассматривали ранее как селектирующий и упорядочивающий фактор, в данном случае способствует стохастизации возмущений, связанной с взаимодействием основной частоты и субгармоники. Для примера укажем, что даже в приближении фиксированной пространственной структуры поля скорости модельные уравнения, учитывающие лишь нелинейности низших порядков

$$\begin{aligned} A_{tt} - \nu_1 (1 - \gamma_1 A^2) A_t + \omega_1^2 A + \beta_1 A^3 &= \beta AB, \\ B_{tt} - \nu_2 (1 - \gamma_2 B^2) B_t + \omega_2^2 B + \beta_2 B^3 &= \beta A^2, \end{aligned} \quad (9)$$

демонстрируют в широкой области параметров наличие странного аттрактора, размерность D которого в зависимости от коэффициента обратной связи ($\sim \nu$) варьируется в пределах $2 < D < 4$ [47].

Таким образом, потеря регулярности существенного для сдвигового слоя процесса генерации субгармоники и связанного с ним слияния вихрей может происходить вследствие собственной стохастической динамики течения. Возможно, это является одной из причин наблюдаемого в одних и тех же условиях разнообразия вариантов слияния: симметричное слияние, втягивание одной КС в атмосферу другой, дробление и частичное слияние [4].

Стохастизация мелкомасштабных движений. Обычно считается, что мелкомасштабная турбулентность формируется в результате многокаскадного процесса передачи энергии вверх по спектру и эта многокаскадность приводит к потере памяти о свойствах крупномасштабной структуры течения и к установлению локальной изотропии. Однако в турбулентных сдвиговых течениях с числами Рейнольдса $Re \sim 10^4 \div 10^6$, обычно реализующихся в лабораторных экспериментах, полная локальность и изотропность не достигаются [48]. Одной из причин может быть уже обсуждавшаяся выше бескаскадная генерация мелкомасштабной турбулентности, но даже без учета этого из оценок, выполненных на основе феноменологических моделей каскадного процесса [48], следует, что при $Re \sim 10^6$ он не может обеспечить потерю памяти об анизотропии крупномасштабного поля скорости. В этих условиях существенными могут оказаться также механизмы стохастизации мелкомасштабных структур, связанные с их собственной динамикой.

Сейчас нельзя указать конкретные ситуации, в которых роль динамических механизмов стохастизации является определяющей, поскольку получение доступных анализу моделей непосредствен-

но из уравнений Навье—Стокса пока не представляется возможным, а достаточно полные экспериментальные данные, необходимые для построения феноменологических моделей, отсутствуют. Можно, однако, ожидать, что в структуре, представляющей упаковку вихрей разного знака (см. рис. 12), и в течении Куэтта—Тейлора переходы к стохастичности будут иметь много общего.

Конечномерность аттракторов в бесконечномерных системах. Возможность существования конечномерных аттракторов в бесконечномерных системах — сейчас уже установленный факт. В качестве примера можно указать систему описываемую уравнением с запаздыванием [49, 50]

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{ax(t-\tau)}{1 + [x(t-\tau)]^{10}} - bx(t), \quad (10)$$

в которой при $a = 0,2$, $b = 0,1$ и $\tau \simeq 10 \div 100$ размерность не превышает значения, близкого к 10. Исследования феноменологических моделей полубезграничных сред также показывают возможность установления в системе со сколь угодно большим числом степеней свободы стохастического режима с конечной размерностью. Здесь следует отметить модель, основанную на дискретном аналоге уравнения Гинзбурга—Ландау с комплексными коэффициентами

$$da_j/dt + \alpha(a_j - a_{j-1}) = a_j(1 - \delta|a_j|^2) + \kappa(a_{j+1} + a_{j-1} - 2a_j), \quad (11)$$

которая среди исследованных моделей наиболее естественно воспроизводит развитие турбулентности вниз по потоку. Эта модель учитывает: 1) нелинейное развитие возмущений (например, в структуре, представленной на рис. 12); 2) связь между соседними структурами, например, за счет возмущений, распространяющихся по соединяющим: структуры вихревым нитям; 3) анизотропию, возникающую из-за конвективного сноса.

Как показывают исследования [51—54], в такой системе даже в отсутствие передачи возмущений вверх по потоку ($\kappa = 0$) возможно установление турбулентного режима, параметры которого не зависят от начальных условий, а определяются лишь степенью неравновесности среды. Размерность аттрактора D , рассчитанная по колебанию на j -й ячейке, начиная с $j = 20$, практически не изменяется ($D = 3$ при $\text{Re } \alpha = 0,5$; $\text{Im } \alpha = 1,77$, $\text{Re } \delta = 1$, $\text{Im } \delta = 5,0$, $a_1 - a_0 = 0$, $\kappa = 0$). Происхождение конечномерности стохастического движения в этом случае имеет сходство с происхождением упорядоченного движения — различные возбуждения оказываются в сильной степени связанными, в частности синхронизованными.

Прямое доказательство конечномерной природы турбулентности в сдвиговых течениях должно опираться на реконструкцию странного аттрактора по реализации скорости и измерении его размерности. Пока известны лишь два подобных эксперимента, и на них целесообразно остановиться подробнее.

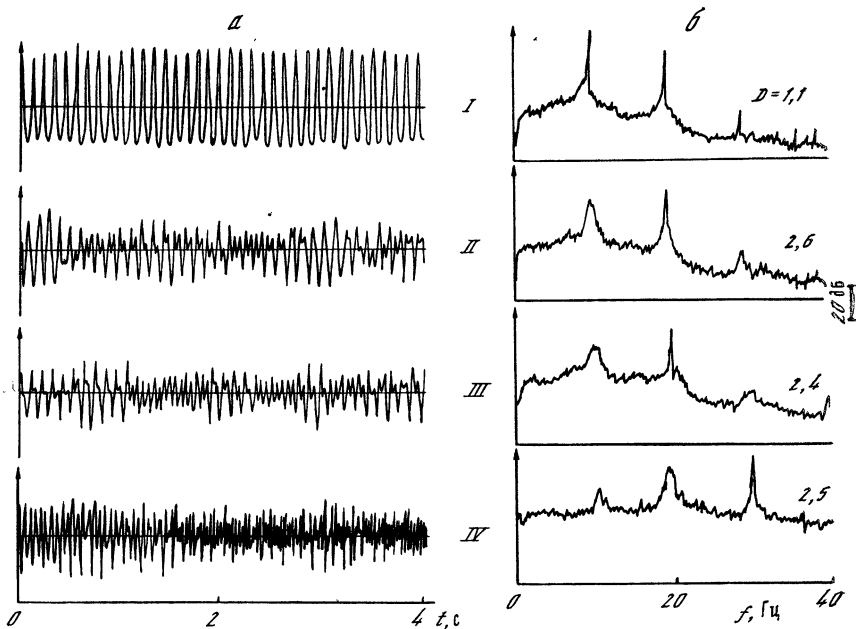


Рис. 15. Реализация (а) и спектры (б) пульсаций скорости в точке при скоростях потока $U = 9,8$ (I), $10,2$ (II), 11 (III), $24,2$ м/с (IV) [56]

Эксперименты по установлению конечномерности аттрактора в сдвиговом течении с обратной связью [55, 56]. Эксперименты проводились со сдвиговым течением типа затопленной струи $Re \sim 10^5$ с искусственной акустической обратной связью. В качестве цепи обратной связи использовался обратный канал аэродинамической трубы замкнутого типа, в открытой рабочей части которой и реализовывалось исследуемое течение. Информация о гидродинамических возмущениях передавалась в цепь обратной связи за счет трансформаций пульсаций скорости в акустические возмущения на кромке диффузора. Обратная трансформация происходила на выходе из сопла. Измерялись пульсации скорости (термоанемометром) и пульсации давления (конденсаторным микрофоном). Типичные реализации установившихся пульсаций скорости в точке при различных скоростях потока представлены на рис. 15, а. Для диагностики течения строился спектр мощности пульсаций (рис. 15, б), их автокорреляционная функция и по одной наблюдаемой определялась размерность аттрактора [55, 56].

Обработка экспериментальных данных, на основании которой делался вывод о конечномерности аттракторов, соответствующих режимам, реализации и спектры которых представлены на рис. 15, заключалась в следующем. С помощью известного алгоритма Такенса [57] восстанавливался фазовый портрет аттрактора в некотором пространстве конечной размерности M , затем измерялась размерность D аттрактора как функция размерности пространства.

Значение M^* , при котором функция $D(M)$ достигала насыщения, и определяло искомую размерность аттрактора.

Согласно [57], траектория $Y(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ в фазовом пространстве течения (отвечающая реализации $u(t)$) заменялась траекторией $X(t) = \{x_k(t), \dots, x_k[t + (M - 1)\tau]\}$, где интервал квантования во времени τ выбирался в соответствии с теоремой отсчетов: $\tau \leq 1/2 F_m$ (F_m — верхняя граница спектра $u(t)$). Оценка размерности проводилась по значению корреляционного интеграла

$$\begin{aligned} C(r) &= \frac{1}{N_0^2} \sum_i \sum_j H(r - \|X_i - X_j\|) = \\ &= \frac{1}{N_0^2} \sum_i N_r^{(i)} = \frac{1}{N_0} \langle N_r^{(i)} \rangle = \frac{N_r}{N_0}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $H(r)$ — функция Хевисайда; X_i — точка в M -мерном «фазовом» пространстве; $N_r^{(i)}$ — число точек в r -й окрестности i -й точки; N_r — среднее число точек, попадающих в шар радиусом r ; N_0 — полное число точек в обрабатываемом отрезке реализации. При малых r корреляционный интеграл зависит от r степенным образом [58]:

$$C(r) = r^v \exp(-KM\tau) \quad (13)$$

(K — энтропия Колмогорова). Из (12), (13) следует

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N_r}{\ln r} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(v + \frac{\ln N_0 - KM\tau}{\ln r} \right) = v. \quad (14)$$

Поскольку $\ln N_r = v \ln r + \ln N_0 - KM\tau$, размерность можно оценивать непосредственно по зависимости $\ln N_r$ от $\ln r$ при конечных r , не переходя к пределу при $r \rightarrow 0$. Причем усреднение в (12) не обязательно проводить по всем N_0 значениям i , поскольку частные суммы $N_r^{(i)}$ обнаруживают ту же степенную асимптотику, что и $C(r)$ [59].

Подчеркнем, что наблюдаемые реализации (см. рис. 15) продуцируются реальным сдвиговым течением с присутствующими в нем неконтролируемыми пульсациями скорости (неустраняемая турбулентность потока). Поэтому данные реализации, строго говоря, не описываются динамической системой, т. е. детерминированными уравнениями без флуктуационных источников. Однако, поскольку исходная турбулентность потока присутствует во всех исследуемых режимах, в частности и в том, который мы считаем периодическим (см. рис. 15, I), следует отвлечься от этих пульсаций и, полагая выбранный режим «строго периодическим», нормировать обработку таким образом, чтобы при огрубленном (усредненном) описании этой реализации соответствовала размерность $D = 1$. Тогда естественно считать, что данный периодический режим, как и другие режимы, размерность которых (при той же обработке) окажется

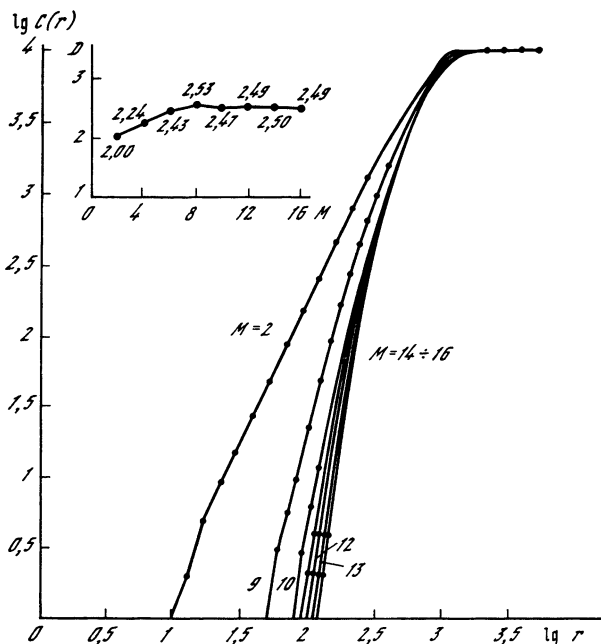


Рис. 16. Зависимости размерности D аттрактора от M и $\lg C$ от $\lg r$ при $U = 24,2$ м/с [56]

конечной, продуцируются одной и той же динамической системой². Процедура усреднения, о которой шла речь выше, заключается в вычислении ν при $r > r^*$, определяемом отношением сигнал/шум [58].

Результаты вычисления корреляционного интеграла и соответствующей обработки представлены на рис. 16. Стохастическим пульсациям при $U = 10,2$ м/с отвечает аттрактор с размерностью $D = 2,6$, при $U = 24,2$ м/с размерность аттрактора $D = 2,5$. Представленные результаты позволяют сделать вывод о динамическом происхождении нерегулярных пульсаций в исследуемом сдвиговом течении с обратной связью.

Знание размерности аттрактора дает возможность оценить число нормальных переменных (мод), формирующих рассматриваемый стохастический режим течения. Вместе с информацией об особенностях спектра мощности (кратности пиков и т. п.) это облегчает построение феноменологической динамической модели турбулентного течения. Например, при скорости $U = 10,2$ м/с в спектре мощности (см. рис. 15, б) имеются два четко выраженных пика

² При изменении параметра U в конечных пределах $\Delta U \approx 0,1U$ не наблюдалось каких-либо качественных изменений в реализации и спектрах стохастических сигналов. Это означает, что исследуемая система не находится вблизи границы бифуркаций и наблюдаемые режимы не связаны с усилением шумов потоком.

на частотах $f = f_0$ и $f \approx 2f_0$. Поскольку размерность соответствующего этому течению аттрактора меньше трех, естественно предположить, что стохастические пульсации в этом режиме могут быть описаны динамической системой лишь с двумя степенями свободы, например уравнениями (9).

Подчеркнем, что режимы стохастических пульсаций, обязанные своим происхождением нелинейной динамике потока, по-видимому, наблюдались и в других экспериментах, но они соответствующим образом не идентифицировались. В частности, для сдвигового слоя, натекающего на препятствие, в работе [60] получены качественно похожие на приведенные на рис. 15 реализации и спектры пульсаций.

Конечномерная динамическая стохастичность в затопленной струе с внешним периодическим воздействием [61]. Второй эксперимент, подтверждающий возможность существования конечномерной стохастичности, обусловленной собственной динамикой сдвигового течения, также связан с исследованием затопленной струи, но в существенно отличающихся условиях — внешняя обратная связь отсутствовала. Струя была устойчивой по отношению к малым возмущениям, так как имела сглаженный профиль средней скорости и низкое число Рейнольдса ($Re = 500$, диаметр $d = 3$ мм). Переход к турбулентности индуцировался внешней периодической модуляцией продольной скорости струи и происходил на больших расстояниях от ее начала ($x \approx 50d$).

В течении можно было выделить три зоны — ламинарную, переходную (слаботурбулентную) и турбулентную, положение которых зависело от амплитуды внешнего воздействия. В переходном режиме (рис. 17) размерность, рассчитанная по алгоритму, аналогичному описанному выше, оказалась равной 2,6, что свидетельствует о наличии сильной синхронизации возмущений на кратных частотах. В турбулентной области, хотя кривая $D(M)$ при больших M выходила на асимптотическое значение, определяющее размерность, оказалось, что это значение сильно зависит от интервала между отсчетами $\Delta t = p\tau$, используемыми для реконструкции фазового пространства аттрактора. Размерность возрастала от 2,5 при $p = 1$ до 7 при $p = 16$, и такой характер изменения свидетельствует о наличии на аттракторе (если он в данном случае существует) медленных движений, учет которых требует обработки более длинных реализаций.

Хотя приведенные выше модели и экспериментальные данные касаются лишь частных типов течений, их анализ позволяет сделать однозначный вывод о возможности существования конечномерной турбулентности динамического происхождения и о связанных с ней возможных постановках задач. Как мы видели в разд. 4, степени стохастичности различных переменных, характеризующих течение, могут отличаться друг от друга. Это относится и к реализациям, полученным при измерении одной и той же переменной, но в разных точках, как это имело место, например, в дискретной модели, обсуждавшейся выше. Поэтому естественно,

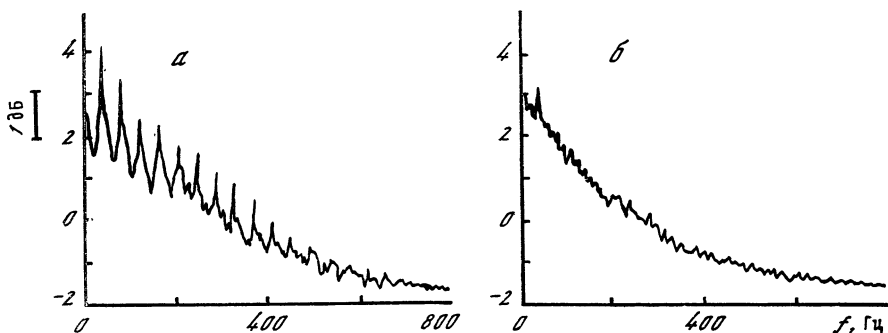


Рис. 17. Спектры пульсаций скорости в переходном (а) и турбулентном (б) режимах в возбужденной струе [61]

что в сдвиговых течениях величина размерности будет изменяться от точки к точке и ее можно использовать как объективную характеристику усложнения движения с ростом расстояния вниз по потоку.

В заключение отметим, что обоснование связи конечной размерности турбулентности в сдвиговом течении с существованием в нем структур обеспечило бы также объективный критерий для установления их наличия в течениях. Пока такие критерии отсутствуют, и выводы о наличии или отсутствии структур в течениях более сложных, чем сдвиговый слой, во многом зависят от субъективного фактора (о возникающих здесь проблемах см., например, [62, 63]).

Автор благодарит М. И. Рабиновича за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мансфельд А. Д., Рабинович М. И., Суцник М. М. Когерентные структуры и звук // Тр. II Всесоюз. симпоз. по физике акустогидродинамических явлений и оптоакустике. М.: Наука, 1982. С. 12—24.
2. Рабинович М. И., Суцник М. М. Когерентные структуры в турбулентных течениях // Нелинейные волны. Самоорганизация / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова, М. И. Рабиновича. М.: Наука, 1983. С. 58—84.
3. Гиневский А. С., Власов Е. В. Когерентные структуры в турбулентных течениях // Модели механики сплошных сред / Под ред. Г. В. Годяка. Новосибирск, 1983. С. 91—117.
4. Hussain A. K. M. F. Coherent structures — reality and myth // Phys. Fluids. 1983. Vol. 26. P. 2816—2850.
5. Кантуэлл Б. Дж. Организованные движения в турбулентных потоках // Вихри и волны / Под ред. В. Н. Николаевского. М.: Мир, 1984. С. 9—79.
6. Ho C. M., Huerre P. Perturbed free shear layers // Annu. Rev. Fluid Mech. 1984. Vol. 16. P. 365—424.
7. Drazin P. G., Reid W. H. Hydrodynamic stability. Cambridge: Univ. press, 1981. 525 p.
8. Huerre P., Monkewitz P. A. Absolute and convective instabilities in free shear layers // J. Fluid Mech. 1985. Vol. 159. P. 151—168.
9. Monkewitz P. A., Huerre P. The influence of the velocity ratio on the spatial instability of mixing layers // Phys. Fluids. 1982. Vol. 25. P. 1137—1142.

10. *Hussain Z. D., Hussain A. K. M. F.* Natural instability of free shear layers // *AIAA Journal*. 1983. Vol. 21. P. 1512—1517.
11. *Riley J. J., Metcalfe R. W.* Direct numerical simulation of a perturbed turbulent mixing layer // *AIAA 18th Aerospace Sci. Meeting*. Pasadena: Reprint AIAA 079—27C, 1980. 18 p.
12. *Corcos G. M., Sherman F. S.* The mixing layer: deterministic models of a turbulent flow. Pt. 1. Introduction and the two-dimensional flow // *J. Fluid Mech.* 1984. Vol. 139. P. 29—65.
13. *Stuart J. T.* On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers // *Ibid.* 1967. Vol. 29. P. 417—440.
14. *Lugt H. J.* Vortex flow and maximum principles // *Amer. J. Phys.* 1985. Vol. 53. P. 649—653.
15. *Pierrehumbert R. T., Widnal S. E.* The two- and three-dimensional instabilities of spatially periodic shear layer // *J. Fluid Mech.* 1982. Vol. 114. P. 59—82.
16. *Winant C. D., Browand F. K.* Vortex pairing: the mechanism of turbulent mixing-layer growth at moderate Reynolds number // *Ibid.* 1974. Vol. 63. P. 237—255.
17. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: Гостехтеориздат, 1947. 928 с.
18. *Ho C. M., Huang L. S.* Subharmonics and vortex merging in mixing layers // *J. Fluid Mech.* 1982. Vol. 119. P. 443—473.
19. *Zhang Y. Q., Ho C. M., Monkewitz P.* The mixing layer forced by fundamental and subharmonic // *Laminar-turbulent transition* / Ed. V. V. Kozlov. Berlin etc.: Springer, 1985. P. 385—393.
20. *Corcos G. M., Lin S. J.* The mixing layer: deterministic models of a turbulent flow. Pt. 2. The origin of the three-dimensional motion // *J. Fluid Mech.* 1984. Vol. 139. P. 67—95.
21. *Hussain A. K. M. F., Zaman K. B. M.* An experimental study of organized motions in the turbulent plane mixing layer // *Ibid.* 1985. Vol. 159. P. 85—104.
22. *Wyganski I., Oster D., Fiedler H., Dziomba B.* On the perseverance of quasi-two-dimensional eddy-structure in a turbulent mixing layer // *Ibid.* 1979. Vol. 93. P. 325—335.
23. *Breidenthal R.* Response of plane shear layers and wakes to strong three dimensional disturbances // *Phys. Fluids*. 1980. Vol. 23. P. 1929—1934.
24. *Michalke A., Hermann G.* On the invicid instability of a circular jet with external flow // *J. Fluid Mech.* 1982. Vol. 114. P. 343—359.
25. *Dimotakis P. E., Miake-Lye R. C., Papantoniu D. A.* Structure and dynamics of round turbulent jets // *Phys. Fluids*. 1983. Vol. 26. P. 3185—3192.
26. *Antonia R. A., Browne L. W., Rajagopalan S., Chambers A. J.* On the organized motion of a turbulent planet jet // *J. Fluid Mech.* 1983. Vol. 134. P. 49—66.
27. *Breidenthal R.* Structure in turbulent mixing layers and wakes using a chemical reaction // *Ibid.* 1981. Vol. 116. P. 1—24.
28. *Bernal L. P.* The coherent structure in turbulent mixing layers. II. Secondary streamwise vortex structure: *Phys. D. thesis*. Cal. Inst. Techn., 1981. 24 p.
29. *Jimenez J., Cogollos M., Bernal P. L.* A perspective view of the plane mixing layer // *J. Fluid Mech.* 1985. Vol. 152. P. 125—143.
30. *Laufer J.* Instability and turbulence in jets // *Transition and turbulence* / Ed. R. E. Meyer. N. Y.: Acad. press, 1981. P. 63—76.
31. *Lin S. J., Corcos G. M.* The mixing layer: deterministic models of turbulent flow. Pt. 3. The effect of plain strain on the dynamics of streamwise vortices // *J. Fluid Mech.* 1984. Vol. 141. P. 139—178.
32. *Neu J. C.* The dynamics of stretched vortices // *Ibid.* Vol. 143. P. 253—276.
33. *Бубнов Б. М., Голицын С. С.* Режим конвекции во вращающейся жидкости // *ДАН СССР*. 1985. Т. 281. С. 552—555.
34. *Hopfinger E. J., Browand K., Gagne Y.* Turbulence and waves in a rotating tank // *J. Fluid Mech.* 1982. Vol. 125. P. 505—534.

35. Рокуэлл Д. Колебания сдвиговых слоев, взаимодействующих с препятствиями // *Аэрокосмич. техника*, 1984. Т. 2. С. 12—38.
36. Yule A. J. Large-scale structure in the mixing layer of round jet // *J. Fluid Mech.* 1978. Vol. 89. P. 413—432.
37. Kibens V. Discrete noise spectrum generated by an acoustically excited jet // *AIAA Journal*. 1980. Vol. 18. P. 434—441.
38. Chandrsuda C., Metha R. D., Weir A. D., Bradshaw P. Effect of free-stream turbulence on large structure in turbulent mixing layers // *J. Fluid Mech.* 1978. Vol. 85. P. 693—704.
39. Brandstätter A., Suijft J., Swinney H. L. et al. Low-dimensional chaos in hydrodynamic system // *Phys. Rev. Lett.*, 1983. Vol. 51. P. 1442—1447.
40. Беляев Ю. Н., Яворская И. М. Экспериментальное исследование возникновения стохастичности в сферическом течении Куэтта // *Механика неоднородных систем* / Под ред. Г. В. Гадияка. Новосибирск, 1985. С. 6—31.
41. Eckman J. P. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems // *Rev. Mod. Phys.* 1981. Vol. 53. P. 643—654.
42. Constantin P., Foias C., Manley O. P., Teman R. Determining modes and fractal dimension of turbulent flows // *J. Fluid Mech.* 1985. Vol. 150. P. 427—440.
43. Aranson I. S., Rabinovitch M. I., Sushchik M. M. Stochastization of coherent structures by a periodic field // *Chaos and order in nature*/Ed. H. Haken. Berlin etc.: Springer, 1981. P. 54—63.
44. Кузнецова Л. М., Рабинович М. И., Сушик М. М. Влияние волн на процессы переноса в вихревых течениях // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1983. Т. 19. С. 53—59.
45. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Л. И. Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний // *УФН*. 1979. Т. 128. С. 579—624.
46. Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // *Тр. Моск. мат. о-ва*. 1963. № 2. С. 3—52.
47. Aranson I. S., Rabinovich M. I., Starobinets I. M. Transition in chaos // *Nonlinear and turbulent processes in physics*/Ed. R. Z. Sagdeev. N. Y.: Gordon and Breach. 1984. Vol. 3. P. 1139—1145.
48. Kostinski A., Carhart R. A. Free shear turbulence intensity anisotropies and the energy cascade // *Phys. Lett. A*. 1985. Vol. 107. P. 120—124.
49. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors // *Physica D*. 1983. Vol. 9. P. 189—208.
50. Procaccia I., Grassberger P., Hentschel H. G. E. On the characterization of chaotic motions // *Lecture notes in physics*/Ed. L. Carrido. Berlin etc.: Springer, 1983. Vol. 179. P. 212—221.
51. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. Динамическая модель пространственного развития турбулентности // *Письма в ЖЭТФ*. 1984. Т. 39. С. 561—564.
52. Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Развитие хаоса в ансамблях динамических структур // *ЖЭТФ*. 1985. Т. 89. С. 92—105.
53. Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. Странные аттракторы и пространственное развитие турбулентности в потоковых системах // *Там же*. 1986. Т. 90. С. 736—740.
54. Ашищенко В. С., Арансон И. С., Постное Д. Э., Рабинович М. И. Пространственная синхронизация и бифуркация развития хаоса в цепочке связанных генераторов // *ДАН СССР*. 1986. Т. 286, № 5. С. 736—740.
55. Rabinovich M. I., Sushchik M. M. The effect of external fields on transition to turbulence in free shear flows // *Laminar-turbulent transition: IUTAM Symp.*, Novosibirsk, 1984 / Ed. V. V. Kozlov. Berlin; Heidelberg: Springer, 1985. P. 375—384.
56. Громов П. П., Зобнин А. Б., Рабинович М. И. и др. Конечномерные аттракторы в сдвиговых течениях с обратной связью // *ДАН СССР*. 1987 Т. 292, № 2.
57. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // *Lecture notes in mathematics*. Berlin etc.: Springer, 1981. Vol. 898. P. 366—381.
58. Crassberger P., Procaccia I. Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal // *Phys. Rev. A*. 1983. Vol. 28. P. 2594—2598.

59. *Malraison B., Atten P., Berge P., Dubois M.* Dimension of strange attractors: an experimental determination for chaotic regime of two convective systems // *J. phys. Lett. (France)*, 1983. Vol. 44. P. L897—L902.
60. *Kniseley C., Rockwell D.* Self-sustained low-frequency components in an impinging shear layer // *J. Fluid Mech.* 1982. Vol. 116. P. 157—186.
61. *Bonetti M., Meynard R., Boon J. P., Olivari D.* Chaotic dynamics in periodically excited air jet // *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 55. P. 492—495.
62. *Yule A. J.* Phase scrambling effects and turbulence data analysis // *Turbulent shear flows*. Berlin ect.: Springer, 1980. Bd. 2. P. 263—281.
63. *Antonia R. A.* Conditional sampling in turbulence measurement // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1983. Vol. 13. P. 131—156.



УДК 517.9: 532.542.4

ГЕНЕРАЦИЯ ВИХРЕЙ В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ. ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

В. А. ДОВЖЕНКО, Ф. В. ДОЛЖАНСКИЙ

Математическое описание генерации вихрей в природных и лабораторных сдвиговых течениях до сих пор остается одной из центральных гидродинамических проблем, которая в применении к конкретным случаям, как правило, не поддается современным аналитическим методам исследования. Достаточно напомнить в связи с этим проблему циклогенеза в атмосфере и океанах Земли. Поэтому на сегодняшний день особое значение приобретают задачи, пусть даже исключительные, которые разрешимы в нелинейной постановке и позволяют выделить механизмы, ответственные за возникновение вихрей, и описать их дальнейшую эволюцию. Именно такого рода задачам, имеющим, кроме того, прикладное значение, посвящена настоящая статья.

1. Течение Колмогорова

В общей проблеме неустойчивости сдвиговых течений, таких, как течения Куэтта и Пуазейля, особое место занимает задача о неустойчивости плоского течения несжимаемой вязкой жидкости, возникающего под действием пространственно-периодической внешней силы. По существу это простейшая модель для изучения неустойчивости Кельвина—Гельмгольца вязкой жидкости, поскольку обычные условия прилипания на стенках заменяются в ней условием периодичности вдоль оси, перпендикулярной направлению внешней силы. Поэтому механизмы неустойчивости и нелинейных взаимодействий освобождены здесь от влияния каких-либо привходящих факторов и выделяются в чистом виде. Упомянутая задача, сформулированная А. Н. Колмогоровым [1] еще в 1959 г., рассматривалась вначале как удобный объект для

Рис. 1. Критические кривые устойчивости течения Колмогорова

a — без учета придонного трения [2]; *б* — с учетом придонного трения (для $\sigma = 20$)

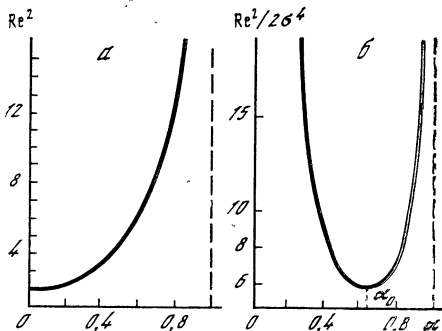
теоретических исследований и лишь значительно позже была реализована в лабораторном эксперименте и нашла применение в природных гидродинамических явлениях.

Линейная задача устойчивости течения синусоидального профиля, создаваемого силой $f = if_0 \sin Ky$ (i — орт в направлении оси x), была решена уже в 1961 г. Л. Д. Мешалкиным и Я. Г. Синаем [2]. Строго показано, что в рассматриваемом случае выполняется принцип неустойчивости Лия [3], согласно которому кривая устойчивости находится из условия равенства нулю корня характеристического уравнения. Другими словами, на критической кривой все корни характеристического уравнения (собственные числа матрицы устойчивости) принадлежат левой полуплоскости комплексных чисел за исключением одного, строго равного нулю.

Кривая устойчивости изображена на рис. 1 в плоскости параметров (α, Re) , где $\alpha = K^{-1}k_x$ — безразмерное продольное волновое число наложенного возмущения, $Re = K^{-3}v^{-2}f_0$ — определенное по напору число Рейнольдса (v — кинематическая вязкость жидкости). Видно, что наиболее «опасными» являются длинноволновые продольные возмущения ($\alpha \sim 0$) и $Re_{кр} = \sqrt{2}$.

Что же происходит в закритической области? С решением этого вопроса связана довольно интригующая история исследования закритических режимов. В. И. Юдович [4, 5] методами теории ветвления доказал существование вторичных стационарных и автоколебательных режимов и показал их устойчивость относительно периодических возмущений, период которых совпадает с периодом основного течения. Однако, решая задачу устойчивости закритических режимов в полной постановке, А. А. Непомнящий [6] строго доказал, что все пространственно-периодические вторичные течения оказываются неустойчивыми по отношению к возмущениям, нарушающим периодичность движения. К такому же выводу пришли В. И. Кляцкин [7] и Дж. Грин [8], исследовавшие проблему на базе упрощенных моделей с учетом как конечного, так и бесконечного числа мод в разложении Фурье поля скорости.

Таким образом, основной вывод теоретических исследований состоял в том, что в надкритической области пространственно-периодические вторичные режимы, формально существующие как решения гидродинамических уравнений, физически ненаблюдаемы из-за их неустойчивости.



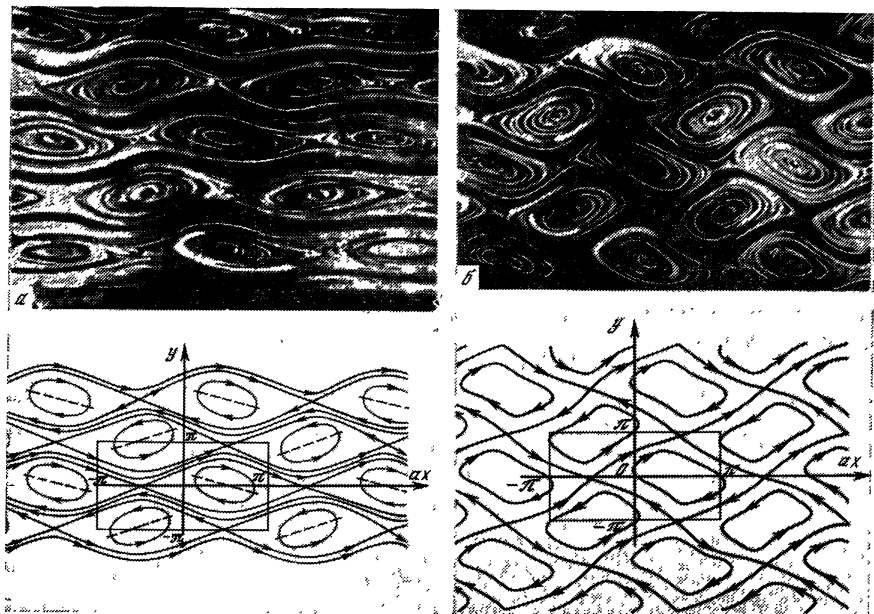


Рис. 2. Теоретические [9] и экспериментальные [10] картины вторичных течений при $Re/Re_{кр} = 1,1$ (а) и $1,25$ (б)

Тем не менее в [9] на основе трехмодовой нелинейной модели, предложенной в [7], была сделана попытка исследовать свойства вторичных стационарных режимов при различных надкритических значениях числа Рейнольдса. Сконструированная методом Галеркина эта модель, кроме основной моды с векторным волновым числом $\mathbf{K} = (0, K)$, включает взаимодействующие с ней еще две неустойчивые (с положительным инкрементом в надкритической области) моды с волновыми числами $\mathbf{k}_1 = (0,5 K, 0)$ и $\mathbf{k}_2 = (0,5 K, K)$. В результате было показано, что вторичные стационарные режимы образуют регулярную решетку вихрей, расположенных в шахматном порядке и изменяющих свою форму с увеличением числа Рейнольдса (рис. 2).

Замечательно, что, опрокидывая выводы строгой теории, именно такие картины закритических режимов, которые для сравнения также приведены на рис. 2, наблюдались в лабораторном эксперименте, выполненном впоследствии М. З. Гаком [10]. Идея эксперимента основана на использовании магнитогидродинамического привода, позволяющего создать в тонком слое слабопроводящей жидкости (электролите) периодическое в пространстве поле внешней силы Ампера

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}],$$

где \mathbf{H} — напряженность внешнего магнитного поля, z -компонен-

та которого периодически зависит от y ; j — постоянная плотность тока между двумя электродами, помещенными в исследуемый слой жидкости. Величину j можно варьировать по желанию экспериментатора, меняя напряжение на электродах и создавая тем самым течения с различными числами Рейнольдса. Первые эксперименты такого рода были проведены в кювете размером 24×12 см с пространственным периодом в 4,4 см и глубиной заполнения 2—3 мм.

Результаты экспериментов на первый взгляд можно объяснить ограниченностью размеров кюветы, так как это приводит к отсечению наиболее неустойчивых длинноволновых мод. Однако обнаруженная экспериментально инвариантность безразмерного волнового числа $\alpha = \alpha_0$ наблюдаемого вторичного течения по отношению к изменению длины канала заставляет отказаться от такого объяснения. Выяснились также и существенные количественные расхождения с трехмодовой теорией [9]. Во-первых, экспериментальное значение $\alpha_0 = 0,68 \pm 0,05$, а не 0,5, как это было постулировано в [9] при построении трехмодовой модели; во-вторых, экспериментальное значение $Re_{кр} = 2 \cdot 10^3$, т. е. более чем на три порядка превосходит теоретическое.

Дальнейший анализ [10, 11] показал, что указанные противоречия и расхождения между теоретическими и экспериментальными результатами связаны с эффектом придонного трения, который присутствует в реальной гидродинамической системе и не принимался во внимание в теоретических исследованиях. Оказывается, что учет упомянутого эффекта позволяет снять все противоречия и не только качественно, но и количественно описать экспериментальные результаты. Если решать задачу для тонкого слоя жидкости толщиной h , то влияние придонного трения можно учесть путем замены в гидродинамических уравнениях напряжений трения $\nu \partial^2 v / \partial z^2$, обусловленных вертикальным сдвигом скорости, на $-\lambda v$ с эффективным коэффициентом трения

$$\lambda = 2\nu h^{-2}. \quad (1)$$

Такое выражения для λ получается в результате подстановки известного точного решения задачи для первичного режима в равенство $\nu \partial^2 v / \partial z^2 = -\lambda v$ при $z = h$. Тогда модель течения Колмогорова, включающая придонное трение, в терминах функции тока и безразмерных переменных описывается уравнениями

$$\partial_t \Delta \psi + [\Delta \psi, \psi] = Re^{-1} \Delta^2 \psi - \sigma Re^{-1} \Delta \psi + Re^{-1} \cos y, \quad (2)$$

$$u = \partial \psi / \partial y, \quad v = -\partial \psi / \partial x, \quad \sigma = 2(hK)^{-2} \quad (3)$$

с условиями периодичности по координате y и отсутствия переноса массы. В качестве масштабов длины и времени используются величины $[x] = K^{-1}$ и $[t] = K\nu f_0^{-1}$.

Методы линейной теории устойчивости, примененные к задаче без трения о дно, полностью переносятся на уравнение (2). Результаты, однако, принципиально различаются. Нейтральная кривая,

приведенная для сравнения на рис. 1, задается формулой

$$\operatorname{Re}^2(\alpha, \sigma) = \frac{2(1 + \sigma)^2(1 + \sigma + \alpha^2)(\sigma + \alpha^2)(1 + \alpha^2)}{\alpha^2(1 - \alpha^2)}. \quad (4)$$

Несложный анализ показывает, что безразмерное волновое число $\alpha_0(\sigma)$ наиболее неустойчивой моды, соответствующее минимуму критической кривой, есть медленно меняющаяся функция σ , значения которой больше нуля при любом $\sigma > 0$ и принадлежат отрезку $[0, (\sqrt{2} - 1)^{1/2}]$. Аналогично, $\operatorname{Re}_{\text{кр}}(\sigma) = \operatorname{Re}(\alpha_0, \sigma) > \sqrt{2}$ при любом $\sigma > 0$, причем

$$\operatorname{Re}_{\text{кр}}(\sigma) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{при } \sigma \rightarrow 0, \\ (2 + \sqrt{2})\sigma^2 & \text{при } \sigma \gg 1. \end{cases}$$

В частности, в упомянутых экспериментах [10] $\sigma \approx 20$, и согласно (4) теория с учетом трения о дно дает $\alpha_0 = 0,64$, $\operatorname{Re}_{\text{кр}} \approx 1400$, что согласуется с приведенными выше экспериментальными данными.

Резюмируя сказанное, сформулируем следующие выводы:

1) наличие придонного трения приводит не только к значительному увеличению порогов устойчивости первичного течения, но и к принципиальному изменению формы критической кривой, которая имеет минимум при отличном от нуля значении $\alpha = \alpha_0$, определяющем структуру вторичного течения;

2) полученные результаты позволяют объяснить наблюдаемую в эксперименте инвариантность по отношению к изменению длины канала и обосновать применимость трехмодовой теории, поскольку при малых надкритичностях моды с волновыми числами α , далекими от α_0 , будут иметь отрицательный инкремент;

3) слабая зависимость α_0 от σ и его малое отличие от 0,5 объясняют, почему построенная в [9] трехмодовая теория качественно правильно описывает эксперимент, воспроизводя структуру вторичных течений (см. рис. 2).

Как уже упоминалось, вопрос о форме вторичных течений при слабой закритичности в первом приближении решается с помощью линейной теории, которая используется для выделения наиболее активных мод. Последующее применение приближенной нелинейной теории, построенной на основе метода Галеркина и учитывающей взаимодействие развивающихся возмущений с основным потоком, позволяет вычислить стационарные значения амплитуд и получить тем самым количественные характеристики закритических режимов. При таком подходе достаточно бывает ограничиться тремя модами. Получающаяся в результате динамическая система оказывается эквивалентной уравнениям движения обычного гироскопа с трением и внешней силой. Проиллюстрируем это на примере задачи (2), (3).

Представим функцию тока в виде разложения по конечному числу базисных функций

$$\psi = -\Psi(t) \cos y + \left[\exp(i\alpha_0 x) \sum_{-1}^1 \varphi_n(t) \exp iny + \text{к. с.} \right].$$

Обычная процедура Галеркина приводит к следующей динамической системе относительно величин $X_1 = \Psi$, $X_2 = \varphi_0$, $X_3 = (\varphi_1 - \varphi_{-1})/2\alpha_0$:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = -2AX_2X_3 - \text{Re}^{-1}(1 + \sigma)X_1 + \text{Re}^{-1}, \\ \dot{X}_2 = BX_1X_3 - \text{Re}^{-1}(\alpha^2 + \sigma)X_2, \\ \dot{X}_3 = CX_1X_2 - \text{Re}^{-1}(1 + \sigma + \alpha_0^2)X_3; \end{cases} \quad (5)$$

$$A = 2\alpha_0^2(1 + 2\alpha_0^2), \quad B = \alpha_0^2, \quad C = (1 - \alpha_0^2)/2(1 + \alpha_0^2).$$

Легко видеть, что в отсутствие вязкости и внешней силы ($\text{Re} = \infty$) указанная система сохраняет фазовый объем и имеет квадратичный первый интеграл движения:

$$\sum_i \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial X_i} = 0, \quad I = A^{-1}X_1^2 + B^{-1}X_2^2 + C^{-1}X_3^2, \quad \dot{I} = 0.$$

Остается применить теорему А. М. Обухова [11, гл. 1, § 4], согласно которой любая квадратично-нелинейная динамическая система третьего порядка, сохраняющая фазовый объем и знакоопределенную квадратичную форму, эквивалентна уравнениям Эйлера движения обычного гироскопа, т. е. сводится к ним линейным преобразованием зависимых переменных.

Заметим, что внешняя сила действует на неустойчивую моду X_1 , для которой коэффициент нелинейного взаимодействия в (5) имеет знак, противоположный двум другим. По теории вынужденного движения триплета [11, 12] система (5) имеет три стационарных решения, одно из которых соответствует первичному течению, устойчивому при $\text{Re} \leq \text{Re}_{\text{кр}}$, а два других, равноправных с точки зрения устойчивости, — вторичному режиму, устойчивому при $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}}$.

Вообще, следует отметить, что триплет довольно широко применяется в гидродинамике. Помимо рассматриваемых здесь случаев к движениям, описываемым триплетом, относятся, в частности, резонансное взаимодействие волн различной природы, включая волны Россби [13], определенного типа атмосферные движения планетарного масштаба [14], течения жидкости в сосудах эллиптического сечения [11]. Кроме того, триплет с успехом используется в конструировании сложных дискретных систем для моделирования развитой турбулентности [11, 15], о чем подробно идет речь в публикуемой в этом сборнике лекции Е. Б. Гледзера и А. М. Обухова [16].

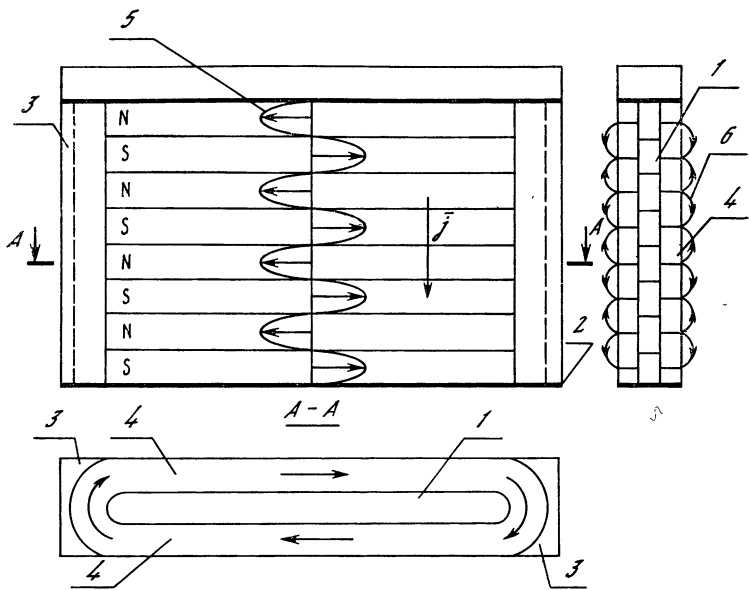


Рис. 3. Схема лабораторной установки для моделирования течения Колмогорова в замкнутом вертикальном канале

1 — лист магнитоэластичной резины, 2 — медный электрод, 3 — боковая стенка, 4 — канал течения жидкости, 5 — профиль МГД-силы, 6 — силовые линии магнитного поля

Моделирование течения Колмогорова в ограниченной прямоугольной кювете обладает существенным недостатком из-за наличия поперечных стенок, влияние которых возрастает с увеличением числа Рейнольдса. Для изучения режимов течения при больших закритичностях А. М. Батчаев и В. А. Довженко [17] использовали вертикальную кювету (рис. 3), в которой под действием магнитогидродинамической силы частицы жидкости (раствор медного купороса) могут двигаться по замкнутым траекториям внутри зазора постоянной толщины. В вертикальном направлении укладываются четыре полные волны. Такая конструкция хорошо имитирует течение Колмогорова на поверхности цилиндра, и влияние торцов практически отсутствует. На рис. 4 приведены картины течений, наблюдаемые при различных условиях внешнего возбуждения.

После перехода тока, питающего систему, через первое критическое значение (в данном эксперименте 1,1 А) на фоне зональной циркуляции, как следовало ожидать, возникают стационарные вихревые возмущения (рис. 4, в, кадр 1). Интенсивность этих возмущений возрастает с увеличением возбуждения, и на следующем кадре (кадр 2) видна картина развитого «вихревого паркета» (ср. рис. 2). При определенном значении возбуждения (второе

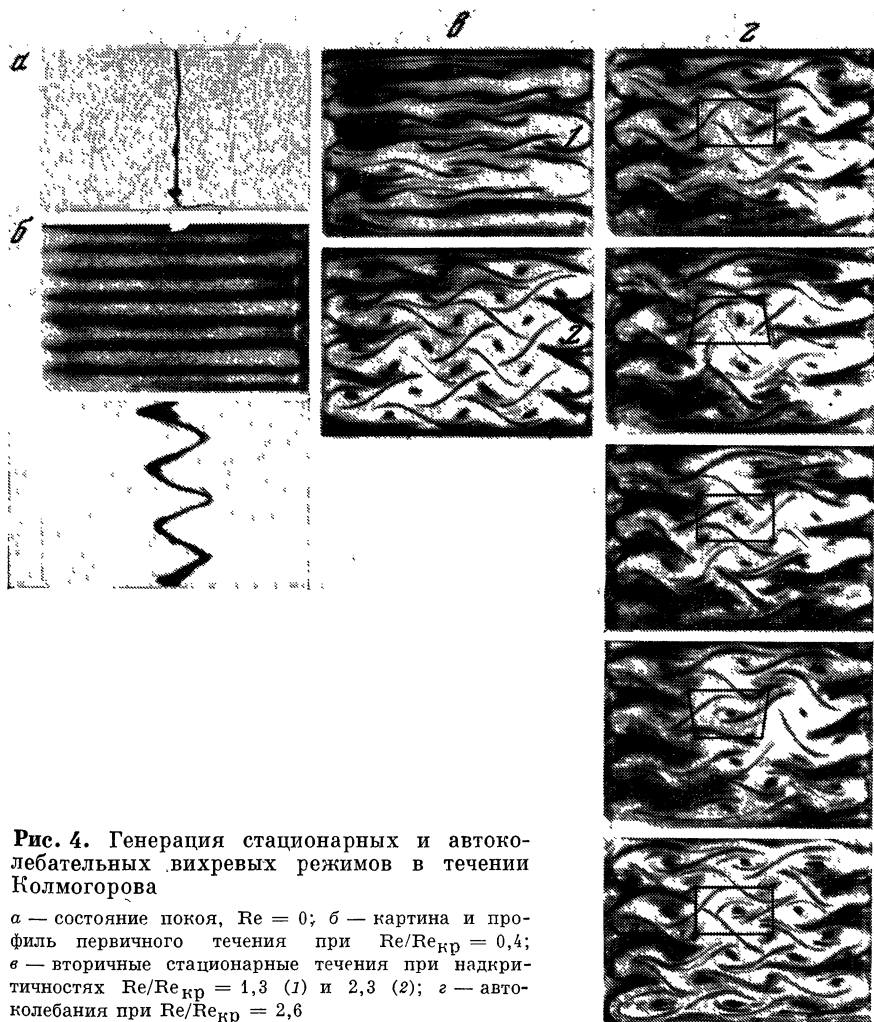


Рис. 4. Генерация стационарных и автоколебательных вихревых режимов в течении Колмогорова

a — состояние покоя, $Re = 0$; *б* — картина и профиль первичного течения при $Re/Re_{кр} = 0,4$; *в* — вторичные стационарные течения при надкритичностях $Re/Re_{кр} = 1,3$ (1) и 2,3 (2); *г* — автоколебания при $Re/Re_{кр} = 2,6$

критическое значение тока составляет 2,6 А) стационарный вихревой режим теряет устойчивость, и в системе вихрей возникает режим автоколебаний.

Кинограмма последовательных фаз колебательного режима показана на рис. 4, *г*. Эволюцию можно проследить, наблюдая за выделенными четырьмя особенностями «вихревого паркета». Полный цикл колебаний совершается в течение 11 с. Величина периода зависит от приложенного напряжения и при увеличении возбуждения уменьшается. При токе меньше 3 А колебания имеют четкий «монохроматический» характер — система работает как часы. Модель гидродинамических часов рассматривается в разд. 3.

При сильном возбуждении (ток больше 3 А) картина колебаний усложняется, спектр обогащается высшими гармониками, и можно ожидать нового перехода к режиму непрерывного спектра. В описываемых экспериментах этот режим специально не исследовался.

2. Сдвиговые течения в кольцевых каналах

В геофизической гидродинамике для изучения общей циркуляции земной атмосферы большой интерес представляет моделирование гидродинамических процессов в кольцевых каналах. В связи с этим А. М. Обухов предложил провести исследование устойчивости сдвиговых течений на аксиально-симметричной установке в кольцевом сосуде с проводящими границами круговой формы, выполняющими роль электродов, и магнитным полем, зависящим только от радиуса, которое создавалось магнитной системой, расположенной под круглой кюветой [18]. В описываемой установке зависимость азимутальной разгонной силы от радиуса была близка к синусоидальной (точнее, к функции Бесселя нулевого порядка), между электродами укладывалась одна полная волна. Для визуализации течения в раствор электролита вводили алюминиевую пудру. При слабом возбуждении наблюдается медленное движение частиц по окружностям с наибольшим градиентом скорости на узловой линии посередине канала.

В соответствии с результатами анализа устойчивости линейной задачи при определенном возбуждении возникает возмущение, индекс симметрии которого, зависящий от геометрии потока (отношения радиусов кольцевой области), можно рассчитать теоретически. На рис. 5 приведена экспериментальная картина [19] стационарных возмущений в сдвиговом течении в кольцевом канале, наблюдаемых в закритическом режиме ($Re/Re_{кр} = 1,5$ и 3), для геометрии, которая соответствует индексу симметрии 3 . Для сравнения дана теоретическая картина движения (изолинии функции тока) для тех же значений $Re/Re_{кр}$, рассчитанная В. И. Пономаревым [19] методом Галеркина. В качестве базисных (опорных) функций использовались произведения функций Бесселя от радиуса r на тригонометрические функции азимута φ . Уместно отметить, что рассматриваемое течение при малых надкритичностях также хорошо описывается с помощью трехмодовой модели с учетом придонного трения.

При уменьшении ширины канала критическое число Рейнольдса возрастает и генерируются более мелкие возмущения, отвечающие большему индексу циркуляции.

Тот факт, что описанные процессы имеют прямое отношение к динамике крупномасштабных атмосферных движений, демонстрирует эксперимент по моделированию неустойчивости сдвиговых течений во вращающемся кольцевом канале [20, 21]. Среди различных причин, способствующих возникновению горизонтального сдвига, основными для крупномасштабных геофизических

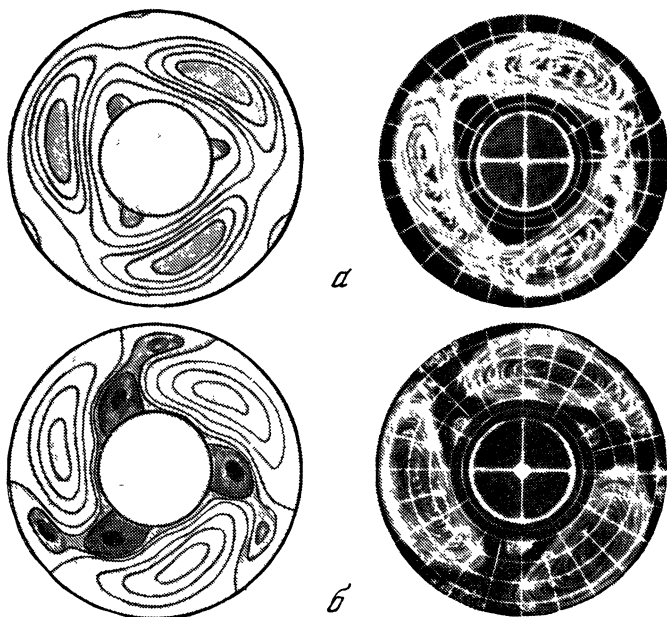


Рис. 5. Теоретические (слева) и экспериментальные (справа) картины вторичных течений в кольцевом канале, возбуждаемых МГД-методом

а — $Re/Re_{кр} = 1,5$; *б* — $Re/Re_{кр} = 3$

течений являются неоднородность внешнего разогрева и вращение системы в целом. В результате неоднородного разогрева в атмосфере образуются вертикальные конвективные ячейки противоположной направленности. Силы Кориолиса отклоняют жидкие частицы двух соседних ячеек в противоположные стороны, что влечет за собой появление горизонтального сдвига.

Такой процесс моделировался методом источников и стоков массы на кольцевой установке, схематически изображенной на рис. 6. Определяющими внешними параметрами рассматриваемой системы являются число Рейнольдса $Re = VD/\nu$ и величина $K = \Omega_0 D/\nu$, контролирующие соответственно форму и амплитуду сдвига. Здесь Ω_0 — угловая скорость вращения системы в целом; D — ширина канала; V — характерная скорость меридионального течения, создаваемая источниками и стоками массы в отсутствие вращения. Как показано в [21], при малых Re профиль сдвига близок к синусоидальному и механизм потери устойчивости первичного течения полностью аналогичен описанному выше для течений Колмогорова и в неподвижном кольцевом канале, возбуждаемых МГД-методом. При больших Re профиль течения становится пилообразным, а механизм его неустойчивости сродни неустойчивости Кельвина—Гельмгольца для течений со ступенчатым сдвигом скоростей. Таким образом, меняя форму и ампли-

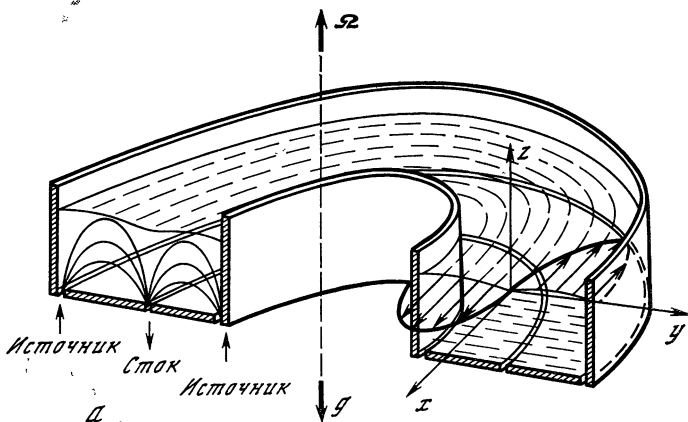


Рис. 6. Схема экспериментальной установки по моделированию сдвиговых течений во вращающемся кольцевом канале методом источников и стоков массы (а) и картина вторичного течения для малых Re при симметричном распределении источников и стоков массы (б)

туду сдвига путем изменения параметров Re и K , экспериментально легко получить вторичные течения с различными индексами симметрии. В частности, картина вторичных течений при малых Re , изображенная на рис. 6, соответствует индексу симметрии 3 и аналогична приведенной на рис. 5. В обоих случаях кольцевые каналы имеют одинаковую геометрию.

На рис. 7 приведена картина лабораторных вторичных течений, схожая с типичной цепочкой вихрей, наблюдаемой над Антарктидой. В обоих случаях цепочки состоят из вихрей одинаковой направленности.

Укажем на еще одно геофизическое применение задачи о неустойчивости течения синусоидального профиля. Механизм баротропной неустойчивости планетарных волн Россби, изученный в [22, 23], аналогичен описанному выше. В частности, пограничный

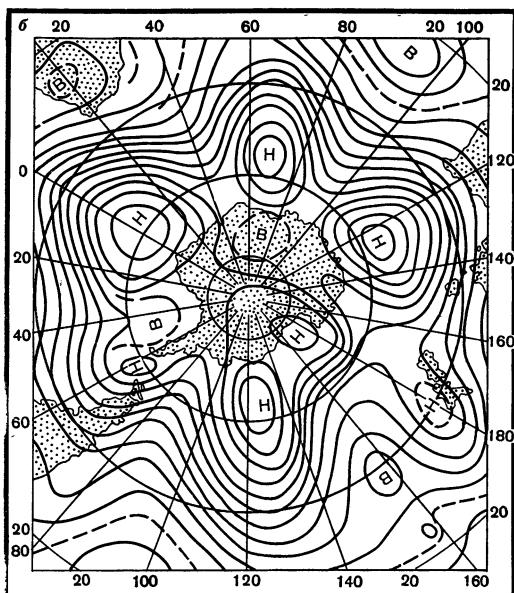
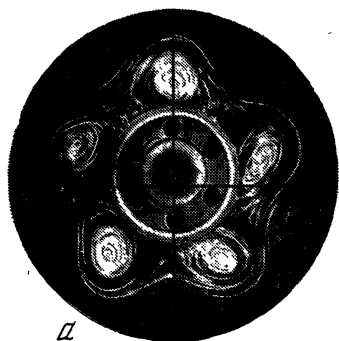


Рис. 7. Типичная картина вторичного течения при несимметричном распределении источников и стоков массы (а) и цепочка циклонов над Антарктидой (б)

экмановский слой в атмосфере оказывает такое же влияние на устойчивость планетарных волн, какое придонное трение оказывает на устойчивость течения Колмогорова.

3. Гидродинамические часы

Один из механизмов возникновения автоколебаний в вихревых системах можно исследовать теоретически и экспериментально на примере четырех вихрей. Регулярные автоколебания четырех вихрей, возбуждаемых МГД-методом, впервые смоделировал М. З. Гак [24], который использовал для этого кювету овальной формы. Для аналитического исследования удобнее иметь дело с прямоугольной областью.

Результаты экспериментов в прямоугольной кювете, выполненных Ю. Л. Черноушко, приведены на рис. 8. Четырехвихревое течение в тонком слое электролита, через который пропускается постоянный электрический ток, создавалось с помощью магнитной системы специальной конфигурации. Детали эксперимента подробно изложены в [25].

Экспериментально было обнаружено, что автоколебательный режим, который выражается в строго периодическом перезамыкании расположенных по диагонали пар вихрей (рис. 9) реализуется только в достаточно вытянутой прямоугольной кювете. Например, в квадратной кювете при достижении числом Рейнольдса определенного критического значения происходит слияние пары вихрей, расположенных на одной из диагоналей, и в таком стационарном состоянии система пребывает неограниченно долго независимо от степени надкритичности.

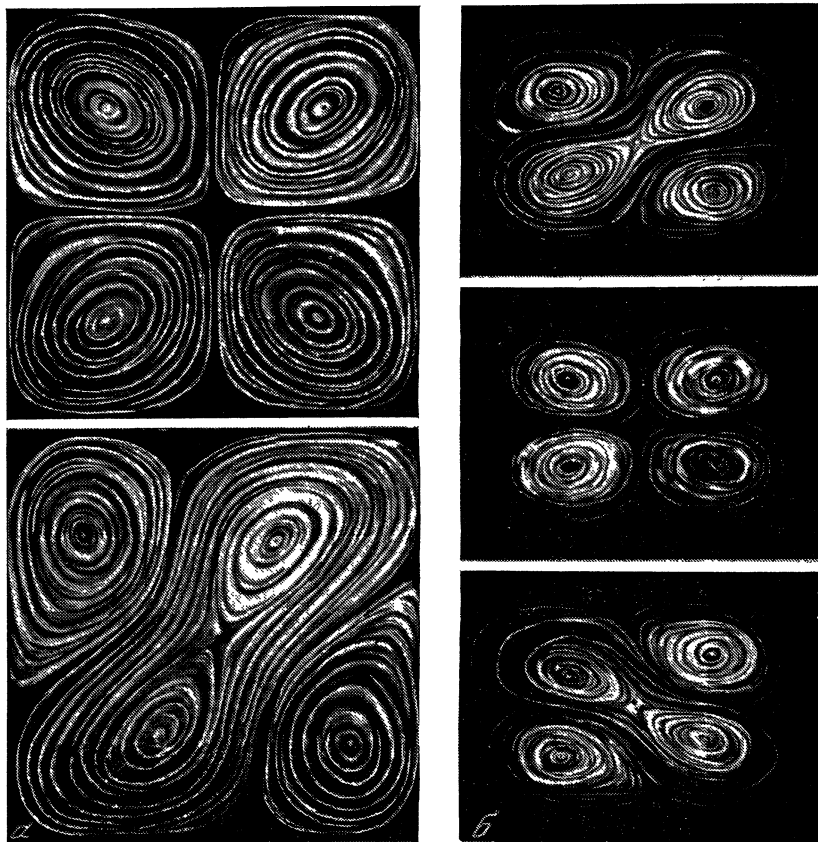


Рис. 8. Первичный (вверху) и вторичный (внизу) стационарные режимы в квадратной кювете (а) и автоколебания четырех вихрей в прямоугольной кювете с отношением сторон $\varepsilon = 2$ (б)

Теоретическое объяснение описанных явлений было дано на основе четырехмодовой модели Л. А. Плешановой [25], которой удалось, кроме того, обнаружить существенную зависимость поведения системы от величины придонного трения. В качестве исходного использовалось уравнение (2), последнее слагаемое в правой части которого заменялось на слагаемое $Re^{-1} \sin 2x \sin 2ey$, моделирующее внешнее возбуждение четырехвихревого течения (ε — отношение сторон прямоугольника).

Оказалось, что область существования вторичных стационарных течений определяется условием $\varepsilon_{\max}^{-1} < \varepsilon < \varepsilon_{\max}$, где $\varepsilon_{\max} = 4,4$. Другими словами, в сильно вытянутом прямоугольнике вторичные стационарные режимы не существуют и единственным стационарным режимом является первичное четырехвихревое те-

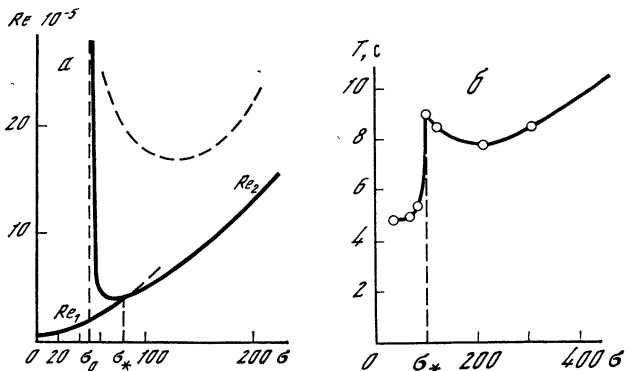


Рис. 9. Кривые устойчивости стационарных течений (а) и экспериментальная зависимость $T = T(\sigma)$ при постоянном числе Рейнольдса (б)

а: область устойчивости лежит ниже кривых Re_1 , Re_2 . Пунктиром намечена граница устойчивости вторичных стационарных решений

чение. Внутри области $\varepsilon_{\max}^{-1} < \varepsilon < \varepsilon_{\max}$ вторичные стационарные течения существуют только для

$$\sigma > \sigma_0 \equiv - \frac{(\varepsilon^2 + 1)(654\varepsilon^4 - 1892\varepsilon^2 + 654)}{2(3\varepsilon^4 - 58\varepsilon^2 + 3)}.$$

При $\varepsilon_0^{-1} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \approx 1,58$ значение $\sigma_0 < 0$, и необходимое условие выполнено при любых σ , т. е. для областей, близких к квадрату, вторичные стационарные режимы всегда существуют. В областях $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_{\max}$ и $\varepsilon_{\max}^{-1} < \varepsilon < \varepsilon_0^{-1}$ вторичные стационарные течения существуют только для коэффициентов трения $\sigma > \sigma_0$.

Кривая устойчивости первичного режима для $\varepsilon = 2$ приведена на рис. 9, а. Область устойчивости первичного режима лежит ниже ветвей Re_1 и Re_2 . Согласно четырехмодовой модели в надкритической окрестности кривой Re_1 периодические режимы существуют для областей с «эксцентриситетом» $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_{\max}$ и коэффициентов трения, не превышающих σ_* (см. рис. 9, а). Другими словами, указанные автоколебания возникают в области малых σ , где придонное трение невелико и соизмеримо с внутренним трением отдельных мод. Это делает сильно анизотропным эффективный коэффициент трения $\sigma_0 = \sigma + i^2 + \varepsilon^2 j^2$ ($i, j = 1, 2, 3$) и является существенной чертой, определяющей характер рассматриваемых автоколебаний. Анализ показывает, что автоколебания возбуждаются мягко и являются устойчивыми. Следует подчеркнуть, что экспериментальные и теоретические характеристики течений при $\sigma < \sigma_*$ хорошо согласуются.

Иначе обстоит дело при больших значениях σ . В надкритической окрестности кривой Re_2 согласно четырехмодовой модели первичный режим сменяется устойчивым вторичным стационарным режимом. В экспериментах, однако, вместо него наблюдаются регулярные автоколебания, не описываемые в рамках упомянутой модели. Тот факт, что с увеличением σ происходит смена типа ав-

токолебаний, демонстрирует рис. 9, б, на котором приведена экспериментальная зависимость периода колебаний от σ . Видно, что смена режима происходит при значении $\sigma \approx \sigma_*$, задаваемом пересечением кривых Re_1 и Re_2 на рис. 9, а.

Рассмотренные задачи показывают, что маломодовые нелинейные модели могут служить эффективным инструментом для изучения сложных процессов вихреобразования. Разумеется, такой подход, позволяющий в ряде случаев не только качественно, но количественно описать явление, требует определенной осторожности и должен сочетаться с постановкой лабораторных или численных экспериментов. Затраты, однако, окупаются тем глубоким пониманием процесса, которого удается достичь при аналитическом исследовании упрощенной нелинейной модели и который недоступен в исходной постановке задачи.

Внимание экспериментаторов заслуживает показанная здесь важная роль придонного трения в формировании и устойчивости двумерных вихревых течений, которую следует учитывать при постановке и интерпретации экспериментов по моделированию движений тонких слоев жидкости. Прямое отношение к этому имеют, в частности, интересные эксперименты по моделированию солитонов Россби в сосудах гиперболического профиля, описанию которых посвящена статья М. В. Незлина и Е. Н. Снежкина [26].

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Мешалкин Л. Д. Семинар А. Н. Колмогорова по избранному вопросу анализа (1958—1959) // УМН. 1960. Т. 15, № 1. С. 247.
2. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // ПММ. 1961. Т. 25, № 6. С. 1140—1143.
3. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
4. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного и периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой жидкости // ПММ. 1965. Т. 29, № 3. С. 453—457.
5. Юдович В. И. Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 32—35.
6. Непомнящий А. А. Об устойчивости вторичных течений вязкой жидкости в неограниченном пространстве // ПММ. 1976. Т. 40, № 5. С. 886—891.
7. Кляцкин В. И. К нелинейной теории устойчивости периодических течений // Там же. 1972. Т. 36, № 2. С. 263—271.
8. Green J. S. A. Two-dimensional turbulence near the viscous limit // J. Fluid Mech. 1974. Vol. 62, N 2. P. 273—287.
9. Белоцерковский С. О., Мирабель А. П., Чусов М. А. О построении критического режима для плоского периодического течения // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1978. Т. 4, № 1. С. 11—20.
10. Бондаренко Н. Ф., Гак М. З., Должанский Ф. В. Лабораторная и теоретическая модели плоского периодического течения // Там же. 1979. Т. 15, № 10. С. 1017—1026.
11. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 366 с.
12. Обухов А. М. О некоторых общих характеристиках уравнений динамики атмосферы // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1971. Т. 7. № 7. С. 695—704.

13. Лонге-Хиггинс М. С., Гилл А. Е. Резонансное взаимодействие планетарных волн // Нелинейная теория распространения волн / Под ред. Г. И. Баренблатта. М.: Мир, 1970. С. 161—187.
14. Галин М. Б., Курбаткин Г. П. Трехкомпонентный анализ нелинейных взаимодействий в атмосфере // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1975. Т. 11. С. 675—680.
15. Обухов А. М. Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование // УМН. 1983. Т. 38, вып. 4(232). С. 101—111.
16. Гледзер Е. Б., Обухов А. М. Описание турбулентного каскада в рамках дискретных моделей // Наст. кн.
17. Батчаев А. М., Довженко В. А. Лабораторное моделирование потери устойчивости периодических зональных течений // ДАН СССР. 1983. Т. 273, № 3. С. 582—584.
18. Довженко В. А., Обухов А. М., Пономарев В. М. О генерации вихрей в аксиально-симметричном сдвиговом течении // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 4. С. 27—36.
19. Довженко В. А., Крымов В. А., Пономарев В. М. Экспериментальное и теоретическое исследование сдвигового течения, возбуждаемого аксиально-симметричной силой // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1984. Т. 20, № 8, С. 693—703.
20. Черноуцко Ю. Л. Экспериментальные исследования двумерных течений с горизонтальным сдвигом во вращающейся системе // Там же. 1980. Т. 16, № 4. С. 423—427.
21. Должанский Ф. В. О генерации вихревых возмущений на фоне двумерного течения со сдвигом, возбуждаемого в поле сил Кориолиса источниками и стоками массы // Там же. 1981. Т. 17, № 6. С. 563—573.
22. Lorenz E. N. Barotropic instability of Rossby wave motion // J. Atmos. Sci. 1972. Vol. 29, N 2. P. 258—269.
23. Должанский Ф. В. О влиянии экмановского слоя на устойчивость планетарных волн // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. Т. 21, № 4. С. 383—390.
24. Гак М. З. Лабораторное исследование автоколебаний в системе четырех вихрей // Там же. 1981. Т. 17, № 2. С. 201—205.
25. Плешанова Л. А. Автоколебания в системе четырех вихрей // Там же. 1982. Т. 18, № 4. С. 339—348.
26. Незлин М. В., Снежкин Е. Н. Нелинейные вихревые структуры и самоорганизация в неустойчивых течениях на вращающейся мелкой воде // Наст. кн.



УДК 532.5

ДВУМЕРНЫЕ ВИХРИ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. АБРАШКИН, Е. И. ЯКУБОВИЧ

Введение

В настоящей статье рассматриваются некоторые проблемы аналитического описания одиночных завихренных областей в безграничной идеальной жидкости. К рассматриваемому типу течений относятся, в частности, одиночный вихрь в покоящейся на бесконечности жидкости, вихрь вблизи твердой стенки, вихрь в потоке жидкости и т. д. Характерная особенность таких течений — наличие границы, разделяющей области вихревого и потенциального движений. На этой границе завихренность терпит скачок,

а компоненты скорости и давление непрерывны. В связи с этим можно указать две принципиальные трудности, возникающие при аналитическом описании вихрей: требуется, во-первых, получить решение, описывающее движение в вихре (это связано, как правило, с решением нелинейных уравнений), а во-вторых, сшить найденное движение с внешним потенциальным. Нетривиальность последнего требования следует уже из того факта, что задача потенциального обтекания заданной границы в общем случае не решена.

В случае же потенциального обтекания области с завихренным течением задача становится еще сложнее, так как необходимо учесть обратное влияние потенциального движения на вихревое. Поэтому при изучении вихрей в идеальной жидкости делаются различные упрощающие предположения. Так, например, Чаплыгин, решая задачи обтекания однородным на бесконечности потоком препятствия в форме полуцилиндра и преграды в виде забора, предполагал движение всюду однородно-завихренным [1—3]; Стюарт рассмотрел задачу об одиночной дорожке стационарных распределенных вихрей, также полагая движение вихревым во всей плоскости течения [4] (с вихрем в этой работе отождествлялась некоторая область вблизи максимума значения завихренности). Очевидно, что в такой схеме движения жидкости с непрерывным распределением завихренности проблема склейки течений не возникает.

Одним из упрощающих предположений, принимаемых при изучении распределенных вихревых течений, является предположение об их стационарности. При этом, как хорошо известно [5—7], завихренность постоянна вдоль линии тока, так что исследование плоского потока сводится к решению уравнения

$$\Delta\psi = f(\psi) = -\Omega. \quad (1)$$

Здесь ψ — функция тока; f — некоторая произвольная функция. Это уравнение становится линейным, если $f(\psi)$ — постоянная или линейная функция ψ , и, следовательно, для него можно указать общее решение.

Условие потенциального продолжения течений, описываемых этими решениями, во внешнюю часть вихря состоит в необходимости совпадения границы вихря с линией тока. Этому условию удается удовлетворить для некоторых простейших форм границы вихря. Так, для областей с однородным распределением завихренности — это круговой [5] и стационарный эллиптический (Мура и Сэффмена [8]) вихри. Для первого из них потенциальное поле скорости спадает обратно пропорционально расстоянию до центра вихря (как для точечного вихря), для второго же потенциальное поле на бесконечности пропорционально комплексной координате $W = X + iY$, где X, Y — декартовы координаты (такое деформирующее поле описывает в первом приближении влияние системы стационарных вихрей на некоторый выделенный вихрь). В случае линейной функции ($f = \alpha\psi$) единственное извест-

ное нам решение описывает обтекание однородным на бесконечности потоком пары соприкасающихся вихрей в форме полукругов [5, 7] (линией касания для них является диаметр). Среди находящихся практическое приложение всюду вихревых решений уравнения (1) можно указать упоминавшееся выше решение Стюарта, соответствующее экспоненциальной функции $f(\psi)$.

Для нестационарных течений линии тока уже не совпадают с траекториями жидких частиц (вдоль последних согласно теореме Гельмгольца сохраняется завихренность), и уравнение (1) становится несправедливым. Легко показать, однако, что в случае нестационарных однородно-завихренных движений жидкости система уравнений гидродинамики, как и для стационарных течений, эквивалентна уравнению $\Delta\psi = -\Omega = \text{const}$. В настоящее время известны только два аналитических решения этого уравнения, которые удается «потенциально продолжить» наружу вихря.

Первое, являясь приближенным, описывает синусоидальные возмущения малой амплитуды, распространяющиеся вдоль границы кругового вихря с угловой скоростью $\omega = \frac{\Omega}{2}(m-1)m^{-1}$, где m — номер моды (волны Кельвина [5]). Второе решение (точное) описывает эллиптическую область неизменной формы, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\omega = \Omega AB(A+B)^{-2}$, где A, B — полуоси эллипса (вихрь Кирхгофа [5, 7]). Все остальные результаты по динамике однородно-завихренных областей в потенциальном потоке получены численно. В частности, с помощью численных методов рассмотрено обтекание однородным на бесконечности потоком стационарного вихря вблизи плоской стенки [9], изучены равномерно вращающиеся одиночные вихри неизменной формы в покоящейся на бесконечности жидкости [10, 11], а также пары одинаковых вихрей с противоположными по знаку циркуляциями [11, 12].

В ряде работ рассматривалась более сложная схема движения жидкости, когда граница вихря разделяет два вихревых движения с постоянным, но разным по величине значением вихря. Так, например, задачу о поведении одиночного равномерно вращающегося без изменения формы вихря в окружающем потенциальном течении иногда удобнее рассматривать во вращающейся системе отсчета, где вихрь неподвижен. В этой системе движение вне вихря уже однородно-завихренное, но граница вихря не меняется со временем и, следовательно, совпадает с линией тока. Такой подход тем самым может существенно упростить склейку движений на границе вихря. В частности, он используется при аналитическом рассмотрении вихрей в стационарных деформирующих полях [13, 14].

Другое интересное направление исследований в такой схеме движения жидкости относится к рассмотрению вихрей в сдвиговых потоках. Имеющиеся здесь примеры решений, описывающих нестационарный эллиптический вихрь соответственно в сдвиговом [15] и в равномерном сдвиговом потоке [16], являлись, пожалуй,

до самого последнего времени единственными, демонстрирующими сложную динамику границы вихря, характерную для реально наблюдаемых вихрей.

Ниже излагаются два новых подхода к проблеме аналитического описания плоских вихрей в идеальной жидкости. Первый относится к исследованию формы стационарных однородно-завихренных областей в окружающем потенциальном или однородно-завихренном потоке. Второй подход связан с изучением динамики нестационарных неоднородно-завихренных областей во внешнем потенциальном течении.

1. Стационарные вихри

Рассмотрим область постоянной завихренности Ω , находящуюся в окружающем потенциальном течении. Если предположить, что движение жидкости внутри вихря является стационарным (вихревая область не меняет форму и не вращается как целое), то общее решение уравнений плоской гидродинамики можно записать в виде

$$V_v = i (\Omega/2) W + d\Phi (\bar{W})/d\bar{W}. \quad (2)$$

Здесь $V = u + iv$ (u, v — горизонтальная и вертикальная проекции скорости); $\bar{W} = X - iY$ (черта означает знак комплексного сопряжения); Φ — некоторая аналитическая функция. Непосредственным дифференцированием нетрудно убедиться, что первое слагаемое в этом равенстве — это вихревая часть скорости, второе — потенциальная часть. Для чисто потенциального движения жидкости, когда $\Omega = 0$, функция $\Phi (\bar{W})$ есть комплексный потенциал течения.

Форма границы вихря определяется видом «псевдопотенциала» Φ . Действительно, из уравнения (2) нетрудно получить уравнение для линий тока внутри вихря:

$$(\Omega/2) W\bar{W} - i [\Phi (\bar{W}) - \bar{\Phi} (W)] = 2\psi, \quad \bar{\Phi} (W) = \overline{\Phi (\bar{W})}. \quad (3)$$

Полагая, что границе вихря соответствует значение функции тока, равное ψ_0 , получим уравнение границы

$$(\Omega/2) W\bar{W} - i [\Phi (\bar{W}) - \bar{\Phi} (W)] = 2\psi_0. \quad (4)$$

Для того чтобы сшить вихревое течение (2) с внешним потенциальным, оставляя скорость на границе сшивки непрерывной (а значит, и не искажая границы), рассмотрим новую комплексную функцию Z , которая связана с переменной \bar{W} уравнением

$$(\Omega/2) Z\bar{W} - i [\Phi (\bar{W}) - \bar{\Phi} (Z)] = 2\psi_0. \quad (5)$$

Функция $Z = q (\bar{W})$ обращается в W , если \bar{W} лежит на контуре вихря, поэтому потенциальное течение

$$V_{II} = i (\Omega/2) Z + d\Phi (\bar{W})/d\bar{W}, \quad (6)$$

где Z — решение уравнения (5), будет описывать движение жидкости вне вихря.

Таким образом, выбор псевдопотенциала полностью определяет как форму вихря, так и самосогласованное течение внутри и вне его. Заметим, что псевдопотенциал не может быть произвольным. Он не должен иметь особенностей внутри вихря, а снаружи его особенности должны компенсироваться особенностями функции $i(\Omega/2)Z$, чтобы поле скорости было всюду регулярным. Функция Z , напротив, может иметь особенности внутри вихря.

Как ясно из изложенного выше, трудности предлагаемого метода связаны с исследованием положения особых точек Φ и Z . Основным достоинством же этого метода является то, что при потенциальном продолжении наружу линия тока автоматически совпадает с границей вихря.

Апробировать предложенный метод удобно на известном решении, описывающем эллиптический вихрь в деформирующем линейном по \bar{W} поле [8].

Течение внутри такого вихря записывается следующим образом:

$$V_v = i\lambda \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} W - i\lambda \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \bar{W};$$

здесь $\alpha = 1/2(A + B)$; $\beta = 1/2(A - B)$; A, B — полуоси эллипса; λ — некоторая постоянная частота. Псевдопотенциал вихря, $\Phi(\bar{W}) = -i\lambda \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \bar{W}^2$ — квадратичная функция. Согласно (3) уравнение границы вихря имеет вид

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} W\bar{W} - \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} W^2 - \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \bar{W}^2 = \alpha^2 - \beta^2,$$

его легко разрешить относительно W , определив тем самым вид функции $Z(\bar{W})$:

$$Z_{1,2}(\bar{W}) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} \bar{W} \pm \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \sqrt{\bar{W}^2 - 4\alpha\beta}.$$

Из двух возможных выражений для Z , соответствующих разным знакам перед корнем, следует выбрать то, для которого скорость на границе сшивки непрерывна. Рассмотрев значение скорости, например, в точке $\bar{W} = \alpha + \beta$, нетрудно заключить, что в выражении для Z следует выбрать знак минус перед корнем, так что поле скорости вне вихря запишется следующим образом:

$$V_{II} = i\lambda \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \bar{W} - i\lambda \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} \sqrt{\bar{W}^2 - 4\alpha\beta}.$$

Укажем, что точки ветвления потенциального поля скорости $\pm 2\sqrt{\alpha\beta}$ лежат всегда внутри эллипса, поскольку $2\sqrt{\alpha\beta} \leq \alpha + \beta$ (в случае равенства вихрь является круговым и точки ветвления отсутствуют).

Высказанную выше идею сшивки стационарных течений можно несколько модифицировать, а именно будем продолжать решение

не из вихревой области в потенциальную, а наоборот. Итак, пусть поле скорости потенциального течения имеет вид

$$V_{\Pi} = d\Phi(\bar{W})/d\bar{W}. \quad (7)$$

Здесь Φ — уже обыкновенный потенциал течения. Теперь нетрудно проверить, что соотношение

$$V_{\text{в}} = i(\Omega/2)(W - Z) + d\Phi(\bar{W})/d\bar{W}, \quad (8)$$

где Z удовлетворяет уравнению

$$\Phi(\bar{W}) - \bar{\Phi}(Z) = 2\psi_0, \quad (9)$$

решает проблему продолжения внутрь вихря. Заметим, что поскольку циркуляция скорости по контуру вихря должна быть отлична от нуля, то производная потенциала имеет внутри вихря особые точки (или точки ветвления), которые должны компенсироваться членом $-i(\Omega/2)Z$ в выражении для скорости (сама функция Z теперь может иметь особенности и точки ветвления вне вихря).

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретного примера применения этого метода, укажем некоторые направления, по которым возможно, на наш взгляд, дальнейшее развитие предлагаемого здесь подхода.

Допустим, нам известно некоторое частное решение уравнений плоской гидродинамики, описывающее одиночный вихрь в потенциальном потоке, но нас не удовлетворяет, например, асимптотика течения или, скажем, оно не физично, так как имеет особенности. В этом случае есть возможность изменить течение всюду, не меняя границы вихря, если к потенциалу (или псевдопотенциалу) $\Phi(\bar{W})$ добавить функцию $i\chi(\bar{W}, q(\bar{W}))$, антисимметричную от своих аргументов, где $q(\bar{W})$ — решение уравнения (4) или (8) для первоначального вихря. Действительно, уравнение границы не изменится, так как на ней $\text{Re } \chi(W, W) = 0$.

Другое направление обобщения метода связано с тем обстоятельством, что по аналогии с соотношениями (2)—(9) можно сшивать два течения с постоянной завихренностью. Такая задача возникает, в частности, при рассмотрении равномерно вращающихся вихревых областей неизменной формы в окружающем потенциальном течении.

Действительно, пусть область постоянной завихренности Ω равномерно вращается с угловой скоростью ω . Рассмотрим движение жидкости в системе отсчета, вращающейся с этой скоростью. Вихрь в этой системе отсчета неподвижен, завихренность внутри него постоянная и равна $\Omega - 2\omega$. Вне вихря течение уже не является потенциальным, завихренность в нем распределена равномерно и равна -2ω .

Учитывая сказанное, обобщим выражения (2), (6) для поля скорости внутри вихря

$$V = i(\Omega/2 - \omega)W + d\Phi(\bar{W})/d\bar{W}$$

и вне его

$$V = -i\omega W + i(\Omega/2) Z (\bar{W}) + d\Phi (\bar{W})/d\bar{W},$$

где Z определяется уравнением

$$(\Omega/2 - \omega) \bar{W}Z - i[\Phi(\bar{W}) - \bar{\Phi}(Z)] = 2\psi_0;$$

здесь ψ_0 — значение функции тока, отвечающее границе вихря. Очевидно, что на выбор функций Φ и Z должны быть наложены те же ограничения, что и выше.

Отметим также, что указанную процедуру сшивки однородно-завихренных течений можно, по-видимому, использовать и при изучении неоднородно-завихренных течений, если аппроксимировать распределение завихренности для них кусочно-постоянной функцией.

В качестве приложения развитой теории опишем циркулярное обтекание цилиндра с присоединенным вихрем. Для этого рассмотрим течение с потенциалом следующего вида:

$$\Phi(\bar{W}) = iB \ln \frac{\bar{W}(\bar{W} - \alpha)}{\bar{W} - \beta},$$

где B — некоторая постоянная. Этот потенциал имеет три особые точки с координатами $0, \beta, \alpha$; пусть β, α — действительные и $0 < \beta < \alpha$. Линии тока соответствующего течения определяются уравнением

$$\ln \left| \frac{\bar{W}(\bar{W} - \alpha)}{\bar{W} - \beta} \right|^2 = 2 \frac{\psi}{B},$$

их качественная картина при выбранном расположении особенностей приведена на рис. 1. За границу вихря и обтекаемого цилиндра примем линию тока, проходящую через точки с нулевой скоростью (будем считать, что кривая $\bar{W}_1 X_1 \bar{W}_2$ отделяет вихрь от потенциального течения, а кривая $\bar{W}_1 X_2 \bar{W}_2$ ограничивает тело), тогда в области потенциального потока не будет особых точек. Для нахождения формы кривой, вдоль которой вихрь соприкасается с цилиндром, найдем поле скорости внутри вихря.

Согласно формуле (7) общей теории оно имеет вид

$$V_B = i \frac{\Omega}{2} (W - Z) + iB \left(\frac{1}{W} + \frac{1}{W - \alpha} - \frac{1}{W - \beta} \right), \quad (10)$$

где $Z(\bar{W})$ находится из квадратного уравнения

$$\frac{\bar{W}(\bar{W} - \alpha)}{\bar{W} - \beta} \frac{Z(Z - \alpha)}{Z - \beta} = \exp \left(\frac{2\psi_0}{B} \right).$$

Решение этого уравнения можно записать следующим образом:

$$Z_{1,2} = \frac{\alpha}{2} \frac{\varphi + \alpha \pm [(\varphi + \alpha)^2 - 4\beta\varphi]^{1/2}}{\varphi}, \quad \varphi = \frac{\bar{W}(\bar{W} - \alpha)}{\bar{W} - \beta};$$

здесь учтено, что $\exp(2\psi_0/B) = \alpha^2$. Замечая, что подкоренное вы-

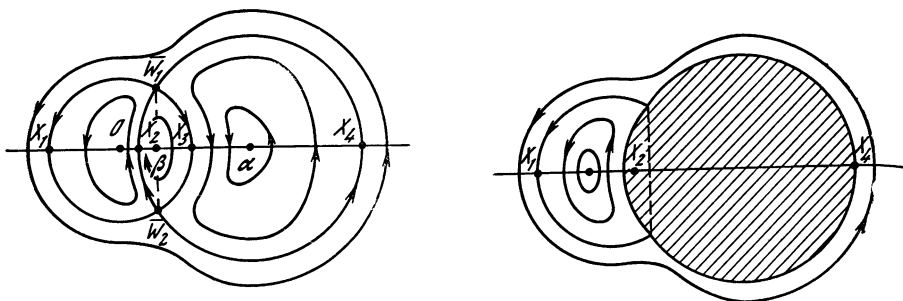


Рис. 1. Картина линий тока для потенциала $\Phi(\bar{W})$

Рис. 2. Картина линий тока при круговом обтекании цилиндра с присоединенным вихрем

ражение является полным квадратом (равным $(\bar{W}^2 - 2\beta\bar{W} + \alpha\beta)^2 (\bar{W} - \beta)^{-2}$), нетрудно получить искомое представление для функции Z , удовлетворяющее условию непрерывности скорости на границе вихря:

$$Z = \alpha\beta/\bar{W}.$$

Из этого соотношения видно, что Z имеет полюс в точке $\bar{W} = 0$, поэтому, чтобы поле скорости в вихре (10) не имело особенности, следует выбрать величину B равной $1/2\alpha\beta\Omega$.

Таким образом, выражение для скорости внутри вихря примет вид

$$V_B = i\frac{\Omega}{2}W + i\frac{\alpha\beta\Omega}{2}\left(\frac{1}{W-\alpha} - \frac{1}{W-\beta}\right).$$

Соответствующее этому полю скорости выражение для функции тока запишется следующим образом:

$$\psi = \frac{1}{4}\Omega|W|^2 + \frac{\alpha\beta\Omega}{4}\left(\ln\alpha\beta\left|\frac{\bar{W}-\alpha}{\bar{W}-\beta}\right|^2 - 1\right).$$

Укажем, что значение произвольной постоянной, получаемой при интегрировании, находится из условия равенства функции тока значению ψ_0 на границе вихря (заметим, что величины под знаком логарифма следует считать безразмерными).

Выбирая конкретные значения постоянных, можно определить, что линия тока, разделяющая вихрь и тело, проходит левее точки X_2 , поэтому результирующая картина кругового обтекания выпуклого тела с присоединенным вихрем имеет вид, изображенный на рис. 2.¹

2. Нестационарные вихри

В данном разделе исследуется самосогласованное взаимодействие одиночного нестационарного вихря с окружающим потенциальным течением. Для рассмотрения этой задачи воспользуемся лагранжевыми переменными.

Уравнения двумерной гидродинамики несжимаемой идеальной жидкости в переменных Лагранжа хорошо известны. Это уравнение непрерывности

$$X_a Y_b - X_b Y_a = S_1(a, b) \quad (11)$$

и уравнения движения

$$X_{tt} X_a + Y_{tt} Y_a = -\frac{1}{\rho} p_a - \Phi_a, \quad (12)$$

$$X_{tt} X_b + Y_{tt} Y_b = -\frac{1}{\rho} p_b - \Phi_b,$$

где p — давление; ρ — плотность; Φ — потенциал сторонних сил; X, Y — координаты траекторий частиц жидкости; a, b — лагранжевы декартовы координаты элемента жидкости; t — время; S_1 — некоторая функция, не зависящая от времени; индексы обозначают дифференцирование по соответствующей переменной. Эти уравнения применяются редко, так как их нелинейные члены входят в неудобной форме, однако они имеют то большое преимущество, что их решение следует искать в фиксированной области переменных a, b даже при наличии свободной поверхности.

Известно также, что система уравнений движения эквивалентна уравнению, описывающему сохранение вихря вдоль траектории [17]:

$$X_{tb} X_a - X_{ta} X_b + Y_{tb} Y_a - Y_{ta} Y_b = S_2(a, b), \quad (13)$$

S_2 — функция, не зависящая от времени. Данное уравнение существенно проще исходных, так как в нем не содержится давление, а порядок его не выше порядка системы (12).

Для целей исследования уравнения (11), (13) удобнее записать в комплексной форме. Введем комплексную координату $W = X + iY$ ($\bar{W} = X - iY$) и комплексный аргумент $\eta = a + ib$ ($\bar{\eta} = a - ib$). Уравнения (11), (13) в этих переменных примут вид [18]

$$\frac{\partial}{\partial t} [W_{\eta} (\bar{W})_{\bar{\eta}} - W_{\bar{\eta}} (\bar{W})_{\eta}] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [W_{t\eta} (\bar{W})_{\bar{\eta}} - W_{t\bar{\eta}} (\bar{W})_{\eta} + (\bar{W})_{t\eta} W_{\bar{\eta}} - (\bar{W})_{t\bar{\eta}} W_{\eta}] = 0.$$

Последнее уравнение допускает некоторое упрощение: сложив с ним продифференцированное по времени уравнение непрерывности, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\bar{W})_{\bar{\eta}} W_{t\eta} - (\bar{W})_{\eta} W_{t\bar{\eta}}] = 0.$$

Итак, систему уравнений гидродинамики мы записали в виде двух законов сохранения для двух якобианов:

$$D(W, \bar{W})/D(\eta, \bar{\eta}) = D(W_0, \bar{W}_0)/D(\eta, \bar{\eta}), \quad (14)$$

$$D(W_t, \bar{W})/D(\eta, \bar{\eta}) = D(W_{t0}, \bar{W}_0)/D(\eta, \bar{\eta}), \quad (15)$$

где W_0, W_{t_0} — комплексные координата и скорость в начальный момент.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что выражение

$$W = G(\eta) \exp(i\lambda t) + F(\bar{\eta}) \exp(i\mu t), \quad (16)$$

где λ, μ — произвольные действительные числа; G, F — аналитические функции, есть точное решение уравнений (14), (15).

Отметим, что функции G, F в значительной степени произвольны, так как единственным ограничением на их выбор является требование необращения в нуль якобиана (14), поэтому выражение (16) описывает некоторый класс вихревых течений. Траектории жидких частиц для этих течений являются эпициклоидами (гипоциклоидами), т. е. частицы описывают окружности. Именно поэтому течения данного типа мы назвали птолемеевскими. Свойства этих течений подробно изучены в [18].

Для нас важно отметить, что птолемеевские течения являются вихревыми. Завихренность Ω для них в переменных Лагранжа запишется следующим образом:

$$\Omega = \frac{2(\lambda |G_\eta|^2 - \mu |F_{\bar{\eta}}|^2)}{|G_\eta|^2 - |F_{\bar{\eta}}|^2}.$$

Из этого выражения видно, что если хотя бы одна из функций, G или F , отлична от линейной и $\lambda \neq \mu$, то завихренность распределена неоднородно по области течения.

Частным случаем полученного класса течений являются волны Герстнера — трохойдальные волны на поверхности бесконечно глубокой тяжелой жидкости [5, 7]. Для них в выражении (16) следует положить $\lambda = 0, G = \eta, F = -iR \exp(ik\bar{\eta})$ (R — амплитуда волны, k — волновое число). Среди других примеров птолемеевских течений со свободной поверхностью укажем эпициклоидальные волны в равномерно вращающейся на бесконечности жидкости, содержащей цилиндрическую полость (описание этих волн получено независимо в работах [19] и [20]), поверхностные волны в цилиндре однородно заряженного электронного газа в однородном магнитном поле, а также независимые движения электронной и ионной жидкостей в равновесной конфигурации плазменного цилиндра (в обоих случаях свободная поверхность имеет вид гипоциклоиды [21]).

Рассмотрим одиночную вихревую область, потенциально обтекаемую снаружи. Пусть выражение

$$W = c\zeta \exp(i\lambda t) + F(\bar{\zeta}), \quad \zeta = \exp(ik\eta), \quad |\zeta| \leq 1 \quad (17)$$

задает вихревое течение внутри этой области, функция F не имеет особенностей внутри области и на плоскости лагранжевой переменной ζ ей соответствует внутренность единичного круга. Для склейки движения (17) с внешним потенциальным поступим следующим образом.

Запишем комплексную координату W для области потенциального движения ($|\zeta| > 1$) в виде

$$W = c\zeta \exp(i\lambda t) + F(\zeta^{-1}). \quad (18)$$

Это выражение совпадает с (17) на границе сшивки потоков ($|\zeta| = 1$). Комплексную скорость потенциального течения представим выражением

$$V = i\lambda c \bar{\zeta}^{-1} \exp(i\lambda t). \quad (19)$$

Соотношения (18), (19) решают проблему потенциального продолжения движения (17), так как являются параметрической формой записи искомого потенциального течения. Действительно, из них следует, что $\bar{V} = \bar{V}(W, t)$, а при $|\zeta| = 1$ удовлетворяются условия непрерывности смещения границы вихря и давления (непрерывность давления проверяется непосредственным вычислением).

Заметим, что поле скорости потенциального течения будет однозначной функцией, если производная W по параметру ζ (в области вне вихря ζ не является лагранжевой переменной!) не обращается в нуль в области $|\zeta| \geq 1$. Нетрудно показать, что это условие выполняется всегда, если якобиан (14) не обращается в нуль внутри вихря, т. е. не нарушается справедливость уравнения непрерывности.

Укажем также, что закон спадания скорости на бесконечности такой же, как для точечного вихря.

Итак, выражения (17)–(19) описывают самосогласованное взаимодействие одиночного нестационарного вихря с окружающим потенциальным течением. Известное точное решение для эллиптического вихря Кирхгофа получается из этих соотношений, если взять $c = \frac{1}{2}(A + B)$, $F(\bar{\zeta}) = \frac{1}{2}(A - B)\bar{\zeta}$, где A, B — полуоси эллипса. В случае степенной функции F с целым показателем степени $n \geq 2$ ($F(\bar{\zeta}) = \alpha \bar{\zeta}^n$) полученное нами решение описывает семейство вихрей гипоциклоидальной формы с числом выступов $n + 1$, вращающихся без изменения формы с угловой скоростью $\omega = \lambda n(n + 1)^{-1}$. Условием отсутствия самопересечения границы служит неравенство $\alpha \leq cn^{-1}$. Это условие обеспечивает однозначность поля скорости потенциального течения. Завихренность внутри гипоциклоидальной области распределена следующим образом:

$$\Omega = \frac{2\lambda c^2}{c^2 - n^2 \alpha^2 |\zeta|^{2(n-1)}}.$$

Если для эллиптического вихря завихренность однородная, то для остальных членов семейства она минимальна в центре вихря и возрастает к границе. Заметим, что если гипоциклоидальный вихрь мало отличается от кругового ($\alpha \ll c$), то $\lambda = \Omega/2$ и угловая скорость возмущения, распространяющегося вдоль границы вихря,

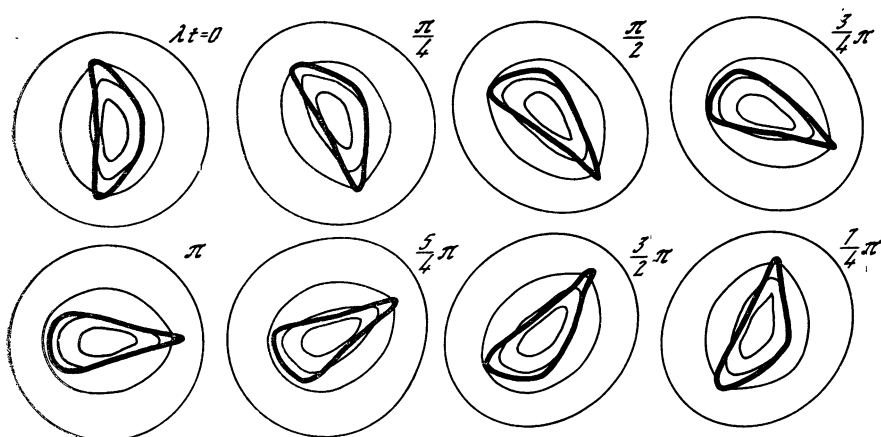


Рис. 3. Динамика одиночной вихревой области для $F(\bar{\zeta}) = -\alpha\bar{\zeta} + \beta\bar{\zeta}^2$

$\omega = \frac{\Omega}{2} n(n+1)^{-1}$, т. е. совпадает с угловой скоростью вращения линейных волн Кельвина ($n+1 = m$, см. введение).

Для функции F , отличной от степенной, вихревая область, помимо вращения, деформируется довольно сложным образом. Характер этой деформации определяется из выражения (17). На рис. 3 воспроизведена динамика границы вихревой области для течения, описываемого функцией

$$W = \zeta \exp(i\lambda t) - \alpha\bar{\zeta} + \beta\bar{\zeta}^2,$$

где α, β — действительные параметры ($|\alpha| + 2|\beta| < 1$). Жирная линия отвечает границе вихря, тонкие — линиям тока.

Заключение

В настоящей статье мы указали два новых подхода к проблеме аналитического исследования плоских вихрей в идеальной жидкости. Общим для них является использование функций комплексного переменного, что, как было показано, в ряде случаев существенно упрощает исследование. Хочется надеяться, что возможности предложенных здесь методов далеко не исчерпаны, и последние могут быть использованы для решения более сложных (нежели рассмотренные выше) эталонных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Вихревой поток, переливающийся через препятствие в форме круглого полуцилиндра // Собр. соч., М.; Л.: ОГИЗ, 1948. Т. 2. С. 437—545.
2. Чаплыгин С. А. Вихревой поток, обтекающий преграду в виде забора // Там же. С. 546—554. 1

3. Чаплыгин С. А. Поток, обтекающий с непрерывными скоростями забор с образованием вихрей впереди и позади забора // Там же. С. 555—566.
4. Stuart J. T. On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 29, N 3. P. 417—440.
5. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1947. 928 с.
6. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: Гостехтеориздат, 1948. Ч. 1. 535 с.
7. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 747 с.
8. Moore D. W., Saffman P. G. Structure of a line vortex in an imposed strain // Aircraft wake turbulence and its detection. N.Y.: Plenum press, 1971. P. 339—354.
9. Шабат А. Б. О двух задачах на склеивание // ДАН СССР. 1963. Т. 150, № 6. С. 1242—1245.
10. Burbea J., Landau M. The Kelvin waves in a vortex dynamics and their stability // J. Comp. Phys. 1982. Vol. 45. P. 127—156.
11. Дим Г., Забуски Н. Стационарные V-состояния, их взаимодействие, возврат и разрушение // Солитоны в действии. М.: Мир, 1981. С. 289—304.
12. Pierrchumbert R. T. A family of steady translating vortex pairs with disturbed vorticity // J. Fluid Mech. 1980. Vol. 99, N 1. P. 129—143.
13. Burbea J. Vortex motions and conformal mappings // Lecture notes in physics. Berlin etc.: Springer, 1980. Vol. 120. P. 276—298.
14. Burbea J. Aerofoil vortex in a rotational and strained field // Proc. Roy. Soc. Japan. A. 1983. Vol. 390. P. 181—189.
15. Чаплыгин С. А. О пульсирующем цилиндрическом вихре // Собр. соч. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. Т. 2. С. 138—154.
16. Kida S. Motion of an alliptic vortex in a uniform shear flow // J. Phys. Japan. 1981. Vol. 50. P. 10.
17. Стокер Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
18. Абрашкин А. А., Якубович Е. И. О нестационарных вихревых течениях идеальной несжимаемой жидкости // ЖПМТФ. 1985. № 2. С. 57—64.
19. Абрашкин А. А. Нелинейные азимутальные волны в центрифуге // ЖПМТФ. 1984. № 3. С. 86—89.
20. Иногамов Н. А. Цилиндрический аналог трохоидалных волн Терстнера: Препр. ИТФ АН СССР № 80. М., 1984.
21. Абрашкин А. А. Плоские нелинейные МГД-течения в круглом плазменном цилиндре в продольном магнитном поле // Физика плазмы. 1984. Т. 10, № 4. С. 730—734.



УДК 517.9 : 532.5.013

ВИХРЕВОЕ УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА—ПЛАНКА

А. А. МИГДАЛ

Введение

Гидродинамика веками описывалась дифференциальными уравнениями в частных производных. Такой подход оправдал себя при описании ламинарных потоков, но при описании явлений турбулентности возникли трудности. Источник этих трудностей в исходном выборе динамических переменных — компонент поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Это поле ведет себя стохастическим образом в турбу-

лентных потоках, что делает бесполезными дифференциальные уравнения. Требуемое число степеней свободы превышает возможности любого компьютера.

Другими словами, ни жидкие частицы, ни волны не представляют собой истинное элементарное возбуждение в турбулентном потоке. Этих возбуждений слишком много, и все они взаимодействуют между собой, поэтому надо поискать другие элементарные возбуждения и переформулировать динамику жидкости.

Аналогичные явления происходят в глюонных калибровочных полях, где калибровочный потенциал $A_\mu(x)$ ведет себя стохастически, что приводит к знаменитому удержанию кварков. Для того чтобы разработать количественную теорию движения кварков, был развит петлевой подход к калибровочным теориям [4]. Суть этого подхода состоит в переформулировке петлевой динамики как (гораздо более простой) динамики силовых линий.

Оказалось, что калибровочное поле можно полностью исключить из динамических уравнений, так что в качестве динамических переменных остаются только силовые линии. Для распределения вероятностей $W(C_1, \dots, C_N)$ формы (C_1, \dots, C_N) замкнутых силовых линий были получены некоторые функциональные уравнения и было показано, что эти уравнения описывают как пертурбативные (ламинарные), так и непертурбативные (турбулентные) явления.

В этой работе предлагаются и исследуются петлевые уравнения гидродинамики¹. Аналогом силовой линии будет вихревая нить, а аналогом вильсоновского петлевого функционала будет производящий функционал для вихревых нитей. Считается, что эти вихревые нити действительно являются элементарными возбуждениями турбулентного потока. Их динамика хотя и непривычна, но фактически более проста, чем динамика волн и частиц, и требует меньших компьютерных ресурсов.

Мы обсуждаем стратегию компьютерного расчета петлевых уравнений гидродинамики, но проведение таких расчетов пока не входит в нашу задачу.

1. Вихревая динамика в «сухой» воде

Начнем со случая идеальной жидкости без сжимаемости и вязкости — так называемой сухой воды.

Уравнения Эйлера

$$\dot{v} + (v \nabla) v = -\nabla p, \quad (1)$$

$$(\nabla v) = 0 \quad (2)$$

могут быть переформулированы как уравнения для завихренности

$$\Omega = \text{rot } v. \quad (3)$$

¹ Стимулом к постановке задачи послужили неоднократные обсуждения вопроса с В. Е. Захаровым.

Беря ротор от (1) и используя (2), получаем следующее уравнение для Ω :

$$\dot{\Omega} + (\mathbf{v}\nabla)\Omega = (\Omega\nabla)\mathbf{v}. \quad (4)$$

Физический смысл этого уравнения содержится в теореме Гельмгольца: каждая точка каждой вихревой нити движется с локальной скоростью. Это важное свойство идеального потока можно использовать для того, чтобы полностью исключить поле Ω , заменив его набором вихревых нитей C_i .

Рассмотрим набор вихревых нитей C_1, \dots, C_N с интенсивностями $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$. Они приводят к завихренности

$$\Omega(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \oint_{C_i} d\rho \delta(\mathbf{r} - \rho). \quad (5)$$

Это выражение можно рассматривать как анзац для решения уравнений (3), (4), в котором петли C_i рассматриваются как неизвестная функция t . Для краткости введем обозначения $C \equiv \bigcup C_i$ и

$$\oint_C d\rho \equiv \sum_{i=1}^N \Gamma_i \oint_{C_i} d\rho. \quad (6)$$

Итак, рассмотрим анзац

$$\Omega(\mathbf{r}, t) = \oint_{C(t)} d\rho \delta(\rho - \mathbf{r}). \quad (7)$$

В соответствии с теоремой Гельмгольца уравнения (3), (4) будут выполнены, если

$$\dot{\rho} = \mathbf{v}(\rho), \quad \rho \subset C. \quad (8)$$

Это можно легко проверить с помощью тождества

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_{C(t)} d\rho f(\rho - \mathbf{r}) = \oint_{C(t)} \left[\dot{\rho} \left(d\rho \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) - d\rho \left(\dot{\rho} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \right] f(\rho - \mathbf{r}). \quad (9)$$

В нашем случае $f(\rho - \mathbf{r}) = \delta(\rho - \mathbf{r})$ и $\dot{\rho} = \mathbf{v}(\rho)$ может быть заменено на $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ и вынесено из-под интеграла, после чего этот интеграл дает Ω . Поэтому

$$\dot{\Omega} = \frac{\partial}{\partial t} \oint_{C(t)} d\rho \delta(\rho - \mathbf{r}) = (\Omega\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla)\Omega, \quad (10)$$

что эквивалентно (4).

Заметим, что число N петель и их интенсивности Γ_i остались произвольными. Другими словами, эти Γ_i являются интегралами движения:

$$\dot{\Gamma}_i = 0. \quad (11)$$

Имеется также и обычный интеграл движения, а именно энергия

$$E = \int d^3r \mathbf{v}^2(\mathbf{r})/2 = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathbf{v}_\mathbf{k} \mathbf{v}_{-\mathbf{k}}/2. \quad (12)$$

Чтобы выразить ее в терминах вихревых нитей, надо прежде всего выразить скорость \mathbf{v} . В импульсном пространстве

$$\mathbf{v}_\mathbf{k} = i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}_\mathbf{k}/k^2, \quad (13)$$

где

$$\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{k} = \oint_{C(t)} d\boldsymbol{\rho} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}}. \quad (14)$$

В координатном пространстве

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \oint_C d\boldsymbol{\rho} \frac{1}{|\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}|}, \quad (15)$$

$$E = \frac{1}{2} \oint_C \oint_C (d\boldsymbol{\rho} d\boldsymbol{\rho}') \frac{1}{4\pi |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|}. \quad (16)$$

Мы подошли к проблеме ультрафиолетовых расходимостей. Интегралы в (15), (16) логарифмически расходятся при совпадающих точках, что означает логарифмическую расходимость соответствующих импульсных интегралов при больших импульсах. Можно предложить следующий простой способ обрезания:

$$|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| \rightarrow [(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^2 + \varepsilon^2]^{1/2}. \quad (17)$$

В импульсном пространстве это соответствует следующему весовому фактору:

$$\begin{aligned} d^3\mathbf{k} &\rightarrow d^3\mathbf{k} \rho(\mathbf{k}); \\ \rho(\mathbf{k}) &= \int_0^\infty dm \exp[-(m^2 + \varepsilon^2\mathbf{k}^2)^{1/2}]. \end{aligned} \quad (18)$$

Этот фактор экспоненциально убывает при $|\mathbf{k}| \gg 1/\varepsilon$, что обрезает все импульсные интегралы. При $|\mathbf{k}| \ll 1/\varepsilon$ величина $\rho = 1$, так что существенная инфракрасная часть остается нетронутой.

Радиус обрезания ε служит единственным масштабным фактором теории. Без ε была бы фиктивная масштабная инвариантность. Возникает естественный вопрос: зачем нужно обрезать классические уравнения Эйлера?

Ответ состоит в том, что это приходится делать из-за сингулярных начальных условий. Подразумевалось, что в начальный момент времени завихренность была сконцентрирована в вихревых нитях C_i , а не размазана по пространству. Тогда согласно полученным выше уравнениям в любой момент времени t завихренность будет сконцентрирована в распространяющихся вихревых нитях $C_i(t)$.

Расходимости возникают в окрестности вихревых нитей, где скорость направлена перпендикулярно локальному направлению вихревой нити и логарифмически растет по абсолютной величине.

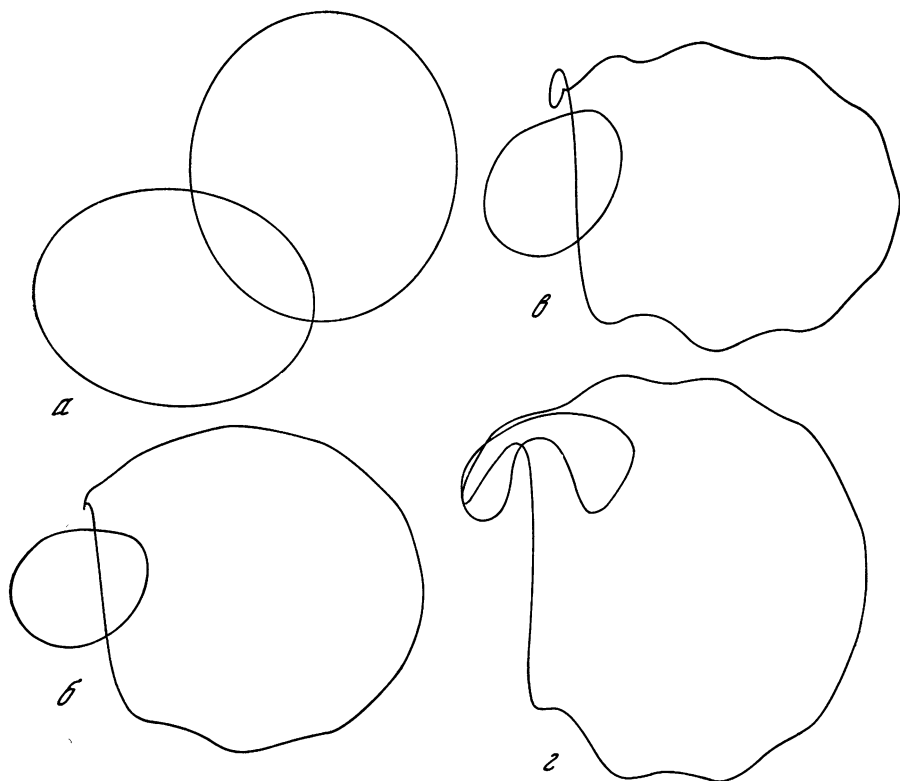


Рис. 1. Последовательные стадии эволюции сцепленных вихрей интенсивности Γ_1

В физическом потоке, соответствующем, например, цилиндрической трубе, разумеется, нет никаких сингулярных линий. Завихренность размазана по пространству, и, для того чтобы это воспроизвести, понадобилось бы бесконечное количество вихревых нитей бесконечно малой интенсивности. В чем же тогда смысл предложенной выше модели?

На этот вопрос можно дать несколько ответов. Во-первых, можно взять большое, но конечное число соседних вихревых нитей и приблизительно воспроизвести физические начальные условия. Поскольку сингулярности только логарифмические, регулярный поток можно воспроизвести умеренным числом вихревых нитей. Во-вторых, можно рассмотреть несколько нитей или даже одну и изучить ее эволюцию за большой интервал времени. Естественно ожидать, что это движение со временем станет стохастическим, как в большинстве нелинейных гамильтоновых систем [2, 3]. Соответствующие компьютерные расчеты подтверждают эти ожидания [4] (рис. 1, 2).

Основанием для того, чтобы оставить только несколько нитей, служит ожидаемая независимость стохастического движения от

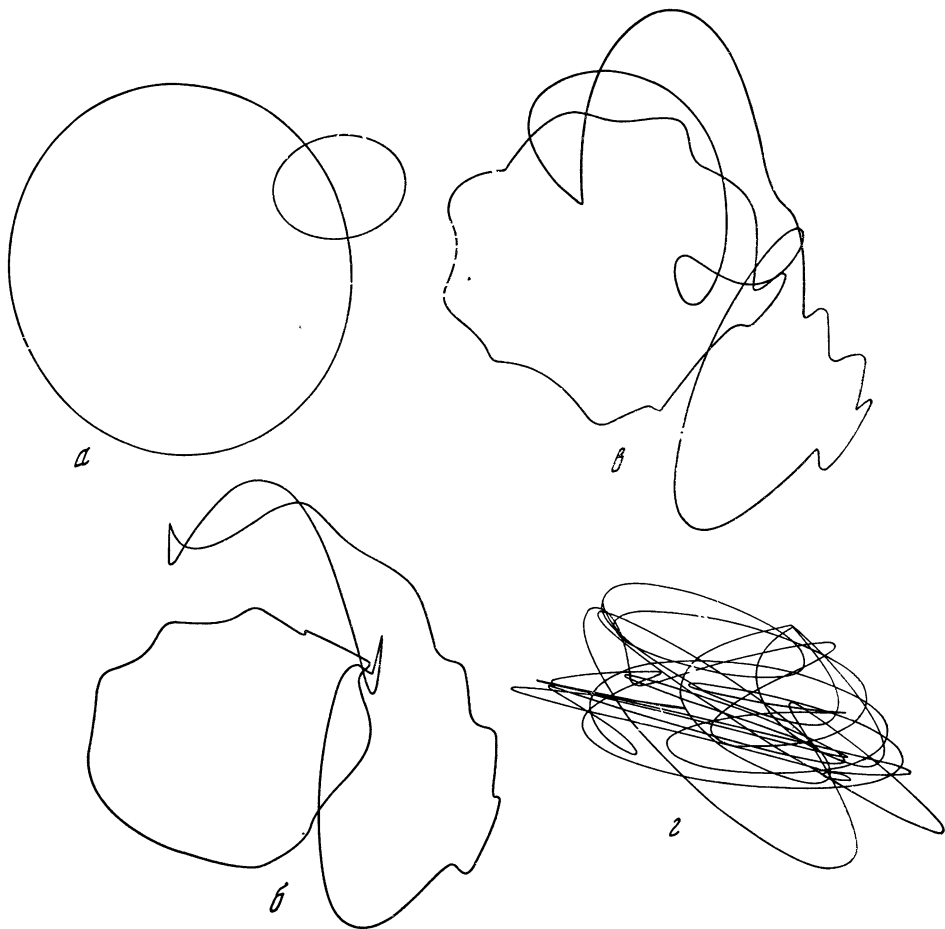


Рис. 2. Четыре стадии эволюции сцепленных вихрей интенсивности $\Gamma_2 > \Gamma_1$

начальных условий. В этом случае, рассматривая динамику одной нити, можно получить универсальные статистические свойства и параметры турбулентного потока, такие, как среднее распределение энергии в импульсном пространстве

$$\langle E_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{2} \langle | \mathbf{v}_{\mathbf{k}} |^2 \rangle \quad (19)$$

или фрактальная размерность вихревой нити. Требуется тщательное исследование этой привлекательной возможности.

В-третьих, нелинейная гамильтонова модель в петлевом пространстве представляет интерес с чисто теоретической точки зрения. Координатная функция $C_i(\varphi)$ нитей

$$C_i: \rho = C_i(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (20)$$

служит координатами в фазовом пространстве обобщенной гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$H [C_i(\cdot)] = (8\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \sum_{ij} \Gamma_i \Gamma_j (C'_i(\varphi) C_j(\varphi')) / \{ [C_i(\varphi) - C_j(\varphi')]^2 + \varepsilon^2 \}^{1/2}. \quad (24)$$

Гамильтоново уравнение движения имеет простой вид:

$$\delta H / \delta C_i(\varphi) = \dot{C}_i \times C'_i. \quad (22)$$

Эти уравнения параметрически инвариантны:

$$C_i(\varphi) \rightarrow C_i(f_i(\varphi)), \quad (23)$$

$$f_i(\varphi) > 0, \quad f_i(0) = 0, \quad f_i(2\pi) = 2\pi. \quad (24)$$

Это своего рода калибровочная инвариантность, характерная для динамики геометрических объектов. Динамическая геометрия играет все возрастающую роль в теоретической физике, так что эта простая модель может служить полигоном для аналитических и для численных тренировок.

2. «Мокрая» вода и диффузия вихрей

Более реалистическая «мокрая» вода (все еще несжимаемая) описывается уравнениями Навье—Стокса. В терминах завихренности $\Omega = \text{rot } v$ эти уравнения имеют следующий вид:

$$\dot{\Omega} + (v \nabla) \Omega - (\Omega \nabla) v = \nu \Delta \Omega. \quad (25)$$

Физический смысл правой части связан с диффузией вихревых нитей. Эти нити не только дрейфуют с локальной скоростью, но также принимают участие в случайных микроскопических движениях. Природа этих движений несущественна с макроскопической точки зрения. Можно, например, представлять себе маленькие вихри, создающие дополнительные случайные скорости в каждой точке жидкости.

В любом случае диффузия завихренности означает, что вихревые нити подвергаются некоторым случайным возмущениям, подобно тому как диффузия частиц вызывается случайными ударами молекул.

Разница, однако, в том, что движение вихревых нитей не является ньютониновым: первые, а не вторые временные производные определяются силами. Как обсуждалось выше, это движение в фазовом пространстве, а не в координатном. Случайные силы, о которых мы говорим, фактически представляют собой случайные скорости в фазовом пространстве.

Итак, вместо уравнения Гельмгольца (8) предлагаем следующее уравнение:

$$\dot{\rho} = v(\rho) + f(\rho, t), \quad \rho \subset C, \quad (26)$$

где $\mathbf{f}(\rho, t)$ является гауссовой случайной переменной с корреляционной функцией

$$\langle f_\alpha(\rho, t) f_\beta(\rho', t') \rangle = \delta(t - t') \delta_{\alpha\beta} Q(\rho - \rho'). \quad (27)$$

Функция $Q(\rho - \rho')$ сконцентрирована на микроскопическом масштабе, и надо ожидать, что ее явная форма не повлияет на макроскопическое движение.

Попробуем найти соответствие между (25) и (26). Как и раньше, дифференцируем вихревой анзац (7) и используем тождество (9); получаем следующее уравнение:

$$\dot{\Omega} + (\mathbf{v}\nabla)\Omega - (\Omega\nabla)\mathbf{v} = \partial_\beta(\Omega_\beta\mathbf{f} - \Omega f_\beta). \quad (28)$$

Здесь случайная сила f_α в правой части флуктуирует на микроскопическом масштабе. Если усреднить (28) по промежуточному между микро- и макроскопическим масштабу, то Ω и \mathbf{v} в левой части могут рассматриваться как константы, в то время как \mathbf{f} в правой части флуктуирует как гауссова случайная переменная. Поскольку среднее $\langle i \rangle$ равно нулю, то главный член в правой части будет возникать от флуктуаций Ω . Этот член будет больше, чем отброшенная ковариация $\mathbf{v}\Omega$ слева.

Известное свойство гауссовых переменных приводит к следующему соотношению:

$$\langle \Omega_\beta(\mathbf{r}, t) f_\alpha(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d^3z \frac{\delta\Omega_\beta(\mathbf{r}, t)}{\delta f_\alpha(\mathbf{z}, t)} Q(\mathbf{r} - \mathbf{z}). \quad (29)$$

Одновременная вариация $\delta\Omega/\delta f$ понимается в смысле главного значения

$$\frac{\delta\Omega_\beta(\mathbf{r}, t)}{\delta f_\alpha(\mathbf{z}, t)} \equiv \frac{1}{2} \frac{\delta\Omega_\beta(\mathbf{r}, t)}{\delta f_\alpha(\mathbf{z}, t+0)} + \frac{1}{2} \frac{\delta\Omega_\beta(\mathbf{r}, t)}{\delta f_\alpha(\mathbf{z}, t-0)}. \quad (30)$$

Это становится ясным, если размазать по микроскопическому масштабу δ -функцию в (27). Тогда производная $\delta\Omega(t)/\delta f(t')$ будет проинтегрирована в (29) по t' в окрестности $t' = t$. Благодаря симметрии по $t' - t$ приходим к прескрипции главного значения.

Используем теперь цепное правило и получаем

$$\frac{\delta\Omega_\beta(\mathbf{r}, t)}{\delta f_\alpha(\mathbf{z}, t)} = \sum_i \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\delta\Omega_\beta(\mathbf{r}, t)}{\delta C_{i\gamma}(\varphi)} \frac{\delta C_{i\gamma}(\varphi)}{\delta f_\alpha(\mathbf{z}, t')}. \quad (31)$$

Заметим, что вариационные производные $\delta/\delta C_i(\varphi)$ затрагивают функции одной переменной φ , в то время как вариационные производные $\delta/\delta f_\alpha(\rho, t')$ затрагивают функции четырех переменных: ρ_x, ρ_y, ρ_z и t .

Точно так же, как в (9), находим из (5)

$$\frac{\delta\Omega_\beta(\mathbf{r}, t)}{\delta C_{i\gamma}(\varphi)} = -\Gamma_i \left(C'_{i\beta} \frac{\partial}{\partial r_\gamma} - C'_{i\gamma} \frac{\partial}{\partial r_\beta} \right) \delta[r - C_i(\varphi, t)], \quad (32)$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta \Omega_{\beta}(r, t)}{\delta f_{\alpha}(z, t')} = \oint_C (d\rho_{\gamma} \partial / \partial r_{\beta} - \partial \rho_{\beta} \partial / \partial r_{\gamma}) \frac{\delta \rho_{\gamma} \delta(r - \rho)}{\delta f_{\alpha}(z, t')}. \quad (33)$$

Функция Грина

$$k_{\gamma\alpha}(\rho t, z t') = \frac{\delta \rho_{\gamma}}{\delta f_{\alpha}(z, t')} \quad (34)$$

может быть найдена из вариации (26)

$$\frac{\partial}{\partial t} K_{\gamma\alpha}(\rho t, z t') = \delta_{\alpha\gamma} \delta(t - t') \delta(\rho - z) + \hat{L} K. \quad (35)$$

Явная форма линейного оператора $\hat{L} = \delta U / \delta \rho$ несущественна, как это сейчас будет видно. Решение (35) имеет вид

$$k = \theta(t - t') \left(\hat{T} \exp \left(\int_t^{t'} \hat{L} dt'' \right) \right)_{z, \alpha}^{\rho, \gamma}. \quad (36)$$

При совпадающих временах по предскрипции главного значения находим

$$k \rightarrow 1/2 \delta_{\gamma\alpha} \delta(\rho - z). \quad (37)$$

Подставляя (37) в (33) и в (29), находим

$$\begin{aligned} \langle \Omega_{\beta}(r, t), f_{\alpha}(r, t) \rangle &= 1/2 \oint_C (d\rho_{\alpha} \partial / \partial r_{\beta} - d\rho_{\beta} \partial / \partial r_{\alpha}) \delta(r - \rho) Q(r - \rho) = \\ &= 1/2 Q(0) (\partial_{\beta} \Omega_{\alpha} - \partial_{\alpha} \Omega_{\beta}). \end{aligned} \quad (38)$$

Сравнивая (38) с уравнением Навье—Стокса (25), убеждаемся, что оно действительно воспроизводится, если

$$Q(0) = 2\nu. \quad (39)$$

Заметим, что значение корреляционной функции $Q(r)$ при конечных r не повлияло на макроскопические уравнения.

Итак, мы приходим к замечательно простым уравнениям (26), (27) движения вихревых нитей в вязкой жидкости. Необходимо сделать несколько замечаний.

Заметим, что теперь есть два масштаба толщины вихревых нитей: радиус обрезания ε в уравнениях (15), (17) для $\mathbf{V}(r)$ и диффузионная длина

$$r_d = \sqrt{\nu t}. \quad (40)$$

На малых временах, пока $r_d < \varepsilon$, эффективная толщина задается ε , так что она микроскопическая. Но на больших временах, когда $r_d \gg \varepsilon$, возникает макроскопическая толщина. Этот эффект имеет следующее важное следствие. В случае «мокрой» воды, когда вихревые нити диффундируют, нет необходимости в бесконечном числе нитей, поскольку завихренность размазана по пространству уже благодаря эффектам диффузии.

Флуктуирующая вихревая нить эквивалентна бесконечному набору соседних вихревых нитей, распределенных в соответствии с уравнениями Навье—Стокса. Конечно, понадобится бесконечное время, чтобы полностью размазать вихревую нить, но временные средние будут приближаться к гладкому распределению за конечное время.

Теперь можно представить себе статистический ансамбль вихревых нитей, соответствующий различным реализациям случайной силы $f(\mathbf{r}, t)$. Ограничения гамильтонова движения исчезают. Что касается энергии, то она теперь передается от макроскопических масштабов к микроскопическим. Полная потеря энергии равна

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -\nu \left\langle \int (\partial_\alpha v_\beta)^2 d^3\mathbf{r} \right\rangle = \\ &= -\nu \left\langle \int d^3\mathbf{r} \Omega^2 \right\rangle = -\nu \left\langle \oint_C \oint_C (d\rho d\rho') \delta(\rho - \rho') \right\rangle. \end{aligned} \quad (41)$$

Эта формула нуждается в комментариях. Согласно первой строке энергия теряется во всем объеме, где есть градиенты скорости. Во второй строке формулы было использовано интегрирование по частям, после чего потеря энергии была выражена через двойной контурный интеграл. Тем самым вместо объемной потери энергии введена эквивалентная потеря энергии вдоль вихревой нити, совпадающая с исходной по величине, но, конечно, не позволяющая судить о пространственном распределении энергетических потерь.

Рассмотрим подробнее эту последнюю формулу. На первый взгляд δ -функция отбирает соседние точки $\varphi = \varphi'$ на петле C (φ) так, что энергия теряется в каждой точке нити. Однако в присутствии случайной силы наша петля не является гладкой и может иметь некоторую фрактальную (хаусдорфову) размерность

$$d_H > 1.$$

Если эта фрактальная размерность больше или равна $3/2$, то имеется некоторая вероятность того, что два участка нити пересекутся в трехмерном пространстве (вспомним, что, например, гладкие поверхности в общем случае пересекаются в отличие от гладких линий). В случае $d_H = 3/2$ будет конечное число пересечений, а в случае $d_H > 3/2$ будет область самопересечений, имеющая фрактальную размерность $2d_H - 3$. Следовательно, энергия может теряться также в областях самопересечения стохастических вихревых нитей. Однако если $d_H < 3$, то область самопересечения имеет меньшую размерность, чем вихревая нить. Видно, что d_H является очень важной характеристикой турбулентного потока.

Обсудим теперь топологические числа

$$n_i = \frac{1}{4\pi} \int_{c_i} d\rho_\alpha \int_{c_\alpha} d\rho'_\beta \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\gamma \frac{1}{|\rho - \rho'|}. \quad (42)$$

Как хорошо известно, эти n_{ij} (с точностью до несущественного зна-

ка) совпадают с числом оборотов петли C_i вокруг C_j или наоборот, что то же самое.

В отсутствие диффузии все эти n_{ij} сохраняются, поскольку нормальная компонента скорости исчезает на каждой вихревой нити, так что линии не могут друг через друга пройти.

Однако диффузия разрушает эти законы сохранения, поскольку всегда есть вероятность случайного сдвига в нормальном направлении, когда линии приближаются друг к другу. Это напоминает туннельный эффект в квантовой механике. Вероятность такого туннелирования зависит от динамики. Естественно ожидать, что этот эффект будет сильнее в турбулентном потоке.

Если вихревая нить имеет фрактальную размерность $d_H > 1$, то число оборотов не имеет вообще статистического смысла.

3. Петлевое уравнение Фоккера—Планка

Уравнение движения (26) вихревой нити в вязкой жидкости сильно напоминает уравнение Ланжевена, которое, как известно, описывает приближение к равновесию статистических систем (см. [5], где есть современный обзор).

Существенное усложнение состоит в том, что в нашем случае динамическая сила $v(\rho)$ в (26) не является функциональной производной $\delta U/\delta C$ (φ) какого бы то ни было потенциала $U[C]$. Тем не менее тот же аргумент, как в случае уравнения Ланжевена (см. приложение в обзоре [5]), приводит нас к уравнению Фоккера—Планка.

Теперь это уже будет уравнение Фоккера—Планка в петлевом пространстве, что делает его особенно интересным.

Как обсуждалось в предыдущем разделе, вихревая нить дает гладкое распределение завихренности, если есть диффузия, поэтому если мы интересуемся окончательным распределением вероятностей, то нет необходимости рассматривать много нитей. Другой аргумент — это то, что набор замкнутых петель C_i всегда можно рассматривать как одиночную петлю C , добавляя «провода», соединяющие петли.

В отсутствие диффузии это преобразование было незаконным, поскольку всегда приводило к изломам на нитях, а такие изломы не могли возникнуть сами по себе во время движения. Другими словами, в отсутствие диффузии вихревые нити были гладкими, что и давало возможность классифицировать сингулярности: пересечения, углы, несвязные куски и т. д.

В присутствии диффузии типичная линия не является гладкой, она напоминает траекторию броуновского движения (хотя ее фрактальную размерность еще предстоит найти!). По крайней мере ясно, что больше нет барьера между одной петлей и многими петлями или, вернее, теперь этот барьер можно преодолеть.

То же самое относится к интенсивностям линий Γ . Каждая линия с конечной интенсивностью Γ может быть рассмотрена как n линий с интенсивностью Γ/n или с добавлением «проводов» как

одна линия с интенсивностью Γ/n , но обойденная n раз. Таким образом, если мы хотим воспроизвести какие-нибудь реалистические начальные условия для завихренности Ω , нам нужно использовать очень длинную нить $|C| \sim \varepsilon^{-2}$ с очень маленькой интенсивностью $\Gamma \sim \varepsilon^2$. Эта нить должна равномерно заполнять некоторый объем, подобно проводам, заполняющим толстый кабель.

Во время эволюции нить размажется по пространству нерегулярным образом как случайная траектория (с неизвестной пока фрактальной размерностью d_H). Именно эту последнюю стадию эволюции мы и будем сейчас описывать с помощью петлевого уравнения Фоккера—Планка².

Введем следующий производящий функционал:

$$\begin{aligned} W_t[P] &= \left\langle \exp \left[i \int_0^{2\pi} d\varphi C_\alpha(\varphi, t) P'_\alpha(\varphi) \right] \right\rangle = \\ &= \left\langle \exp \left[-i \int_0^{2\pi} d\varphi C'_\alpha(\varphi, t) P_\alpha(\varphi) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь используем P' , а не P для соблюдения параметрической инвариантности: $P(\varphi) \rightarrow P(f(\varphi))$; $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 2\pi$.

Параметрическая инвариантность играет важную роль в петлевой кинематике и динамике [1]. Читатель, знакомый с калибровочными теориями, обратит внимание на сходство между (43) и вильсоновской петлей абелевой теории.

Эволюция $W[P]$ соответствует уравнению движения вихревой нити C . Точно так же, как и в предыдущем разделе, временная производная от (43) может быть преобразована в следующие два члена:

$$\begin{aligned} \dot{W}_t[P] &= \left\langle -\frac{1}{2} \int d\varphi_1 d\varphi_2 P'_\alpha(\varphi_1) P'_\alpha(\varphi_2) \times \right. \\ &\quad \times Q(C(\varphi_1) - C(\varphi_2)) + i \frac{\gamma}{4\pi} \int d\varphi_1 P'_\alpha(\varphi_1) \times \\ &\quad \times \int d\varphi_2 C'_\beta(\varphi_2) e_{\alpha\beta\gamma} \frac{C_\gamma(\varphi_1) - C_\gamma(\varphi_2)}{\{[C(\varphi_1) - C(\varphi_2)]^2 + \varepsilon^2\}^{3/2}} \times \\ &\quad \left. \times \exp \left[-i \int_0^{2\pi} d\varphi C'_\alpha(\varphi, t) P_\alpha(\varphi) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (44)$$

Используя импульсное представление и заменяя во втором члене $C'_\beta(\varphi_2)$ на $i\delta/\delta P_\beta(\varphi_2)$ применительно к экспоненте, находим линейное уравнение в петлевом пространстве: $(i/\gamma) \dot{W}_t = \hat{H}W_t$ со следующим оператором эволюции:

$$(\hat{H}W)[P] = \int d\varphi_1 P'_\alpha(\varphi_1) \int d\varphi_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rho(\varepsilon k) \times$$

² Имеется в виду, что в уравнения добавлены члены, обеспечивающие подкачку энергии с больших масштабов. Ниже мы не будем выписывать эти члены в явном виде.

$$\times \left\{ -\frac{1}{2} \frac{Q(k)}{\gamma\rho(\varepsilon k)} P'_\alpha(\varphi_2) + i \frac{e_{\alpha\beta\gamma} k_\gamma}{k^2} \frac{\delta}{\delta P_\beta(\varphi_2)} \right\} \times \\ \times W [P + k\Omega(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)], \quad (45)$$

где

$$\Omega(\varphi_1, \varphi_2, \varphi) = \theta(\varphi_1 - \varphi) - \theta(\varphi_2 - \varphi). \quad (46)$$

Этот оператор не эрмитов, так что его собственные значения h_i комплексные, но на их мнимые части имеются следующие ограничения. Во-первых, неравенство

$$|W[P]| \leq 1 \quad \forall P, t, \quad (47)$$

которое вытекает из определения W для произвольных начальных условий $C(t=0)$, приводит к тому, что

$$\text{Im } h_i \leq 0 \quad \forall i. \quad (48)$$

Во-вторых, условия нормировки

$$W_t[P]|_{P'=0} = 1 \quad \forall t \quad (49)$$

означают, что имеется по крайней мере одно вещественное собственное значение

$$\text{Im } h_0 = 0. \quad (50)$$

Тогда общее решение

$$W_t[P] = \sum \omega_i \exp(-i\gamma h_i t) \Psi_i[P] \quad (51)$$

остаётся конечным при $t \rightarrow \infty$, как этого требует условие нормировки.

В общем случае предела при $t \rightarrow \infty$ может не быть, как и можно было ожидать из общих соображений относительно турбулентности. Будет динамическая картина с перемежающимися структурами. Однако временное среднее распределение вероятностей

$$\bar{W}_{t,\tau} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} W_{t'} dt', \quad (52)$$

определяющее большинство наблюдаемых, по-видимому, стремится к пределу.

Это можно увидеть следующим образом. Рассмотрим подмножество вещественных собственных значений $h_{0\alpha}$. Если их конечное число (или по крайней мере соответствующее разложение сходится), то условия нормировки требуют, чтобы было хотя бы одно нулевое собственное значение

$$h_{00} = 0. \quad (53)$$

В противном случае временная производная W_t не будет тождественно обращаться в нуль для $P(\varphi) = \text{const}$ при всех временах.

Тогда среднее $W_{t, \tau}$ будет стремиться к конечному пределу:

$$W_{t, \tau} \rightarrow \frac{\Psi_{00}[P]}{\Psi_{00}[0]} + O\left(\frac{1}{\tau}\right). \quad (54)$$

Предполагаемую сходимость разложения по вещественным собственным значениям, однако, надо еще доказать. Вместо этого можно непосредственно усреднить (45) по времени и использовать неравенство (47). Это дает

$$\left| \frac{1}{\gamma\tau} \int_t^{t+\tau} W dt \right| = \left| \frac{W(t+\tau) - W(t)}{\gamma\tau} \right| \leq \frac{2}{\gamma\tau}. \quad (55)$$

Поэтому, если среднее распределение $\overline{W}_{t, \tau}$ ограничено для всех P , а не только для $P(\varphi) = \text{const}$, тогда при $\tau = \infty$ оно удовлетворяет уравнению

$$H\overline{W} = 0. \quad (56)$$

Опять же это не строгое доказательство, поскольку предполагалось гладкое поведение $W[P]$. Это предположение может нарушиться при $t \rightarrow \infty$.

Итак, если имеется гладкое распределение вероятности при $t \rightarrow \infty$, то оно удовлетворяет уравнению (56).

Изучим это уравнение. Прежде всего заметим, что оно совместимо с трансляционной инвариантностью $C(\varphi) \rightarrow C(\varphi) + \text{const}$. В импульсном пространстве это означает, что $P(\varphi)$ должно быть периодичным:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi P'_\mu(\varphi) = P_\mu(2\pi) - P_\mu(0) = 0. \quad (57)$$

Уравнение (56) допускает трансляционно-инвариантный анзац

$$W[P] = (2\pi)^3 \delta\left(\int_0^{2\pi} d\varphi P'(\varphi)\right) \overline{W}[P]. \quad (58)$$

Формально это вытекает из (45) с помощью тождества

$$\int_0^{2\pi} d\varphi P'_\alpha(\varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi (P_\alpha + k_\alpha \Omega)', \quad (59)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_\alpha \delta / \delta P_\beta(\varphi_2) \int_0^{2\pi} d\varphi P'_\alpha(\varphi) = 0. \quad (60)$$

В остальной части статьи будем подразумевать, что δ -функция вынесена из W , т. е. мы будем иметь дело с \overline{W} , которое по-прежнему будем называть W .

Свяжем теперь W -функционал с различными наблюдаемыми гидродинамики. Используя импульсное пространство, находим

$$\langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle_k = \frac{-1}{k^2} \int d\varphi_1 \int d\varphi_2 \frac{\delta^2 W[P]}{\delta P_\alpha(\varphi_1) \delta P_\alpha(\varphi_2)} \Big|_{P=k\Omega}. \quad (61)$$

Высшая корреляционная функция определяется похожими выражениями. Для упрощения формул удобнее иметь дело с корреляторами завихренности $\Omega_k = i \mathbf{k} \times \mathbf{v}_k$. Результат для корреляционных функций выглядит так:

$$\langle \Omega_{k_1}^{\alpha_1} \dots \Omega_{k_n}^{\alpha_n} \rangle = i^n \int d\varphi_1 \delta/\delta P_{\alpha_1}(\varphi_1) \dots \int d\varphi_n \times \\ \times \delta/\delta P_{\alpha_n}(\varphi_n) W \left[P(\varphi) = \sum k_i \theta(\varphi_i - \varphi) \right]. \quad (62)$$

Интересное свойство производящего функционала $W[P]$ — это его комплексность. Комплексное сопряжение эквивалентно изменению знака P (преобразованию четности):

$$\hat{W}^* [P] = W[-P]. \quad (63)$$

Другое усложнение — присутствие разрывов функции $P(\varphi)$. Как мы видели выше, разрывы $P(\varphi)$ играют роль импульсов корреляционных функций. В уравнении (45) оператор \hat{H} добавляет два разрыва в $P(\varphi)$, так что его собственное состояние $W_\infty[P]$ должно быть определено на пространстве функций $P(\varphi)$ с произвольным числом разрывов.

Наконец, надо конкретизировать обрезавшие функции $Q(k)$ и $\rho(k)$. До тех пор пока мы интересуемся макроскопическими явлениями, выбор этих функций произволен. Простой выбор, принимающий во внимание условие нормировки

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Q(k) = 2\nu, \quad (64)$$

— это следующие гауссовы функции:

$$\rho(\varepsilon k) = \exp(-\varepsilon^2 k^2/2), \quad (65)$$

$$\frac{Q(k)}{2\gamma\rho(\varepsilon k)} = (2\pi)^{3/2} \frac{\varepsilon^3 \nu}{\gamma} = \text{const.} \quad (66)$$

Параметр

$$r_0 = \varepsilon (\nu/\gamma)^{1/2} \sqrt{2\pi} \sim \varepsilon^{1/2} \nu^{1/2} \quad (67)$$

играет роль вязкого масштаба длины.

Если функционал W убывает, так что импульсные интегралы сходятся без ρ -факторов, этот r_0 останется единственным масштабным параметром петлевых уравнений. Инерционный интервал соответствует масштабам $r \gg r_0$, или $kr_0 \ll 1$ в импульсном пространстве. Заметим, что $r_0 \gg \varepsilon$. Это означает, что детали нашей процедуры обрезания несущественны на макроскопических масштабах $r \gg r_0$, которые мы собираемся изучать.

Петлевое уравнение сводит трехмерную проблему турбулентности к одномерной теории поля. Может быть, в будущем будет найдено полное аналитическое решение, но в настоящее время лучшее, что мы можем сделать, это развить численный подход. Редукция размерности дает шансы на успех такого подхода: мо-

жет быть, будет достаточно умеренного числа степеней свободы в импульсном петлевом пространстве, чтобы описать явление турбулентности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Migdal A. A. Loop equations and $1/N$ expansion // Phys. Rept. C. 1984. Vol. 102. P. 200.
2. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
3. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
4. Агистейн М. Э., Мигдал А. А. Вычислительный эксперимент в квантовой теории поля // Вопросы кибернетики. М.: Наука, 1986.
5. Мигдал А. А. Стохастическое квантование теории поля // УФН. 1986. Т. 149, вып. 1. С. 1—44.



УДК 532.516

ЭВОЛЮЦИЯ «СМЕРЧЕЙ»

Ю. К. КРАСНОВ

Введение

Смерчи и их разновидности — пылевые и снежные вихри, тромбы, торнадо и т. д. — представляют собой одно из самых впечатляющих явлений природы, характеризуются поперечными размерами до 1000 м и потому относятся к классу мезотропических процессов, для которых вращение Земли не играет существенной роли (не в пример таким мегатропическим явлениям, как ураганы, тайфуны, тропические циклоны и т. д., приводящим порой к подобным распределениям потоков в атмосфере, но с характерными размерами от 100 до 1000 км, для которых сила Кориолиса играет существенную роль).

Очевидным общим свойством смерчей является их столбообразная структура. Поэтому естествен поиск их описания в классе аксиально-симметричных решений уравнений гидродинамики, когда наблюдаемые зачастую изгибы ствола смерча объясняются как результат взаимодействия его структуры с внешним плоскопараллельным ветром. Подобный подход к описанию смерчей был впервые реализован в работах В. Н. Оболенского [1] и Д. Брента [2], идентифицировавших смерч с сингулярной вихревой нитью. Разумеется, подобный подход не позволил добиться количественного соответствия с реальным распределением скоростей в смерче, но при этом была правильно описана периферийная область на больших от ствола смерча расстояниях, практическая независимость распределения вращения по высоте смерча и т. д. Оболенскому же принадлежат соображения о твердотельном характере течения в стволе смерча и о взаимосвязи нисходящих потоков

с формированием вихревой нити. Все эти выводы были подтверждены развитой впоследствии количественной теорией смерчей.

Решающий шаг в развитии теории смерчей был сделан в 50-е годы в работах Дж. М. Бюргерса [3], Г. А. Эйнштейна [4], Р. О. Саливана [5] и Р. Р. Лонга [6, 7]. Был обнаружен и изучен эффект «интенсификации завихренности» и обусловленная им самолокализация вихря скорости в очень малой области вокруг оси симметрии аксиально-сходящегося потока вязкой сплошной среды. Интенсификация завихренности подробно описана в известной книге Дж. К. Бэтчелора [8] и представляет собой проявление эффекта увеличения угловой скорости вращения тела при уменьшении его момента инерции.

Действительно, если при движении заданной жидкой частицы происходит такая деформация ее объема, что линейный размер ее вдоль какой-либо оси увеличивается, то в силу сохранения объема частицы и ее момента импульса уменьшается момент инерции частицы относительно этой оси и возрастает угловая скорость вращения ее вокруг этой оси. Поскольку при любом аксиально-сходящемся течении неизбежно вытягивание каждой жидкой частицы вдоль оси схождения потоков, то происходит убыстрение их вращения вокруг направления этой оси, если, конечно, такое собственное вращение имелось у частиц на большом удалении их от оси схождения потоков. Тем самым на оси симметрии аксиально-сходящегося течения должна наблюдаться концентрация (вообще говоря, вплоть до достижения кавитационного предела) всего расщепленного в среде вихря скорости, т. е. интенсификация завихренности. Именно этим механизмом объясняется, в частности, формирование вращающейся воронки при истечении воды из ванны.

В вязких сплошных средах интенсификации завихренности, однако, противостоит явление диффузии вихря скорости из-за взаимного трения жидких частиц, приводящее к «рассасыванию» локализованного вихря скорости по всем частицам сплошной среды. Одновременное действие этих конкурирующих процессов и приводит к установлению «вихревого» равновесия, когда конечная, но существенно большая, чем на далеких от оси симметрии течения дистанциях, завихренность локализуется в очень узкой области вокруг оси аксиально-сходящихся потоков вязкой сплошной среды.

В количественном отношении перенос вихря описывается конвективным членом $(\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V}$, в то время как диффузия вихря — членом $\nu \Delta \mathbf{V}$. Поэтому очевидно, что любое соотношение баланса между ними будет, с одной стороны, нелинейным по скорости \mathbf{V} , а, с другой стороны, процессы смерчеобразования при этом будут относиться к классу явлений формирования динамических структур в диссипативной среде.

Следует учитывать, что процессы смерчеобразования в атмосфере Земли и других планет представляют собой сложные аэрометеорологические явления, для исчерпывающего описания которых существенную роль играют такие факторы, как стратифика-

ция атмосферы, фазовые процессы перераспределения атмосферной влаги, термики с поверхности планеты, мезомасштабный рельеф подстилающей поверхности и др. Учет всех или части упомянутых факторов делает систему уравнений термогидродинамики атмосферы столь сложной, что получение количественных результатов оказывается возможным лишь с помощью ЭВМ.

И хотя уже в 60—70-х годах на таком пути В. И. Игнатьев [9], Л. Н. Гутман [10], Х. Л. Куо [11, 12], Р. Смит и П. Смит [13] получили описание многих свойств и деталей структуры смерчей, эволюционные вопросы их зарождения и гибели оставались не выясненными из-за чрезмерных требований к возможностям ЭВМ.

Как и во многих других физических задачах, прослеживание поведения смерча на значительных отрезках его эволюции возможно лишь на примерах аналитических решений соответствующих упрощенных модельных задач. Особо важное значение при этом приобретает привлечение точных аналитических решений, позволяющих проследить всю эволюцию течения, начиная от стадии зарождения и кончая этапом гибели структур в нем. Элементы упрощения тогда состоят лишь в отказе от тех или иных факторов влияния, последствия чего легко устанавливаются и оцениваются при сравнении решения с объектом описания. Именно такой путь описания процесса смерчеобразования в рамках приближения адиабатического течения несжимаемой вязкой сплошной среды был реализован нами совместно с Г. И. Кикнадзе, и результаты этих исследований представляются в настоящей статье. Приближенное соответствие использованной модели реальным атмосферным смерчам и является оправданием кавычек у слова смерч в заглавии статьи. Однако следует обратить внимание на самостоятельный интерес проведенного исследования для целей общей гидродинамики.

1. Специальный класс течений вязкой жидкости

Аксиально-симметричные адиабатические течения ньютоновой вязкой жидкости описываются, как известно, системой уравнений, состоящей из уравнений Навье—Стокса и условия несжимаемости. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varphi^2}{r} &= -\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \\ &+ \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) \right) + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right], \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right], \\ \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} &= \\ &= \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\varphi) \right) + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} \right] - \frac{V_r V_\varphi}{r}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0,$$

где

$$\varepsilon(r, z, t) = P/\rho + U, \quad (2)$$

$P(r, z, t)$, $U(r, z, t)$, ρ и ν — локальные мгновенные значения давления, потенциала внешних массовых сил, плотность и кинематическая вязкость соответственно, а V_r , V_z и V_φ — компоненты скорости течения в заданный момент времени t и в заданной точке наблюдения (r, z) .

Простейшим классом течений, описываемых системой (1), являются течения с потенциальными осесимметричными компонентами потоков, когда $V_\varphi \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$, т. е. когда

$$\partial V_r / \partial z - dV_z / dr = 0. \quad (3)$$

Наложение дополнительного условия (3) ограничивает течения такими, для которых существует скалярный потенциал $\Phi(r, z, t)$ осесимметричных компонент скорости потоков, такой, что

$$V_r = \partial \Phi / \partial r, \quad V_z = \partial \Phi / \partial z. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1), сведем эту систему уравнений к виду

$$\begin{aligned} \partial \mu / \partial r &= V_\varphi^2 / r, & \partial \mu / \partial z &= 0, \\ \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + \frac{V_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\varphi) + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} &= \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\varphi) \right) + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0,$$

где

$$\mu(r, z, t) = \varepsilon + \partial \Phi / \partial t + 1/2 (V_r^2 + V_z^2). \quad (6)$$

Второе уравнение системы (5) показывает теперь, что μ не зависит от высотной координаты z . Но тогда согласно первому уравнению системы (5)

$$\partial V_\varphi / \partial r = 0, \quad (7)$$

т. е. и азимутальная компонента скорости течения не зависит от высотной координаты z . Это обстоятельство позволяет переписать уравнение движения для азимутальной компоненты скорости в виде

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + \frac{V_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\varphi) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\varphi) \right]. \quad (8)$$

Отсюда заключаем, что входящая в (8) радиальная составляющая скорости V_r не зависит от высотной координаты z (поскольку остальные члены в уравнении (8) от z не зависят), т. е. что

$$\partial V_r / \partial z = 0. \quad (9)$$

Тогда из условия потенциальности (3) приходим к выводу, что

$$\partial V_z / \partial r = 0, \quad (10)$$

т. е. что высотная составляющая скорости течения не зависит от радиальной координаты. Эти обстоятельства дают возможность разрешить условие несжимаемости путем разделения переменных в нем и получить следующее общее решение для радиальной и высотной компонент скорости течений выделенного класса:

$$V_r = C_0(t)r + 2\nu C_1(t)r^{-1}, \quad V_z = -2C_0(t)z + C_2(t), \quad (11)$$

где C_j — произвольные функции времени.

Подставляя полученное выражение для V_r в (8), находим уравнение, определяющее азимутальную составляющую скорости течения:

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + \left[C_0(t)r + \frac{2\nu C_1(t)}{r} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\varphi) = \nu \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\varphi) \right]. \quad (12)$$

Далее делаем очередное упрощение и из всех решений линейного уравнения (12) выделяем подкласс, обладающий свойством радиально-временной автомодельности течений, т. е. выделяем решения вида

$$V_\varphi(r, t) = \frac{1}{r} \sum_j f_j [\alpha_j(t) r^2], \quad (13)$$

где $\alpha_j(t)$ — неопределенные пока функции времени.

Подстановка (13) в (12) дает уравнение

$$\alpha_j^{-2} \frac{d\alpha_j}{dt} + \frac{2C_0(t)}{\alpha_j} = 4\nu \left[\frac{f_j''}{f_j} - \frac{C_1(t)}{\xi_j} \right], \quad (14)$$

где $\xi_j \equiv \alpha_j(t) r^2$ и $f_j' \equiv df_j / d\xi_j$.

Из последнего уравнения видим, что для возможности разделения переменных t и ξ_j должны выполняться соотношения

$$C_1(t) = \text{const} = C_1, \quad d\alpha_j/dt + 2C_0(t)\alpha_j = -A_j\alpha_j, \\ f_j' = (C_1/\xi_j - A_j) f_j,$$

где A — некоторые постоянные.

Разрешая полученные обыкновенные дифференциальные уравнения, находим общий вид функций $\alpha_j(t)$ и $f_j(\xi_j)$:

$$\beta_j(t) \equiv \frac{\alpha_j(t)}{A_j} = \frac{\beta_j(0) \exp \left[-2 \int_0^t C_0(\tau) d\tau \right]}{1 + 4\nu\beta_j(0) \int_0^t d\tau \exp \left[-2 \int_0^\tau C_0(y) dy \right]}, \quad (15)$$

$$f_j(\xi) = f_{0j} \Gamma(C_1 + 1, \beta_j(t) r^2), \quad (16)$$

где $\Gamma(a, x) \equiv \int_x^\infty y^{a-1} e^{-y} dy$ — известная неполная гамма-функция Эйлера.

Таким образом, мы выделили класс точных решений (уравнений Навье—Стокса и условия несжимаемости) вида

$$V_r = C_0(t) r + 2\nu C_1 r^{-1}, \quad V_z = -2C_0(t) z + C_2(t), \quad (17)$$

$$V_\varphi = \frac{\gamma_0}{2\pi r} + \frac{1}{2\pi r} \sum_j \gamma_j \Gamma(C_1 + 1, \beta_j(t) r^2)$$

с $\beta_j(t)$, заданным соотношением (15), представляющий аксиально-симметричные адиабатические течения ньютоновой вязкой жидкости с потенциальными осесимметричными компонентами потоков и с азимутальной компонентой скорости, обладающей радиально-временной автомодельностью. Интеграл Коши—Эйлера таких течений может быть получен прямым интегрированием первого уравнения системы (5), и в частном случае, когда $C_1 = C_2 = 0$, $\gamma_0 = \gamma_1$, $\gamma_{2,3,4,\dots} = 0$, он имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{P}{\rho} + U + \frac{C_0^2(t)}{2} (r^2 + 4z^2) + \frac{dC_0(t)}{dt} \left(\frac{r^2}{2} - z^2 \right) + \\ + \frac{\gamma_0^2}{4\pi^2 r^2} E_2 \left(\frac{\beta(t) r^2}{2} \right) = F(t), \end{aligned} \quad (18)$$

где $F(t)$ — функция времени, определяемая начальными и граничными условиями, а $E_n(x) \equiv \int_1^\infty t^{-n} \exp(-xt) dt$ — известная интегральная показательная функция n -го порядка.

2. Стационарные смерчеобразные течения

Легко убедиться, что стационарные ветви класса (17) представлены двумя решениями: сингулярная вихревая нить

$$V_\varphi = \gamma/2\pi r \quad (19)$$

и сингулярный смерч

$$V_\varphi = \frac{\gamma}{2\pi r} \exp \left[-\frac{|C_0| r^2}{2\nu} \right]. \quad (20)$$

Все остальные возможные стационарные состояния являются суперпозициями фундаментальных решений (19), (20).

Наибольший интерес представляет единственное регулярное в конечном цилиндре стационарное решение класса (17):

$$\begin{aligned} V_r = -C_0 r, \quad V_z = 2C_0 z, \\ V_\varphi = \frac{\gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp \left(-\frac{C_0 r^2}{2\nu} \right) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

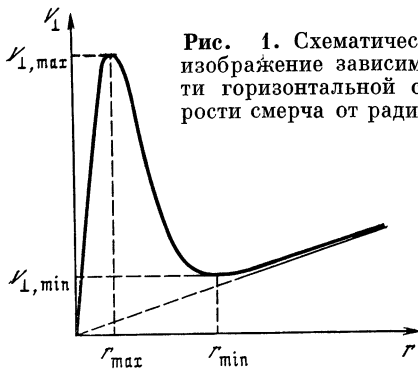


Рис. 1. Схематическое изображение зависимости горизонтальной скорости смерча от радиуса

называемое нами регулярным стационарным смерчем или РСС-течением. Положительный параметр C_0 в (21) имеет, очевидно, смысл радиальной компоненты скорости на границе области регулярности течения (21) — образующей поверхности цилиндра с радиусом $r = R$.

На малых расстояниях от оси симметрии течения (21) имеем

$$V_\varphi \sim \gamma C_0 r / 4\pi\nu,$$

что соответствует гипотезе Оболенского о твердотельном вращении среды вблизи оси смерча, а на больших расстояниях от этой оси получаем

$$V_\varphi \sim \gamma / 2\pi r,$$

что согласуется с моделью Оболенского—Брента.

Горизонтальная скорость РСС-течения распределена по закону

$$V_\perp = C_0 R \{x^2 + (a/b)^2 x^{-2} [1 - \exp(-bx^2)]^2\}^{1/2}, \quad (22)$$

где

$$V_\perp \equiv (V_r^2 + V_\varphi^2)^{1/2}; \quad x = r/R; \quad a = \gamma / 4\pi\nu; \quad b = C_0 R^2 / 2\nu.$$

Положение экстремумов V_\perp (рис. 1) определяется решением трансцендентного уравнения

$$(1 + bx^2) [1 - \exp(-bx^2)] = bx^2 \{1 + [1 + a^{-1} (1 + bx^2)]^{1/2}\}, \quad (23)$$

в котором, как мы убедимся ниже на численных примерах, во всех практически интересных ситуациях можно полагать $a \gg 1$. Поэтому первый корень (нетривиальный) уравнения (23) есть $x_{\min} = \sqrt{a/b}$, что дает

$$r_{\min} = (\gamma / 2\pi C_0)^{1/2}, \quad (24)$$

а второй нетривиальный корень уравнения (23) является решением уравнения $1 + 2u = \exp(u)$ в единицах $u = bx^2$. Поскольку $u = 1,2565$, то получаем

$$x_{\max} = 1,585 R^{-1} (\nu / C_0)^{1/2} \text{ и } r_{\max} = 1,585 (\nu / C_0)^{1/2}. \quad (25)$$

Согласно (22) наши вычисления дают

$$V_{\perp, \min} = (\gamma C_0 / \pi)^{1/2}, \quad V_{\perp, \max} = 0,07186 \gamma (C_0 / \nu)^{1/2}. \quad (26)$$

Для ощущения масштабов описанных стационарных смерчей рассмотрим, например, ситуацию, когда условия формирования

кумулятивного потока с компонентами V_r и V_z по (21) осуществляются на боковой поверхности Σ цилиндра с радиусом $R = 100$ м при скорости V_r на этой поверхности, равной 10 м/с. Пусть при этом сквозь Σ транспортируется такая завихренность, которая обеспечивает значение $V_{\perp, \max} = 100$ м/с. В этих условиях при $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}$ м²/с получаем

$$r_{\max} \simeq 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad r_{\min} \simeq 5 \text{ м}, \quad H_{\max} \simeq 2 \cdot 10^3 \text{ м}, \\ V_{\perp, \min} \simeq 0,74 \text{ м/с}, \quad \gamma \simeq 17 \text{ м}^2/\text{с}, \quad C_0 = 0,1 \text{ с}^{-1}, \\ \gamma/4\pi\nu = a = 1,81 \cdot 10^5 \gg 1,$$

что оправдывает использованное при вычислениях приближение $a \gg 1$. Отметим, что высота максимального подъема смерча H_{\max} вычислялась из условия непревышения звукового барьера. Скорость азимутального вращения среды на образующей поверхности Σ , обеспечивающая образование смерча с $V_{\perp, \max} = 100$ м/с и соответственно $\gamma = 17,05$ м²/с, должна быть не больше 0,027 м/с!

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что в непосредственной близости от ствола смерча ($r = r_{\min}$) скорость течения очень мала ($V = 0,737$ м/с), что соответствует характеру разрушений, причиняемых смерчами, и свидетельствам очевидцев о полной безопасности нахождения вблизи ствола проходящего смерча.

3. Зарождение смерчей

Как мы видели при выводе решений класса (17), эволюция осесимметричных потоков, описываемых компонентами скорости V_r и V_z , определяется функциями $C_0(t)$ и $C(t)$, на которые не накладываются какие-либо априорные ограничения. В этом смысле эволюция смерча полностью определяется условиями, формирующимися на больших по сравнению с поперечником ствола смерча масштабах. Но коль скоро зависимость $C_0(t)$ задана, эволюция азимутального вращения среды в смерче предопределена однозначно уравнением (15).

Рассмотрим, например, задачу «включения» течения (17) из состояния полного покоя среды, когда до момента $t = 0$ течения отсутствовали, а начиная с этого момента по закону $V_r = C_0 r$ и $V_z = -2C_0 z$ с заданной функцией $C_0(t)$ «включаются» осесимметричные потоки.

Пусть функция $C_0(t)$ удовлетворяет свойствам $C_0(0) = 0$ и $C_0(t > t_0) = C_0 = \text{const}$ для некоторого характерного времени «включения» t_0 , а в остальном совершенно произвольна.

Первым делом обратим внимание, что начальному условию $V_\varphi|_{t=0} = 0$ отвечает единственный выбор постоянных $\beta_j(0)$ в (15), а именно $\beta_j(0) = \infty$. Поэтому для $\beta_j(t)$ при $t > t_0$ находим

$$\beta_j(t) = -\frac{C_0}{2\nu} \theta(-C_0), \quad (27)$$

где $\theta(x)$ — известная ступенчатая функция ($\theta(x) = 1$ при $x > 0$; $\theta(x) = 0$ при $x < 0$).

Таким образом, эволюция «включения» азимутального вращения среды в смерче описывается уравнением

$$V_{\varphi}(r, t) = \frac{\gamma}{2\pi r} \exp \left\{ -\frac{r^2}{4\nu} \frac{\exp \left[-2 \int_0^t C_0(\tau) d\tau \right]}{\int_0^t d\tau \exp \left[-2 \int_0^t C_0(y) dy \right]} \right\}, \quad (28)$$

причем согласно (27) нисходящие радиально-расходящиеся потоки ($C_0 > 0$) приводят к образованию сингулярной вихревой нити с $V_{\varphi} = \gamma/2\pi r$ при $t > t_0$, а восходящие радиально-сходящиеся, т. е. кумулятивные, потоки порождают смерч с $V_{\varphi} = \frac{\gamma}{2\pi r} \exp \left(-\frac{|C_0|}{2\nu} r^2 \right)$ при $t > t_0$.

Поэтому не лишено смысла использовать относительно простой метод борьбы со смерчами: организация достаточного, т. е. мощного, широкого и длительного, атмосферного взрыва над смерчем.

В заключение этого раздела приведем формулу, описывающую эволюцию смерча при мгновенном «включении» осесимметричных потоков, когда $V_r = -C_0 r \theta(t)$ и $V_z = 2C_0 z \theta(t)$ с $C_0 \geq 0$:

$$V_{\varphi}(r, t) = \frac{\gamma}{2\pi r} \exp \left\{ \frac{C_0 r^2}{2\nu [\exp(-2C_0 t) - 1]} \right\}. \quad (29)$$

Характерное собственное время зарождения смерча можно определить, например, как время, в течение которого смерч набирает 99% своей интенсивности. Тогда для смерча (29), как легко видеть, это время будет равно

$$\tau = \frac{1}{2C_0} \ln \left(1 - \frac{C_0 r^2}{2\nu \ln 0,99} \right). \quad (30)$$

Следует также отметить, что, насколько известно автору, описанные здесь течения представляют собой первый пример движущий сплошной среды, в результате эволюции которых рождается сингулярная вихревая нить.

4. Гибель смерчей

Рассмотрим теперь решение задачи «выключения» течений класса (17), когда, например, до момента $t = 0$ реализуется течение, описываемое формулами

$$V_r = C_0 r, \quad V_z = -2C_0 z,$$

$$V_{\varphi} = \frac{\gamma_0}{2\pi r} + \frac{1}{2\pi r} \sum_j \gamma_j \exp[-\tilde{\beta}_j(0) r^2], \quad (31)$$

а начиная с этого момента происходит его «выключение» согласно системе (17) с $\beta_j(t)$ из (15), где $C_0(t)$ равно C_0 при $t \leq 0$ и нулю для моментов времени t , больших некоторого характерного времени полного «выключения» t_0 , а в остальном произвольная функция t . Другими словами, нас интересует решение класса (17), для кото-

рого (31) служит начальным условием и которое обладает исчезающей асимптотикой при больших временах.

Из (15) нетрудно видеть, что при любых $\beta_i(0)$ и $C_0 = 0$ функции $\beta_i(t)$ стремятся к нулю при $t > t_0$. Поэтому при $t > t_0$ имеем

$$V_\varphi = \frac{1}{2\pi r} \left[\gamma_0 + \sum_j \gamma_j \right].$$

Выбирая постоянные $\beta_j(0)$ и γ_j так, чтобы удовлетворить начальному условию (31) и условию $\gamma_0 + \sum_j \gamma_j = 0$, получаем решение задачи «выключения» смерча.

Так, в частности, при мгновенном «выключении» осесимметричных компонент скорости V_r и V_z , когда $C_0(t) = \theta(-t)$, выбором постоянных $\gamma_1 = -\gamma_0$, $\beta_i(0) = \infty$, $\gamma_{2,3,4,\dots} = 0$ получаем известный закон диффузии сингулярной вихревой нити [14]

$$V_\varphi = \frac{\gamma_0}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4vt}\right) \right],$$

а при выборе $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$, $\gamma_{0,3,4,\dots} = 0$, $\beta_2(0) = \infty$, $\beta_1(0) = = |C_0|/2v$ получаем описание диффузии сингулярного смерча

$$V_\varphi = \frac{\gamma_0}{2\pi r} \left\{ \exp\left[-\frac{|C_0|r^2}{2v(1+2|C_0|t)}\right] - \exp\left(-\frac{r^2}{4vt}\right) \right\} \quad (32)$$

с характерным временем диффузии $\tau = 1/2 |C_0|$.

5. Граничные условия

Как мы видели, в формировании смерчей решающую роль играет осесимметричная часть течения — восходящий радиально-сходящийся поток с компонентами скорости $V_r = -C_0 r$ и $V_z = 2C_0 z$. Такое течение не может быть распространено на достаточно большие от ствола смерча расстояния и высоты, так как это неизбежно приведет к противоречию с приближением несжимаемой среды, в которой течение было получено. Поэтому ясно, что формирование необходимых для образования смерча кумулятивных потоков неизбежно носит «местный» характер, т. е. определяется стечением определенных атмосферных и других условий в заданном районе смерчеобразования. Важную роль в явлении смерчеобразования, по-видимому, играют термики. Во всяком случае, метеослужба США давно уже отметила связь термиков с формированием смерчей.

Основную проблему поэтому представляет то обстоятельство, что решение класса (17) не удовлетворяет условию прилипания на подстилающей поверхности. Многие авторы в подобных ситуациях видят выход во введении поверхностного, прандтлевского, слоя и сшивании решений типа (17) с этим слоем. Такой прием очень привычен, но в данном случае неприемлем в логическом отношении. Решение класса (17) является точным решением уравнений Навье—Стокса во всей области изменения переменных, и его невозможно «исправить» сшивкой с заведомо приближенными реше-

ниями задачи Прандтля. Здесь ситуация схожа с известным точным решением Гамеля для конфузормого течения вязкой жидкости, которое невозможно «исправить» введением прандтлевского слоя — оно само естественно приводит к существованию (или не существованию) такого слоя в условиях, когда он должен проявляться.

Кикнадзе и Краснов предложили иной выход, состоящий в указании условий, когда течения класса (17) могли бы реализовываться над подстилающей поверхностью без противоречия с явлением полного прилипания вязкой жидкости к своим твердым границам.

Как указывали эти авторы, решением проблемы может явиться концепция мелкодисперсной подвижной подложки (МДПП).

Действительно, пусть подстилающая поверхность покрыта мелкомасштабной дисперсной подвижной структурой (например, пыль, снег, пепел, пелена капель, планктон, дым и т. д.), способной увлекаться приграничными потоками сплошной среды над ней, приходить в движение и взаимодействовать с нижележащими слоями структуры или самой подстилающей поверхностью по законам типа «сухого трения». Тогда возникает ситуация, когда потоки сплошной среды, приликая к увлекаемой ею же МДПП, взаимодействуют с подстилающей поверхностью не по закону «вязкого трения», а через посредство МДПП, т. е. по законам типа «сухого трения».

Самосогласованность предложенного подхода будет обеспечена, если будет выполняться локальное условие превышения силы увлечения МДПП вязкой сплошной средой над силой трения МДПП о нижележащие слои или над силой «сухого трения» МДПП о подстилающую поверхность.

Так, для обеспечения самосогласованности описания РСС-течения, рассмотренного в численном примере в конце разд. 2, достаточно потребовать, чтобы в рамках концепции МДПП выполнялось условие

$$\text{блрв } R_{\Pi} V_{\perp, \text{мн}} \geq \frac{4}{3} \rho_{\Pi} R_{\Pi}^3 g k, \quad (33)$$

где ρ_{Π} , R_{Π} и k — плотность, средний размер и коэффициент «сухого» трения МДПП-структуры, а для силы увлечения частиц МДПП-структуры взята сила Стокса. При выборе $R_{\Pi} = 2 \cdot 10^{-4}$ м для песка получаем ограничение $k \lesssim 0,05$, что весьма правдоподобно в состоянии, близком к «збычести».

Отметим, что концепция МДПП и связанный с нею новый тип граничных условий в гидродинамике, приводящий к гораздо менее интенсивному взаимодействию сплошной среды с подстилающей твердой поверхностью, нежели традиционное условие прилипания, может сыграть важную роль в нашем понимании некоторых, доселе удивляющих явлений и процессов и иметь прямое отношение к организации новых возможностей в технике и технологиях. Достаточно сослаться на замеченное еще Пуазейлем явление самовыведения эритроцитов крови на стенках сосудов, обеспечивающее по

разительную «супертекучесть» крови, или на исследованную Ю. С. Заславским [15] «супертекучесть» смазочных материалов с органическими присадками, связанную с самоорганизацией на поверхности трения МДПП из трибополимерных образований, обеспечивающих слабую связь смазочного вещества с омываемыми поверхностями трения.

Заключение

Подводя итог изложенному, обратим внимание, что мы нигде не претендовали на количественное описание какого-либо реального смерча. Причин этому несколько. Во-первых, известно большое разнообразие смерчей, в чем легко убедиться, обратившись, например, к монографии Д. В. Наливкина [16]. Во-вторых, в литературе отсутствует описание сколь-либо систематического количественного исследования природных смерчей и все наши знания о них носят характер наблюдений процессов прохождения смерчей и приносимых ими разрушений. В-третьих, сам класс решений (17) достаточно богат и позволяет строить модели многих смерчей. Так, например, РСС-течение характеризуется твердо-телно-вращающимся ядром с гиперболическим «хвостом» вращения, тогда как из двух сингулярных смерчей легко построить суперпозицию с таким же твердотельным ядром, но без гиперболического хвоста, что демонстрирует следующая формула:

$$V_{\varphi} = \frac{\gamma}{2\pi r} \left\{ \exp \left[-\frac{\beta_1(t) r^2}{2\nu} \right] - \exp \left[-\frac{\beta_2(t) r^2}{2\nu} \right] \right\},$$

где $\beta_2(t) > \beta_1(t) > 0$. Именно к подобным нестационарным решениям имеют, по-видимому, отношение обычно наблюдаемые нами смерчи, представляющие собой «выключающуюся» ветвь эволюции течений класса (17).

Поэтому идентификация природного смерча по тому или иному решению уравнений Навье—Стокса должна следовать из более детального знания его структуры. Можно, однако, утверждать, что анализ описанных результатов говорит в пользу возможности количественного описания атмосферных смерчей при реалистическом подборе значений фигурирующих в теории параметров R , C_0 , γ_j и $\beta_j(0)$. Дальнейшее уточнение теории смерчей, как уже обсуждалось во введении, неизбежно сопряжено с учетом многих мезотропических факторов, что является делом специалистов-метеорологов.

С позиций физики интерес представляет изучение условий смерчеобразования в различных средах, равно как и эффектов, вызванных существованием смерчей. Как один из примеров возможного проявления смерчей рассмотрим еще раз ситуацию, сложившуюся в физике явления смазки.

Многие годы было известно, что среди частиц, образующихся в результате износа металлических поверхностей при трении друг о друга, наблюдаются шаровые частицы микронных радиусов типа

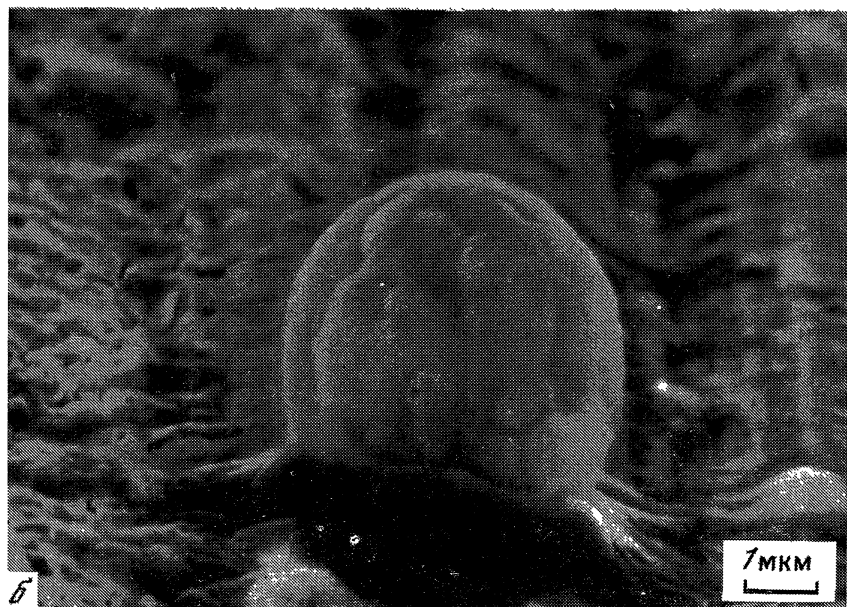
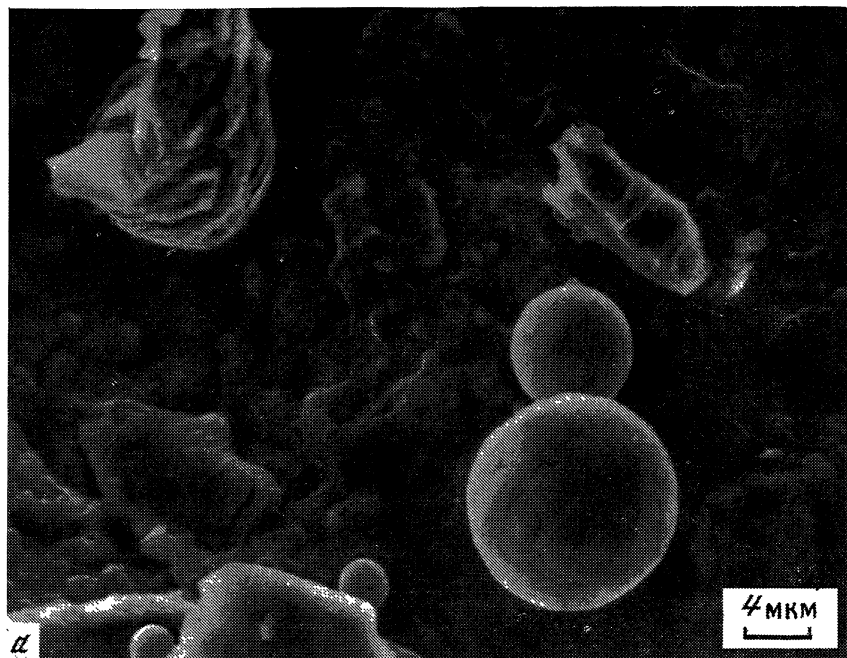


Рис. 2. Отдельные частицы, образованные в результате износа поверхностей трения (а) и некоторые детали таких поверхностей (б)

показанных на рис. 2, а. Привычное объяснение природы их образования состояло в том, что они якобы образуются в результате обкатки между трущимися поверхностями частиц произвольной формы, скальвающихся с трущихся поверхностей в результате взаимодействия их микрошероховатостей. С развитием растровой электронной микроскопии, однако, было обнаружено, что структура этих шаровых образований не согласуется с технологией обкатки. Кроме того, обнаруживаемые на поверхности трения кратеры правильной круглой формы не укладывались в схему «скола» и не получали объяснения. Более того, Заславскому удалось зафиксировать уникальный момент формирования шаровой частицы износа, показанный на рис. 2, б. Здесь мы воочию убеждаемся, что шаровая частица износа каким-то механизмом вырывается непосредственно из поверхности трения. Каков это механизм? По нашему убеждению, этот механизм связан с формированием над поверхностью трения смерчеобразной или вихреобразной динамической структуры в смазке, которая и вырывает шаровую частицу непосредственно из поверхности трения.

Действительно, разрежение, создаваемое смерчем в своем ядре, может достигать значений давления вне смерча. Здесь следует вспомнить работу С. А. Чаплыгина [17], в которой на примере вихря специальной структуры было показано, что при взаимодействии вихревой структуры с граничной стенкой на эту последнюю в зоне с размерами порядка поперечника вихря действует разрежение, равное по порядку величины самому давлению вне структуры вихря.

Исходя из этих соображений, легко подсчитать силу, которая действовала бы на шарообразное тело со стороны смерча над ним в ситуации, зафиксированной Ю. С. Заславским [18]. Эта сила по порядку величины оказывается равной

$$F \sim \pi R^2 \Delta p,$$

т. е. при $R \sim 1$ мкм и $\Delta p \sim p \sim 10^5$ Па она равна (или порядка) 10^{-5} Н. Много это или мало? Здесь следует вспомнить, что при центробежном разрушении металлического обода, вращающегося со скоростью 700 м/с при радиусе обода примерно 0,1 м, на его материал действует ускорение порядка

$$v^2/R \sim 5 \cdot 10^5 g.$$

Действие же смерча на частицу в случае, зафиксированном Заславским, соответствовало бы сообщению частице ускорения порядка

$$\Delta p/\rho R \sim 3 \cdot 10^5 g.$$

Близость этих значений с учетом того, что в процессах трения поверхностей друг о друга в смазке возможно значительное локальное увеличение давления, а на самих поверхностях — локальной температуры, делает гипотезу о вихре — смерчевом механизме отрыва шаровых частиц износа непосредственно с поверх-

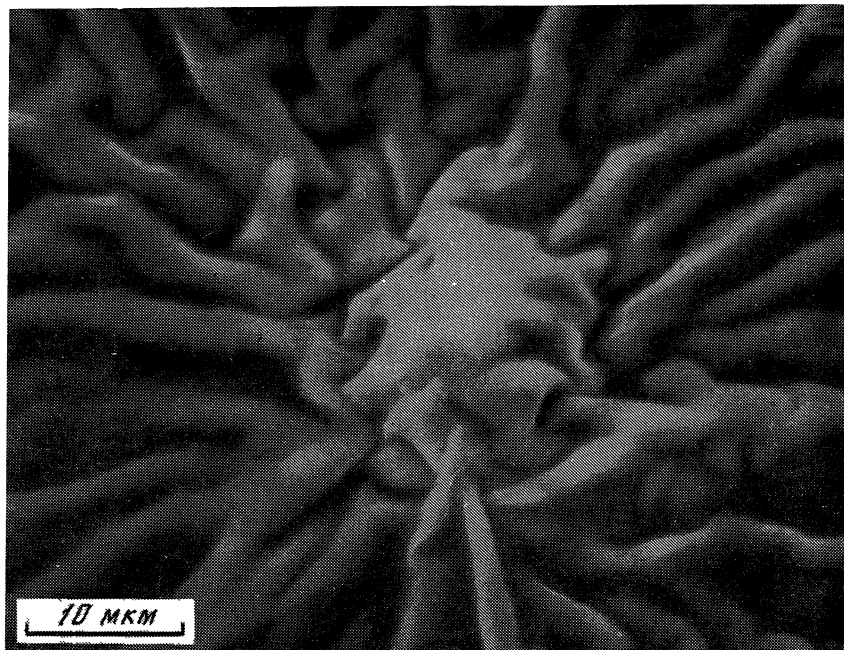


Рис. 3. Картина распределения полимерной пленки на поверхности трения в результате износа

ностей трения за счет вихрестерчеобразования в смазке — весьма правдоподобной.

При наблюдении за полимерной пленкой, нанесенной на поверхности до их взаимного трения, обнаружено, что в результате трения поверхностей со смазкой между ними образуются места износа с рельефом пленки, явно соответствующим действию на пленку сосредоточенных отрывающих усилий (рис. 3). Из общих соображений очевидно, что описанную совокупность фактов можно понимать как результат действия на стенку локализованных смерчевых или кольцевых вихревых структур в смазке. Вопрос прояснят дальнейшие исследования явления.

Рассмотренные механизмы могут играть существенную роль и в объяснении явления срыва тромбозных наростов со стенок сосудов, в системе кровообращения животных и человека.

Учитывая возможности, открывающиеся при использовании смерчевых течений в технике и технологиях, мы приходим к заключению, что изучение такого представителя процессов самоорганизации динамических структур в диссипативных средах, как процесс смерчеобразования, должно занять достойное место в физике нелинейных явлений.

Автор глубоко признателен Ю. С. Заславскому, Г. И. Кикнадзе и М. И. Рабиновичу за помощь при подготовке настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Оболенский В. Н.* Метеорология. Л.: Гидрометеиздат, 1938. Ч. 1.
2. *Брент Д.* Физическая и динамическая метеорология. Л.: Гидрометеиздат, 1938.
3. *Burgers J. M.* A mathematical model illustrating the theory of turbulence // *Adv. Appl. Mech.* 1948. Vol. 1.
4. *Einstein H. A.* Steady vortex flow in a real fluid // *Houille blanche.* 1955. Vol. 10.
5. *Sullivan R. O.* A two-cell vortex solution of the Navier—Stokes equations // *J. Aerospace Sci.* 1959. Vol. 26, N 7.
6. *Long R. R.* Some aspects of the flow of the stratified fluid // *Tellus.* 1955. Bd. 7, N 3.
7. *Long R. R.* A vortex motion in an infinite viscous fluid // *J. Fluid Mech.* 1961. Vol. 11. P. 4.
8. *Бэтчелор Дж. К.* Введение в динамику жидкостей. М.: Мир, 1973. 758 с.
9. *Игнатьев В. И.* О вертикальной структуре смерча // *Тр. Бурят. комп-лек. науч.-исслед. ин-та.* 1960. Вып. 2.
10. *Гутман Л. Н.* Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1969.
11. *Kuo H. L.* On the dynamics of convective atmospheric vortices // *J. Atmos. Sci.* 1966. Vol. 23, N 1.
12. *Kuo H. L.* Note on the similarity of the vortex equations in an instability stratified atmosphere // *Ibid.* 1967. Vol. 24, N 1.
13. *Smith R. C., Smith P.* Theoretical flow pattern of a vortex in the neighbourhood of a solid boundary // *Tellus.* 1965. Bd. 17, N 2.
14. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: ОГИЗ, 1947. 928 с.
15. Триполимерообразующие смазочные материалы: Сб. ст. М.: Наука, 1979. 120 с.
16. *Наливкин Д. В.* Ураганы, бури, смерчи. Л.: Наука, 1969. 510 с.
17. *Чапльгин С. А.* Один случай вихревого движения // *Тр. Отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания.* М., 1902. Т. 2.
18. *Zaslavsky Yu. S.* et al. The use of the friction polymer formation effect in the development of lubricants in the USSR // *Тр. «Евротриб-81».* Варшава, 1981. Т. 3. С. 330—339.



УДК 517.9

ВНУТРЕННИЕ БИФУРКАЦИИ И КРИЗИСЫ АТТРАКТОРОВ

В. С. АФРАЙМОВИЧ

Настоящая статья — это попытка строгого изложения некоторых понятий и результатов, касающихся математических образов установившихся (регулярных или хаотических) режимов в неравновесных диссипативных системах и средах. Этими образами служат аттракторы. Наряду с последними результатами в текст включены и известные вещи. Однако при обсуждении классических результатов упор сделан лишь на ту сторону, которая «непрерывно продолжается» в область нового и, может быть, даже не до конца понятого.

1. Аттракторы

Большинство исследователей считает, что установившемуся движению (режиму) реальной системы с потерями (и, возможно, накачкой) отвечает аттрактор — притягивающее множество в фазовом пространстве математической модели этой системы. Сейчас существует несколько определений аттрактора — математики пытаются выработать понятие, которое наиболее бы соответствовало интуитивному представлению о математическом образе установившегося режима. Мы будем использовать следующее.

Напомним вначале определение динамической системы. Пусть M — метрическое пространство с расстоянием d между точками в нем и $\{f^t\}$ — множество непрерывных преобразований пространства M в себя, параметризованное «индексом» t , пробегающим множество либо целых (или натуральных), либо действительных (положительных) чисел (в последнем случае f^t непрерывно по t) и такое, что $f^{t_1+t_2} = f^{t_1} \circ f^{t_2} = f^{t_2} \circ f^{t_1}$ для любых t_1, t_2 (групповое свойство). Преобразования f^t называются отображениями сдвига, M — фазовым пространством, а $\{f^t\}$ — динамической системой. Если множество $\{t\}$ непрерывно (дискретно), то $\{f^t\}$ называется динамической системой с непрерывным (дискретным) временем.

Пример 1. Система $\dot{x} = v(x)$, $x \in \mathbf{R}^m$, дифференциальных уравнений в m -мерном евклидовом пространстве, у которой при любом начальном условии решение не уходит на бесконечность за конечное время, порождает динамическую систему следующим образом. Отображение сдвига f^t — это отображение, ставящее в соответствие начальному условию x_0 значение решения системы дифференциальных уравнений с началом в точке x_0 через время t : $f^t x_0 = x(x_0, t)$; $x(x_0, t)$ — решение. Здесь фазовое пространство — все \mathbf{R}^m , время, естественно, непрерывно, $t \in \mathbf{R}^1$.

Пример 2. Пусть $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — отображение, задаваемое формулой $f(x) = ax(1-x)$, $0 < a \leq 4$. Тогда формулой $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ (k -я итерация отображения f) задается динамическая система с дискретным временем.

Образ начальной точки при сдвигах на все (положительные) времена называется траекторией (положительной полутраекторией) динамической системы. В первом примере полутраектория — это кривая в \mathbf{R}^m , начинающаяся в начальной точке, а во втором — набор точек на отрезке.

Перейдем к аттракторам. Зафиксируем какую-либо динамическую систему $\{f^t\}$ с фазовым пространством M .

Определения: 1. Открытая область $U \subset M$ называется поглощающей, если $f^t \bar{U} \subset U$ для $t > 0$, \bar{U} — замыкание U .

2. Максимальным аттрактором в поглощающей области U называется пересечение всех сдвигов области U : $A = \bigcap_{t>0} f^t U$.

3. Множество A называется аттрактором, если существует такая поглощающая область, максимальным аттрактором в которой оно является.

4. Область $W(A)$ называется областью притяжения аттрактора A , если она состоит из всех точек, через которые проходят положительные полутраектории, стремящиеся к A .

Пример 3. Устойчивое положение равновесия — аттрактор. Докажем это для системы на прямой. В окрестности устойчивого равновесия, которое мы полагаем находящимся в нуле, уравнение запишется в виде $\dot{x} = (-\lambda + f(x))x$, $\lambda > 0$, где $f(0) = 0$. Пусть x настолько близко к нулю, что $-\lambda + f(x) \leq -q < 0$, тогда $(x, x)' = 2(\dot{x}, x) = 2(-\lambda + f(x))x, x \leq -q(x, x)$. Отсюда $(x, x) \leq e^{-qt}(x_0, x_0)$. (Здесь (x, x) — скалярное произведение, в данном случае $(x, x) = x^2$.) Следовательно, область $(x, x) < c$ переходит в себя для любого $t > 0$, т. е. является поглощающей, если $c > 0$ достаточно мало, и все положительные полутраектории в этой области стремятся к положению равновесия.

Аналогично можно показать, что устойчивый предельный цикл является аттрактором. Аттрактором может быть и двумерный гладкий тор.

Будем называть аттрактор странным, если он отличен от конечного объединения гладких многообразий.

2. Определение кризисов и внутренних бифуркаций

Предположим теперь, что динамическая система зависит от параметра, скажем ε . При изменении ε в системе могут происходить бифуркации, в том числе и с аттракторами, — они могут усложняться или упрощаться или вообще переставать быть таковыми. В связи с этим бифуркации аттракторов естественно разбить на два класса — внутренние бифуркации и кризисы. Дадим определение.

Рассмотрим однопараметрическое семейство динамических систем $\{f_\varepsilon^t\}$, $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$. Предположим, что для каждого $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_*)$ система f_ε^t имеет аттрактор A_ε , и для любых $\varepsilon', \varepsilon'' \in [\varepsilon_1, \varepsilon_*)$ для аттракторов $A_{\varepsilon'}$ и $A_{\varepsilon''}$ существует одна и та же поглощающая область, максимальными аттракторами в которой они являются¹. Обозначим через A_{ε_*} множество всех предельных точек семейства $\{A_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_*$; другими словами, $A_{\varepsilon_*} = \bar{\bigcup} A_\varepsilon$ ($\bar{\bigcup}$ — верхний топологический предел, т. е. множество всех точек в фазовом пространстве, для любой окрестности каждой из которых существует сколь угодно близкое к ε_* значение ε , такое, что пересечение A_ε с этой окрестностью непусто). Предположим, что ε_* — бифуркационное значение параметра, причем бифуркации в системе $\{f_{\varepsilon_*}^t\}$ происходят с траекториями, принадлежащими A_{ε_*} .

О п р е д е л е н и е. Значение $\varepsilon = \varepsilon_*$ называется внутренним бифуркационным значением, если A_{ε_*} — аттрактор. В против-

¹ Здесь определение несколько упрощено. Вообще говоря, можно предполагать, что и поглощающая область зависит от ε , но необходимо требовать, чтобы эта зависимость была непрерывной в естественном смысле.

ном случае оно называется кризисным бифуркационным значением. Соответствующая бифуркация называется внутренней бифуркацией или кризисом семейства аттракторов².

Заметим, что это понятие тесно связано с понятием опасной и безопасной границ области устойчивости положения равновесия или цикла [2]. Нетрудно видеть, что во всех случаях бифуркаций, неустранимым образом встречающихся в однопараметрических семействах динамических систем (как говорят, бифуркаций коразмерности один), перечисленных в [3, 4], опасным границам области устойчивости соответствуют кризисы, а безопасным — внутренние бифуркации.

3. Бифуркации положений равновесия и предельных циклов

В соответствии с приведенным определением разобьем бифуркации положений равновесия и предельных циклов на внутренние и кризисы. Будем говорить, что имеет место «мягкий» («жесткий») случай, если в момент бифуркации положение равновесия (или предельный цикл) устойчиво (неустойчиво).

Положения равновесия [4, 5]. *Бифуркация Андронова—Хопфа*: в «мягком» случае — внутренняя бифуркация, в «жестком» — кризис. На рис. 1 изображен фазовый портрет системы на плоскости: в случае «а» при $\varepsilon > \varepsilon_*$ рождается устойчивый предельный

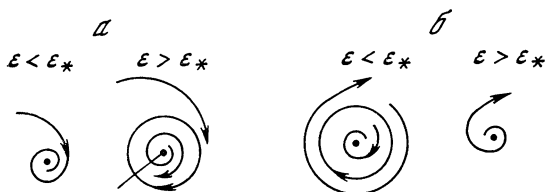


Рис. 1. Бифуркация Андронова—Хопфа
а — внутренняя бифуркация; б — кризис

цикл радиусом порядка $\sqrt{|\varepsilon - \varepsilon_*|}$. Область его притяжения не является односвязной, так как положение равновесия O ей не принадлежит, т. е. в результате бифуркации область притяжения аттрактора меняет свой топологический тип. В случае «б» неустойчивый предельный цикл существует при $\varepsilon < \varepsilon_*$.

Слияние положения равновесия типа узел с седлом и обоюдное исчезновение — кризис. На рис. 2 изображена зависящая от ε система с трехмерным фазовым пространством, в которой седло и узел ($\varepsilon < \varepsilon_*$) сливаются, образуя положение равновесия O типа седло-узел ($\varepsilon = \varepsilon_*$). В этот момент один корень характеристического уравнения в O равен нулю, а два других — отрицательные действительные числа. При $\varepsilon > \varepsilon_*$ положение равновесия исчезает.

Предельные циклы [3—6]. Бифуркации предельных циклов удобно разбить на два класса: к первому отнести те, при которых

² Подобные термины предложены в [1] для описания бифуркаций аттракторов отображений отрезка.

период $T(\varepsilon)$ предельного цикла не стремится к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_*$, а ко второму такие, при которых $T(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_*$.

Рассмотрим бифуркации первого класса ($T(\varepsilon) \not\rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_*$).

Бифуркация Андронова—Хопфа: устойчивый цикл «влипает» в равновесие — внутренняя бифуркация (см. рис. 1, а).

Слияние устойчивого цикла с седловым и обоюдное исчезновение — кризис. Эта бифуркация иногда называется касательной. С ней связано явление перемежаемости в динамических системах.

На рис. 3, а — сплошными линиями со стрелками изображены следы интегральных многообразий, пунктирными — следы траекторий на секущей. Устойчивый узел A отображения Пуанкаре соответствует устойчивому предельному циклу системы, седло R — седловому (рис. 3, а). Абсцисса точки A (R) — величина порядка $-\sqrt{\mu}$ ($+\sqrt{\mu}$), где $\mu = \varepsilon - \varepsilon_*$. Неподвижная точка O типа седло-узел отвечает соответствующему предельному циклу (рис. 3, б). Точка с абсциссой x_N является образом точки с абсциссой x_1 за $(N - 1)$ итераций отображения Пуанкаре.

Мультипликатор предельного цикла в момент бифуркации (при $\varepsilon = \varepsilon_*$) становится равным $+1$. Отображение Пуанкаре по траекториям, проходящим в окрестности цикла, в некоторых координатах (x, y) , $x \in \mathbf{R}^1$, $y \in \mathbf{R}^{n-1}$, может быть записано в виде $x_{k+1} = x_k + x_k^2 + bx_k^3 + \mu$, $y_{k+1} = A(x_k, \mu)y_k + f(x_k, y_k, \mu)$, где f — нелинейная по (x_k, y_k) функция с нулевой линейной частью; $|\rho_j| < 1$, $\rho_j \in \text{Spec } A(0, 0)$; $\mu = c(\varepsilon - \varepsilon_*) + \dots$, $c > 0$, многоточие обозначает члены более высокого порядка малости. Соотношение для координаты x описывает динамику отображения Пуанкаре на центральном многообразии. Оценим время, которое изображающая точка проводит при $\mu > 0$ в окрестности исчезнувшего цикла. Оно определяется из первого уравнения. Для грубой оценки член bx_k^3 можно отбросить. Тогда

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k^2 + \mu} = 1, \quad N = \sum_{k=1}^N \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k^2 + \mu},$$

а поскольку $x_{k+1} - x_k$ близко к нулю, то эта сумма близка к интегральной сумме для определенного интеграла $\int_{x_1}^{x_N} \frac{dx}{x^2 + \mu} \sim \frac{\text{const}}{\sqrt{\mu}}$,

т. е. $N(\mu) \sim \beta/\sqrt{\mu}$, $\beta > 0$.

Бифуркация удвоения периода. В «мягком» случае — внутренняя бифуркация, в «жестком» — кризис. Мультипликатор в момент бифуркации становится равным -1 .

На рис. 4, а показана бифуркация смены устойчивости предельным циклом: после бифуркации цикл «передает свою устойчивость» рождающемуся из него циклу приблизительно удвоенного периода, а сам становится неустойчивым — седловым. На рис. 4, б изображен «жесткий» случай: при $\varepsilon < \varepsilon_*$ существует устой-

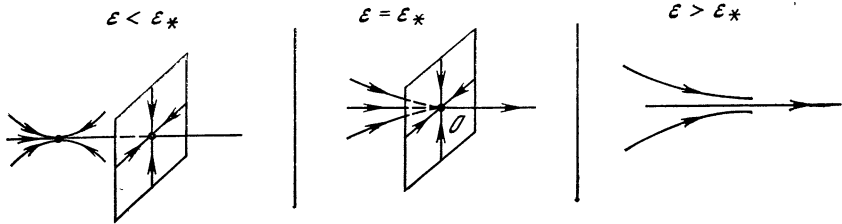


Рис. 2. Бифуркация исчезновения седло-узла

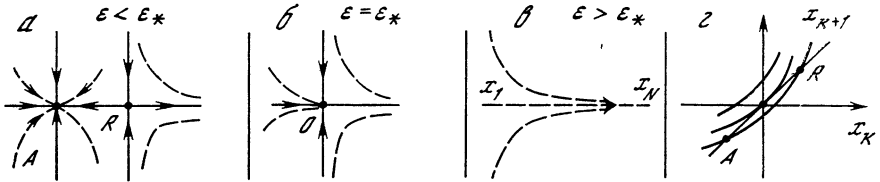


Рис. 3. Отображение Пуанкаре для трехмерной системы

a — *в* — фазовые портреты; *г* — график отображения на центральном многообразии

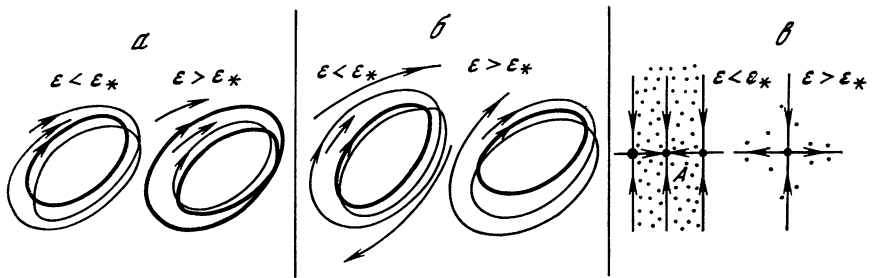


Рис. 4. Бифуркация удвоения периода

a — внутренняя бифуркация; *б* — кризис; *в* — отображение Пуанкаре в «жестком» случае

чивый предельный цикл, в границу области притяжения которого входит седловой цикл приблизительно удвоенного периода; при $\epsilon \rightarrow \epsilon_*$ он сливается с устойчивым циклом, и при $\epsilon \geq \epsilon_*$ устойчивых траекторий в рассматриваемой области не остается — кризис (рис. 4, *в*). На рис. 4, *в* область, помеченная при $\epsilon < \epsilon_*$ точками, — это след пересечения области притяжения устойчивого цикла с секущей; точка *A* лежит на цикле.

Как хорошо известно, последовательность бифуркаций удвоения периода приводит к возникновению аттрактора Фейгенбаума. На рис. 5 изображены фазовые портреты отображения Пуанкаре на плоскости для системы, в которой произошли три бифуркации удвоения периода. Здесь точка P_1 неподвижная, P_{11} — периодическая периода два, P_{111} — четыре, P_{1111} — восемь. На рис. 5, *a* изображен фазовый портрет отображения Пуанкаре

после первой бифуркации удвоения периода; мультипликаторы точки P_{11} действительны. На рис. 5, б мультипликаторы P_{11} комплексны: отображение Пуанкаре в окрестности точки P_{11} действует как отображение поворота плоскости на некоторый ненулевой угол; это заставляет спирально накручиваться на P_{11} неустойчивую сепаратрису точки P_1 . Она продолжает накручиваться и на отрезок, составленный из неустойчивой сепаратрисы точки P_{11} (после второй бифуркации удвоения периода) и точек в ее замыкании (рис. 5, в).

При дальнейшем изменении бифуркационного параметра после третьей бифуркации удвоения (рис. 5, г) неустойчивая сепаратриса точки P_1 начинает «гофрироваться». Это необходимо ей, чтобы содержать в своем замыкании неустойчивые сепаратрисы периодических траекторий, проходящих через точки P_{11} и P_{111} . При дальнейших бифуркациях удвоения сепаратриса точки P_1 становится еще более «сложной» и запутанной кривой на плоскости, что может приводить к возникновению на ней гомоклинических точек.

Бифуркация рождения двумерного тора из предельного цикла. Мультипликатор равен $e^{\pm i\varphi}$, $\varphi \notin \{0; \pi/2; \pi; 2\pi/3\}$. В «мягком» случае — это внутренняя бифуркация, в «жестком» — кризис. На рис. 6 пунктиром изображены следы траекторий трехмерной системы на секущей, замкнутой линией (окружностью) — след пересечения инвариантного тока с секущей. Подробное рассмотрение этой бифуркации см. в монографии [5].

Рассмотрим теперь бифуркации второго класса ($T(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_*$). Эти бифуркации, в свою очередь, можно разбить на два подкласса: к первому отнести такие, при которых A_{ε_*} содержит положение равновесия, ко второму те, при которых A_{ε_*} не содержит его.

Если A_{ε_*} содержит положение равновесия, то временная реализация процесса (скажем, график изменения одной из координат во времени) выглядит, как показано на рис. 7. При $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_*$ значение x_0 стремится к координате положения равновесия в A_{ε_*} . В случае общего положения (для бифуркаций коразмерности один) осуществляются две возможности:

1) «вливание» предельного цикла в гомоклиническую траекторию седла — кризис (рис. 8). Здесь $\tau(\varepsilon) \sim \text{const} \cdot \ln |\varepsilon - \varepsilon_*|^{-1}$. В типичной ситуации неустойчивая сепаратриса седла необходимо одномерна, а устойчивая ($n - 1$)-мерна (n — размерность фазового пространства). На рис. 8 изображен случай, когда все корни характеристического уравнения в седле действительны. Топологическим пределом устойчивого предельного цикла при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_* \rightarrow 0$ будет гомоклиническая траектория седла, в сколь угодно малой окрестности которой есть траектория (вторая половина неустойчивой сепаратрисы), уходящая из окрестности;

2) «вливание» предельного цикла в гомоклиническую траекторию седло-узла — внутренняя бифуркация. Здесь $\tau(\varepsilon) \sim \text{const} \cdot |\varepsilon - \varepsilon_*|^{-1/2}$ (рис. 9). Топологический предел устойчивого цикла — гомоклиническая траектория седло-узла, к которому стремятся

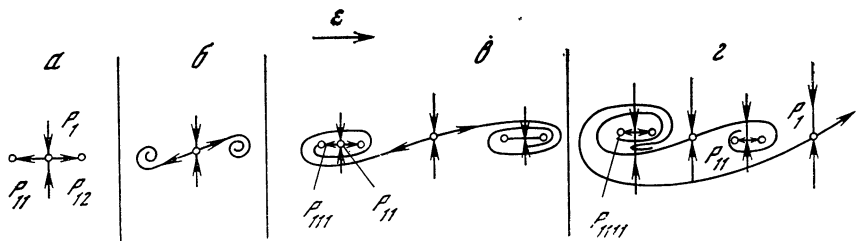


Рис. 5. Фазовый портрет отображения Пуанкаре после первой (а), второй (б) и третьей (в) бифуркаций удвоения периода

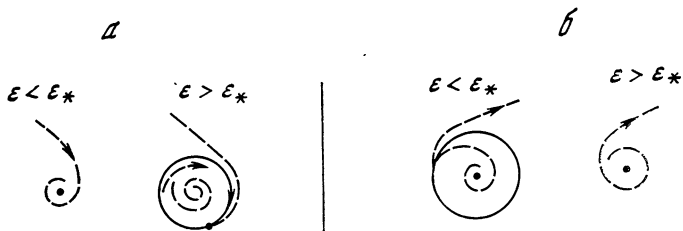


Рис. 6. Внутренняя бифуркация (а) и кризис (б) предельного цикла

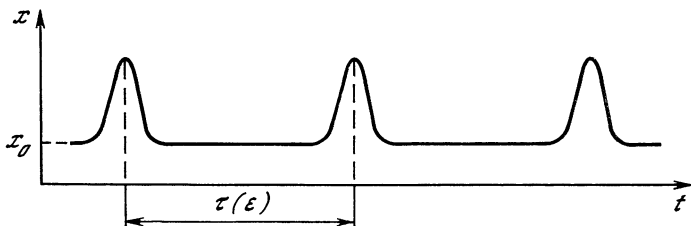


Рис. 7. Изменение одной из фазовых переменных во времени для траектории на предельном цикле

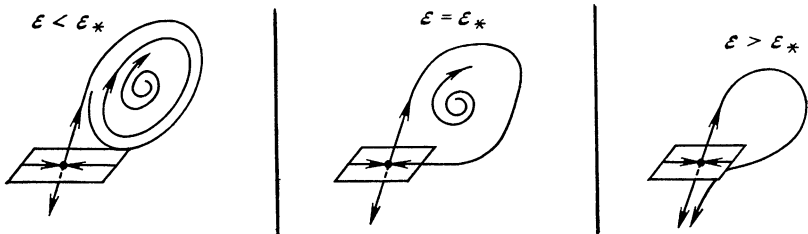


Рис. 8. «Вливание» предельного цикла в гомоклиническую траекторию седла

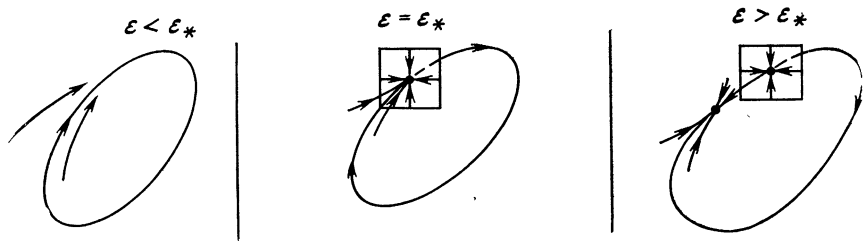


Рис. 9. Влияние предельного цикла в гомоклиническую траекторию седло-узла

Рис. 10. Примерный вид устойчивого предельного цикла перед «катастрофой голубого неба»

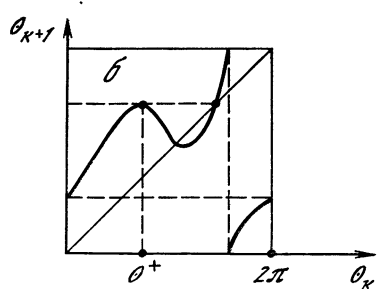
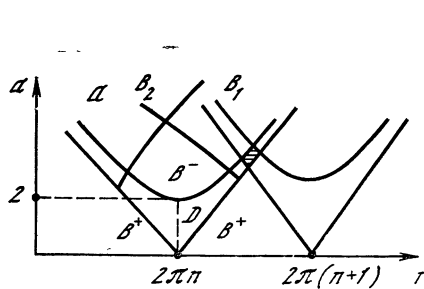
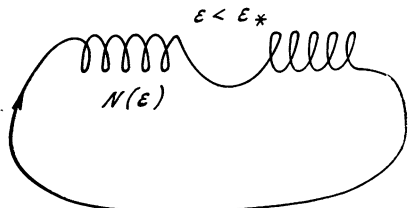


Рис. 11. Бифуркационные кривые отображения $\varphi_{r,a}$ на плоскости (r, a) (а) и отображение $\varphi_{r,a}$ в бифуркационный момент $(r, a) \in B_1$ (б)
 $\theta = \theta^+$ — координата эвентуально неподвижной критической точки

все положительные полутраектории с начальными точками в ее малой окрестности³.

Бифуркация, при которой A_{ε_*} не содержит положений равновесия, получила название «катастрофа голубого неба»⁴. До недавнего времени ее существование казалось проблематичным. В работе [7] приведен пример такой бифуркации (тем самым установлено ее существование). Оказалось, что она встречается в одно-

³ Бифуркации на рис. 8, 9 можно считать бифуркациями рождения цикла из соответствующих гомоклинических траекторий, если их просматривать справа налево.

⁴ Это название предложили Пью и Шуб, для которых подобная бифуркация была лишь гипотетической возможностью. Им казалось, что «предельный цикл тает в голубом небе», не оставляя никакого следа. В примере из [7] установлено, что при $\varepsilon = \varepsilon_*$ существует предельный цикл типа седло-узел, который вместе со своей неустойчивой сепаратрисой образует бутылку Клейна (она-то и является следом).

параметрических семействах систем четырех (и больше) дифференциальных уравнений. В примере из работы [7] эта бифуркация внутренняя.

На рис. 10 схематически изображен предельный цикл до бифуркации на бутылке Клейна. При $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_*$ — 0 число витков увеличивается ($N(\varepsilon) \sim \text{const} \cdot |\varepsilon - \varepsilon_*|^{-1/2}$), и в месте их сгущения появляется цикл типа седло-узел. На рисунке этих мест два лишь в силу невозможности изобразить ситуацию в трехмерном пространстве. В спектре Фурье движение наряду с частотой ω_0 будет иметь частоту ($-\omega_0$) и дискретную составляющую на нулевой частоте. При $\varepsilon > \varepsilon_*$ нулевая составляющая исчезает и остается лишь составляющая на частоте ω_0 .

4. Внутренние бифуркации двумерного тора [8]

Первым нетривиальным аттрактором (состоящим из бесконечного множества траекторий) является двумерный тор. Поэтому его бифуркации интересны сами по себе, и, кроме того, они могут дать представление о бифуркациях странных аттракторов. Двумерный тор может «принимать участие» и во внутренних бифуркациях, и в кризисах.

Предположим, что динамическая система $\{f_\varepsilon^t\}$ при $\varepsilon_1 \leq \varepsilon < \varepsilon_*$ имеет притягивающий инвариантный двумерный тор T_ε , на котором при всех $\varepsilon_1 \leq \varepsilon < \varepsilon_*$ существует глобальная секущая, т. е. замкнутая кривая, пересекающая любую лежащую на T_ε траекторию динамической системы $\{f_\varepsilon^t\}$ без касания. Тогда через эту секущую можно провести поверхность без контакта для всех траекторий, лежащих в окрестности тора, и свести задачу к исследованию отображения Пуанкаре этой секущей в себя.

Рассмотрим модельное отображение кольца в себя, которое можно представить как отображение Пуанкаре в описанной ситуации. Бифуркационные явления, осуществляющиеся для него, имеют место и в общей ситуации — об этом свидетельствует множество численных (и даже лабораторных [9]) экспериментов [10, 11] и теорема в [8]. Отображение $\Phi_{r,a}: x_{k+1} = e^{-r}(x_k + a \sin \theta_k)$, $\theta_{k+1} = (\theta_k + r + x_k + a \sin \theta_k) \bmod 2\pi$, $r > 0$, $a > 0$, переводит кольцо $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $|x| \leq x_0$, $x_0 > ae^{-r}/(1 - e^{-r})$ в себя и является диффеоморфизмом, т. е. непрерывно дифференцируемо само, взаимно-однозначно и обратное отображение тоже дифференцируемо [12].

Нас будет интересовать случай $r \gg 1$. При этом x_{k+1} очень мало, что наводит на мысль рассмотреть сначала отображение окружности $\Phi_{r,a}: \theta_{k+1} = (\theta_k + r + a \sin \theta_k) \bmod 2\pi$. Неподвижные точки этого отображения находятся из уравнения $\theta + 2\pi n = \theta + r + a \sin \theta$ и существуют при значениях r, a внутри сектора, обра-

⁵ Отображение $\Phi_{r,a}$ напоминает известное «отображение Заславского» [13], но отличается от него тем, что коэффициент сжатия и фаза определяются одним и тем же параметром r (а не разными, как в [13]).

зованного прямыми B^+ : $a = \pm (2\pi n - r)$ (рис. 11, а). Эти неподвижные точки имеют число вращения $2\pi n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} f^k(0)$, где f^k — k -я итерация функции $f(\theta) = \theta + r + a \sin \theta$.

Если представить себе отвечающие им предельные циклы на торе, то, прежде чем замкнуться, они должны сделать n оборотов «вдоль» глобальной секущей на торе. На границе B^+ неподвижные точки сливаются, образуя точку с мультипликатором $+1$. (Мультипликатор здесь — это значение $\partial\theta_{k+1}/\partial\theta_k$ в неподвижной точке, он равен $1 + a \cos \theta$.) Бифуркационная кривая B^+ , соответствующая мультипликатору (-1) , таким образом, находится из уравнений $a \cos \theta = -2$, $a \sin \theta = 2\pi n - r$, т. е. является ветвью гиперболы $a^2 = (2\pi n - r)^2 + 4$. Ниже этой кривой неподвижная точка $\theta_* = \pi - \arcsin \frac{2\pi n - r}{a}$ устойчива, а при переходе через B^- претерпевает бифуркацию удвоения периода.

Асимптотическое поведение полутраекторий отображения $\varphi_{r,a}$ зависит от того, существуют или не существуют полутраектории, имеющие числа вращения, не совпадающие с $2\pi n$. А это, в свою очередь, определяется поведением полутраекторий критических точек (если они существуют), т. е. точек, в которых $\partial\theta_{k+1}/\partial\theta_k = 0$. Можно показать, что траектории, имеющие числа вращения, отличные от $2\pi n$, возникают, когда критическая точка попадает в неподвижную. Критические точки $\theta^\pm = \pm (\pi - \arccos 1/a)$, очевидно, существуют при $a > 1$, и условие их попадания за одну итерацию $\varphi_{r,a}$ в неустойчивую точку записывается в виде

$$\arcsin \frac{2\pi - r}{a} = \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{a} \right) + r - 2\pi n \pm \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}.$$

Эти уравнения определяют две бифуркационные кривые $B_{1,2}$, отвечающие наличию критической эвентуально неподвижной, т. е. попадающей в неподвижную, точки (см. рис. 11, б). При значениях (r, a) из пятиугольника D , ограниченного всеми перечисленными кривыми, поведение полутраекторий $\varphi_{r,a}$ тривиально: все, кроме неустойчивой неподвижной точки, стремятся к устойчивой неподвижной точке. При выходе из D через B_1 или B_2 возникает бесконечное множество точек, имеющих числа вращения, отличные от $2\pi n$, в частности бесконечное множество периодических точек (см., например, [14]). При переходе же через B^+ все зависит от того, $a < 1$ или $a > 1$ в точке перехода. При $a < 1$ динамика определяется числом вращения; если оно иррационально, тогда все траектории почти периодичны, если же оно рационально, то имеется четное число устойчивых и такое же неустойчивых периодических точек одного и того же периода и все остальные полутраектории «идут» от неустойчивых к устойчивым. Если $a > 1$, то, как следует из [15], возникает стохастическое множество траекторий.

Для точек с числом вращения $2\pi(n+1)$ картина совершенно аналогична. Таким образом, имеется область (на рис. 11, а она

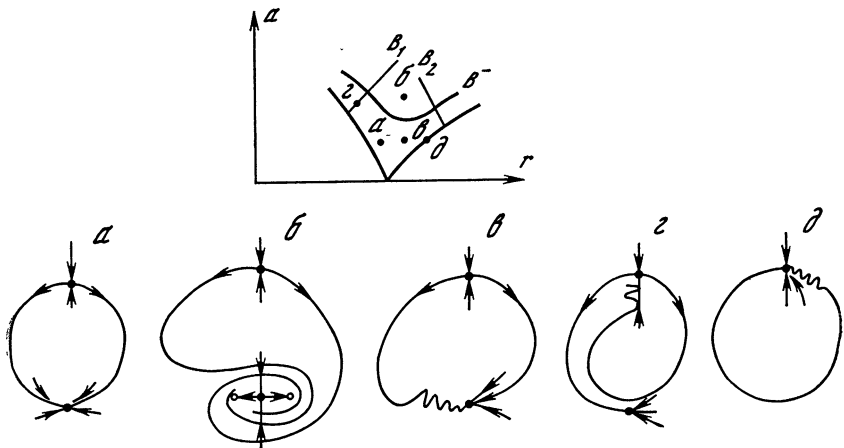


Рис. 12. Бифуркационная диаграмма и фазовые портреты отображения $\Phi_{r,a}$ a — гладкая инвариантная кривая; $б$ — после бифуркации удвоения периода устойчивой точки; $в$ — негладкая инвариантная кривая (гладкость нарушается в узле); $г$ — возникновение гомоклинической траектории при $(r, a) \in B_1$; $д$ — негладкая инвариантная кривая при $(r, a) \in B^+$

заштрихована), при значениях параметров из которой отображение $\Phi_{r,a}$ одновременно имеет устойчивые неподвижные точки с числами вращения $2\pi(n+1)$ и $2\pi n$. Тот или иной режим осуществляется в зависимости от начального условия.

Вернемся к отображению $\Phi_{r,a}$. У него тоже есть: 1) кривая B^+ , соответствующая наличию неподвижной точки с мультипликатором $+1$, ее уравнение $a = \pm (2\pi n - r)(1 - e^{-r})$; 2) кривая B^- , отвечающая наличию неподвижной точки с мультипликатором -1 , это ветвь «гиперболы»: $a^2 = (2\pi n - r)^2(1 - e^{-r})^2 + 4(1 + e^{-r})^2$. (Число вращения неподвижных точек, определяемое из уравнения для циклической координаты θ , по-прежнему равно $2\pi n$.) Как видно, при больших r эти кривые близки к соответствующим кривым для $\Phi_{r,a}$.

Можно показать, что при $a + e^{-r} < 1$ отображение $\Phi_{r,a}$ имеет гладкую замкнутую инвариантную кривую. При значениях (r, a) , удовлетворяющих этому неравенству и лежащих внутри «конуса», ограниченного кривой B^+ , на инвариантной кривой имеются неподвижные точки, о которых говорилось выше: одна из них устойчива, а вторая имеет седловой тип — ее неустойчивая сепаратриса вместе с устойчивой точкой и образует замкнутую кривую (рис. 12, a). Эта кривая при $a > 1$ становится негладкой (рис. 12, $б$), но существует при всех значениях (r, a) в пятиугольнике, ограниченном кривыми B^+ , B^- и $B_{1,2}$; здесь кривые $B_{1,2}$ отвечают возникновению гомоклинической траектории на одной или второй части неустойчивой сепаратрисы (рис. 12, $г$). Их уравнения при больших r близки к уравнениям кривых $B_{1,2}$ для $\Phi_{r,a}$. При переходе через $B_{1,2}$ возникает бесконечное множество траекторий,

среди которых счетное число неустойчивых седловых циклов [16]. Однако режим будет прежним — изображающая точка остается в малой окрестности неподвижной точки.

При переходе через B^- осуществляется бифуркация удвоения периода (рис. 12, б), о которой говорилось выше.

Бифуркационные явления, осуществляющиеся при переходе через B^+ , зависят от того, является в момент перехода инвариантная кривая гладкой или нет; инвариантная кривая в этот момент — это неустойчивая сепаратриса точки типа седло-узел (образовавшейся в результате слияния седла или узла), объединенная со всеми своими предельными точками (рис. 12, в). Если она гладкая, то и после исчезновения седло-узла (после выхода из области D через кривую B^+) отображение $\Phi_{r, a}$ будет иметь гладкую замкнутую инвариантную кривую, к которой притягиваются все точки в кольце. Все полутраектории на этой кривой имеют одно и то же число вращения, которое характеризует бифуркации, осуществляющиеся при изменении параметра ⁶.

Еще в работе [17] было отмечено, что зависимость числа вращения от параметра может описываться канторовской функцией; теперь график этой функции иногда называют «дьявольской лестницей». (Напомним, что непрерывная функция $\omega(\varepsilon) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^1$ называется канторовской, если: 1) она не постоянна на $[a, b]$; 2) на $[a, b]$ имеется множество C , гомеоморфное стандартному канторову совершенному множеству, т. е. являющееся образом стандартного канторова совершенного множества при взаимно-однозначном взаимно-непрерывном отображении; 3) функция ω постоянна на каждом смежном интервале (связной компоненте разности $[a, b] \setminus C$.)

График зависимости $\omega(\varepsilon)$ для отображения $F_\varepsilon(\theta) \equiv \theta + \varepsilon - (1/2\pi) \sin 2\pi\theta$ представлен на рис. 13. Для этого отображения каждое свое рациональное значение функция ω принимает на некотором интервале. При этом отображение имеет на замкнутой кривой, по-видимому, одну устойчивую и одну неустойчивую (седловую) периодическую точку (см. по этому поводу [18, с. 48]). Границе интервала постоянства отвечает бифуркационное значение параметра, соответствующее наличию периодической точки типа седло-узел. Иррациональному числу вращения отвечает наличие рекуррентной траектории — в этот момент отображение непрерывно заменой переменных может быть сведено к сдвигу по окружности на постоянный угол.

Все сказанное справедливо для любых типичных отображений окружности. В частности, график зависимости числа вращения от параметра и для других (типичных) отображений окружности,

⁶ Пусть $x = h(\theta)$ — уравнение инвариантной кривой. Тогда отображение $\theta_{k+1} = F(\theta_k) \bmod 2\pi \equiv [\theta_k + r + h(\theta_k) + a \sin \theta_k] \bmod 2\pi$ описывает поведение траекторий на кривой; числом вращения называется

$$\omega = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} F^k(0); F^k — k\text{-я итерация отображения } F.$$

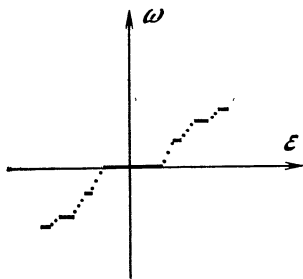
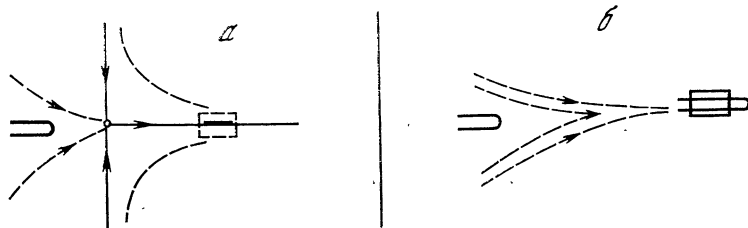


Рис. 13. График канторовской функции

Рис. 14. Возникновение «подковы Смейла» после исчезновения седло-узла

a — образ окрестности куска неустойчивой сепаратрисы в виде подковы, $\varepsilon = \varepsilon_*$; b — «подковообразное» пересечение образа окрестности с ее прообразом, $\varepsilon > \varepsilon_*$



по-видимому, подобен изображенному на рис. 14. Однако постоянному значению числа вращения может соответствовать четное (больше двух) число устойчивых и такое же неустойчивых периодических траекторий. После перехода через бифуркационную кривую, отвечающую наличию седло-узла, число вращения может быть и иррациональным, и рациональным⁷.

Пусть теперь инвариантная кривая в момент перехода негладкая. Это означает, что образ малой окрестности некоторого куска неустойчивой сепаратрисы при итерации отображения $\Phi_{r,a}$ в окрестности седло-узла изогнут, как подкова (рис. 14, a). При исчезновении седло-узла (при переходе через B^+) этот образ при дальнейшем итерировании $\Phi_{r,a}$ пройдет через ту область, где раньше был седло-узел, и через $\text{const} \cdot |r - r_*|^{-1/2}$ итераций, где $(r_*, a_*) \in B^+$, может вновь пересечь эту окрестность аналогично известной «подкове Смейла» [19]. Таким образом, возникает счетное множество седловых циклов и, кроме того, континуальное множество неустойчивых траекторий, т. е. стохастическое множество, содержащееся в странном аттракторе (более детальное рассмотрение см. в [20]). Числа вращения возникших траекторий отличны от $2\pi l$. Режим, соответствующий возникшему странному аттрактору, называют в этом случае «перемежаемостью». Он характеризуется тем, что «практически» периодические осцилляции (в это время, приблизительно равное $\text{const} \cdot |r - r_*|^{-1/2}$, изображающая точка находится в окрестности исчезнувшего цикла) сменяются кратковременными «турбулентными» всплесками.

Итак, внутренние бифуркации гладкого тора определяются изменением числа вращения на нем и характеризуются возникно-

⁷ Для отображения вида $\theta_{k+1} = [\theta_k + g(\theta_k)] \bmod 2\pi$ рациональным (или иррациональным) должно быть отношение $\omega/2\pi$.

вением и исчезновением нетривиальных рекуррентных траекторий. Внутренние бифуркации, связанные с нарушением гладкости и разрушением тора, определяются: 1) сменой устойчивости устойчивым циклом на торе; 2) образованием гомоклинических траекторий у седловых циклов на торе; 3) слиянием и исчезновением предельных циклов на негладком торе. В последнем случае может возникать странный аттрактор.

5. Кризисы торов

Мы видели в предыдущем разделе, что внутренние бифуркации тора удобно изучать в двухпараметрических семействах динамических систем. Для кризисов это тоже так. Но сначала в однопараметрических семействах рассмотрим различные типы кризисов, а затем объединим их в двухпараметрическом семействе. Начнем с примеров отображений, которые можно мыслить себе как отображения Пуанкаре в окрестности двумерного тора (тору при этом отвечает замкнутая инвариантная кривая).

Динамическая система на полуцилиндре

$$x_{k+1} = bx_k + x_k^2 + c \sin \theta_k, \quad \theta_{k+1} = (\theta_k + a \cos \theta_k) \bmod 2\pi,$$

где $x_k > -b/2$, $0 < a < 1$, $(2 - \sqrt{2})/2 < b < 1$, обладает следующими свойствами.

1. При $4c < (1 - b)^2$ система имеет неподвижные точки

$$N = (1/2(1 - b) - 1/2\sqrt{(1 - b)^2 - 4c}, \pi/2),$$

$$R = (1/2(1 - b) + 1/2\sqrt{(1 - b)^2 + 4c}, 3\pi/2),$$

$$S_1 = (1/2(1 - b) - 1/2\sqrt{(1 - b)^2 + 4c}, 3\pi/2),$$

$$S_2 = (1/2(1 - b) + 1/2\sqrt{(1 - b)^2 - 4c}, \pi/2),$$

причем S_1, S_2 — седла, N — устойчивый узел, R — неустойчивый.

2. При $4c < b(2 - b)$, $4c < (1 - b)^2$, область $-b/2 < x < 1/2(1 - b) + 1/2\sqrt{(1 - b)^2 - 4c} - \delta$ является поглощающей при достаточно малом δ . Максимальным аттрактором в ней служит замкнутая инвариантная кривая A , состоящая из неустойчивых сепаратрис седла S_1 и устойчивого узла N . В границу области притяжения этого аттрактора входит замкнутая инвариантная кривая, состоящая из устойчивых сепаратрис седла S_2 и неустойчивого узла R (рис. 15, а). Если $(2 - \sqrt{2})/2 < b < 1$, то $(1 - b)^2 < < b(2 - b)$.

3. При $4c = (1 - b)^2$ точки S_2 и N сливаются, образуя седло-узел. Топологическим пределом аттрактора A является неустойчивая сепаратриса седла S_1 вместе с седло-узлом (рис. 15, б). Это множество не является аттрактором, так как в любой окрестности седло-узла есть точки, уходящие на бесконечность. После исчезновения седло-узла все точки (за исключением стремящихся

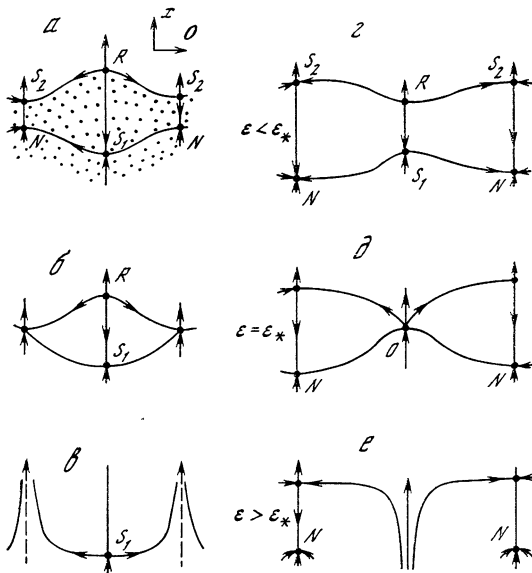


Рис. 15. Кризис инвариантной кривой при слиянии седла с устойчивым ($a - e$) и неустойчивым ($z - e$) узлами
 a, z — перед кризисом (точками помечена область притяжения кривой);
 b, θ — момент кризиса;
 e, e — после кризиса

к S_1), ранее оставшиеся в области притяжения аттрактора A , уходят на бесконечность; осуществляется кризис (рис. 15, e).

Второй пример демонстрирует иной тип кризиса. Динамическая система

$$x_{k+1} = bx_k + x_k^2 + c \cos \theta_k, \quad \theta_{k+1} = (\theta_k + a \sin \theta_k) \bmod 2\pi,$$

где $0 < a < 1$, $(2 - \sqrt{2})/2 < b < 1$, $c > 0$, также имеет поглощающую область, аттрактором в которой является замкнутая инвариантная кривая, образованная неустойчивыми сепаратрисами седла S_1 и устойчивым узлом N при $4c < (1 - b)^2$. Но при $4c = (1 - b)^2$ сливаются не устойчивый узел и седло, как в предыдущем примере, а седло и неустойчивый узел, лежащий на границе области притяжения аттрактора (рис. 15, $z - e$). Топологический предел аттрактора при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_* - 0$ — гладкая кривая (в отличие от случая рис. 15, $a - e$), — это сепаратриса точки O , объединенная с узлом N . После исчезновения седло-узла O ($4c > (1 - b)^2$) большинство точек по-прежнему стремится к устойчивому узлу и лишь незначительная часть, лежащая ранее в области притяжения старого аттрактора, теперь уходит на бесконечность.

Оценим количество точек на прямой $x = x_0 < (1 - b)/2$, через которые полутраектории уходят на бесконечность. В окрестности O отображение можно записать в виде $y_{k+1} = y_k + \mu + y_k^2 + \dots$, $\theta_{k+1} = \lambda \theta_k + \dots$, где $\lambda \sim 1 + a$, $y_k \sim x_k - (1 - b)/2$, $\mu \sim 4c - (1 - b)^2$. После исчезновения O ($\mu > 0$) время, которое проводит траектория в окрестности O , равно, как уже говорилось, $\beta/\sqrt{\mu}$, $\beta > 0$. За это время конечным становится отрезок, длина

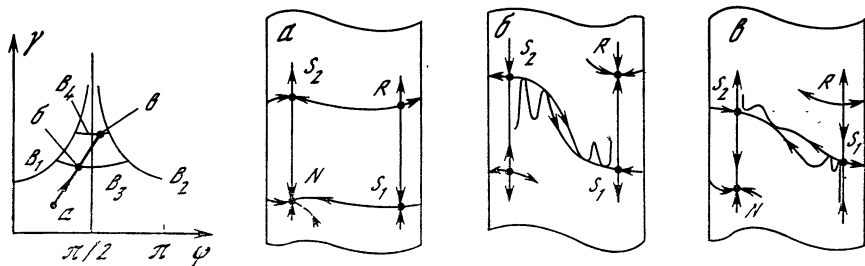


Рис. 16. Фундаментальные области цилиндра и фазовые портреты на них для соответствующих точек бифуркационной диаграммы

которого на прямой $x = x_0$ была $(1 + a)^{-c} / \sqrt{\mu}$. Это и есть доля тех точек, которые уходят на бесконечность. Как видим, при малых надкритичностях μ она ничтожно мала.

Эти два примера иллюстрируют кризисы, осуществляющиеся в результате касательных бифуркаций неподвижных точек на притягивающей инвариантной кривой (циклов на торе) и точек в границе области притяжения.

Другой тип кризиса связан с пересечением сепаратрис седловых точек на инвариантной кривой с сепаратрисами седловых точек на границе области притяжения, т. е. с образованием гетероклинических траекторий.

Рассмотрим двухпараметрическое семейство динамических систем на цилиндре вида

$$x_{i+1} = x_k + \tau(x_k^2 - 1 + \gamma \cos \theta_k),$$

$$\theta_{i+1} = [\theta_k + \tau c \sin(\theta_k - \varphi)] \bmod 2\pi,$$

где $\tau \ll 1$, $c \gg 1$, а параметрами служат γ и φ . В этом семействе (как установлено Я. Н. Сенниковским и автором) возможны как уже рассмотренные типы кризисов, так и кризис, связанный с образованием гетероклинических траекторий. Именно бифуркационная диаграмма и представлена на рис. 16. В точке a структура этого отображения точно такая же, как у отображений рис. 15, a , z , т. е. система имеет притягивающую замкнутую кривую, состоящую из неустойчивой сепаратрисы седла S_1 и узла N . Бифуркационная кривая B_1 отвечает кризису рис. 15, a , при котором устойчивый узел на аттракторе сливается с седлом в границе области притяжения, кривая B_2 соответствует кризису рис. 15, z , при котором седло в аттракторе сливается с неустойчивым узлом в границе области притяжения. При изменении параметров по пути, обозначенному на бифуркационной диаграмме стрелкой, на кривой B_3 сепаратрисы седел S_1 и S_2 впервые имеют общую точку, а после кривой B_4 не имеют общих точек (см. рис. 16). После бифуркации часть точек (открытое множество) из области притяжения старого аттрактора уйдет на бесконечность, а часть останется в области притяжения узла N .

Приведенные примеры иллюстрируют типы кризисов двумерных торов, на которых лежат предельные циклы (число вращения рационально)⁸.

Резюмируя, можно сказать следующее:

Один тип кризисов связан с бифуркацией слияния предельного цикла на торе и в границе области притяжения тора и их взаимного исчезновения. При этом если устойчивый цикл на торе сливается с седловым циклом в границе области притяжения, то в результате кризиса все полутраектории (кроме лежащих на устойчивой сепаратрисе седлового цикла), ранее остававшиеся в области притяжения тора, теперь уходят к другому аттрактору — в системе реализуется совершенно иной режим. Если же седловой цикл на торе сливается с неустойчивым циклом в границе области притяжения, то после бифуркации большинство полутраекторий по-прежнему стремится к устойчивому циклу, ранее лежащему на торе, и лишь через незначительное (хотя и открытое) множество точек проходят полутраектории, стремящиеся к другому аттрактору.

Другой тип кризиса связан с касанием тора (в точке, принадлежащей неустойчивой сепаратрисе седлового цикла на нем) и границы его области притяжения (в точке, принадлежащей устойчивой сепаратрисе седлового цикла, лежащей в границе его области притяжения) и образованием гетероклинических траекторий. При этом часть полутраекторий уходит к другому аттрактору, а большинство по-прежнему стремится к устойчивому циклу, ранее лежащему на торе.

6. Кризисы странных аттракторов

Если представлять себе странный аттрактор как замыкание множества точек, лежащих на неустойчивых сепаратрисах седловых предельных циклов (только такие аттракторы встречаются, например, в системах, удовлетворяющих аксиоме А Смейла), то и внутренние бифуркации, и кризисы странных аттракторов можно, как и в предыдущих разделах, разбить на бифуркации, связанные с нарушением гиперболичности предельных циклов⁹, и бифуркации, связанные с касанием сепаратрис. Рассмотрим примеры кризисов того и другого типа.

Пример 1 [22]. Отображение $F: \theta_{k+1} = (2\theta_k + \varphi_k) \bmod 1$, $\varphi_{k+1} = (\theta_k + \varphi_k) \bmod 1$, $z_{k+1} = \alpha z_k + z_k^2 + \beta \cos 2\pi\theta_k$, где $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$, при $4\beta < (1 - \alpha)^2$ имеет аттрактор в виде двумерного тора $T_A: z = h(\theta, \varphi)$, h — негладкая функция. Отоб-

⁸ Кризисы двумерного тора и внутренние бифуркации в момент, когда число вращения иррационально, напоминают кризисы устойчивых предельных циклов. Здесь мы не будем о них говорить, поскольку при их математическом описании на семейство динамических систем налагаются ограничительные требования, не выполняемые в общем случае, а типичная ситуация не исследована (см., например, [21]).

⁹ Предельный цикл (или периодическая точка отображения) негиперболический, если имеет мультипликатор, равный 1 по модулю [18].

ражение на торе $f: \theta_{i+1} = (2\theta_i + \varphi) \bmod 1$, $\varphi_{i+1} = (\theta_i + \varphi_i) \bmod 1$ имеет бесконечное множество периодических точек.

Действительно, пусть $p > 1$ — простое число, тогда f переводит множество точек $\{(k/p, m/p), k = 0, \dots, p-1, m = 0, 1, \dots, p-1\}$ в себя. Для f^p все эти точки неподвижны, следовательно, для f все они периодические. Так как простых чисел бесконечно много, то и периодических точек для f , а следовательно, и для F бесконечно много. Среди них есть неподвижная точка $A: \theta = 0, \varphi = 0, z = z_A = 1/2(1 - \alpha) - 1/2\sqrt{(1 - \alpha)^2 - 4\beta}$. Она седловая, так как ее мультипликаторы равны $1/2(3 \pm \sqrt{5})$, $1 - \sqrt{(1 - \alpha)^2 - 4\beta}$ (так как дифференциал отображения f — постоянная матрица $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$), то все периодические точки отображения F имеют седловой тип).

В границу области притяжения T_A входит тор T_R , на котором лежит неподвижная точка $R: \theta = \varphi = 0, z = z_R = 1/2[1 - \alpha + \sqrt{(1 - \alpha)^2 - 4\beta}]$ с мультипликаторами $1/2(3 \pm \sqrt{5})$, $1 + \sqrt{(1 - \alpha)^2 - 4\beta}$ (рис. 17, а). При $4\beta \rightarrow (1 - \alpha)^2$ точки A и R сливаются, образуя негиперболическую точку O типа седло-седло (ее мультипликаторы $1/2(3 \pm \sqrt{5}), 1$). Топологический предел T_A уже не аттрактор — из окрестности точки седло-седло точки уходят на бесконечность (рис. 17, б). При $4\beta > (1 - \alpha)^2$ существует открытое множество начальных условий, через которые проходят траектории, уходящие на бесконечность (рис. 17, в).

Пример 2 [23]. Отображение F типа Энэ: $x_{k+1} = y_k$, $y_{k+1} = y_k^3 - ay_k - bx_k$, $a > 0, b > 0$, при $a > 1/2(2 + 3\sqrt{2})(1 + b)$ имеет непритягивающее стохастическое множество (рис. 18, б). Это множество содержится в области, в границу которой входят устойчивые сепаратрисы седловых неподвижных точек A и B (на рис. 18, б она заштрихована). Эти точки остаются седловыми и при $3(1 - b) - \varepsilon < a < 3(1 - b)$, где ε мало. При этих значениях a и b существует поглощающая область со странным (при достаточно малых ε и b) аттрактором. В границу области притяжения аттрактора по-прежнему входят устойчивые сепаратрисы точек A и B (рис. 18, а). Начнем теперь увеличивать a . Кризис наступает в момент касания неустойчивой сепаратрисы точки A (B) с устойчивой сепаратрисой точки B (A) (рис. 18, в).

Из этих двух примеров следует, что для установления причины кризиса нам необходимо знать не только структуру аттрактора, но и границы его области притяжения. Это возможно, если известен сценарий возникновения странного аттрактора, т. е. последовательность бифуркаций, приводящих к его появлению.

Пример 3 [24]. Для уравнения

$$\ddot{u} + k\dot{u} + (1 - q \cos \omega t)u + u^3 = 0,$$

где $k > 0, q = 50, \omega = 2,04$, известно, как возникает странный

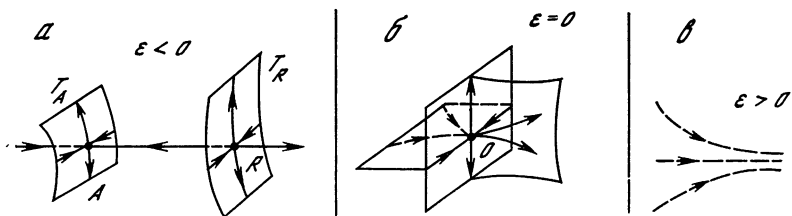


Рис. 17. Кризис негладкого тора

a — части торов T_A и T_R до кризиса; *б* — слияние A и R в седло-седло O ; *в* — после кризиса; $\varepsilon = 4\beta - (1 - \alpha)^2$; $\varepsilon_* = 0$

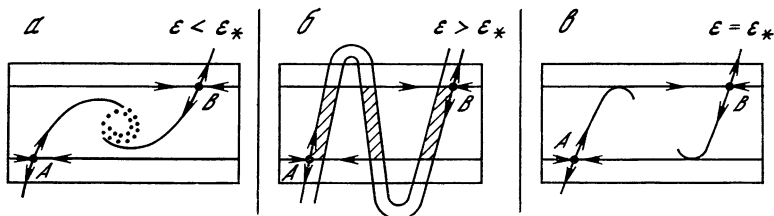


Рис. 18. Кризис аттрактора для отображения плоскости с кубической нелинейностью

a — до кризиса (точками схематично изображен аттрактор); *б* — после кризиса; *в* — возникновение гетероклинических траекторий

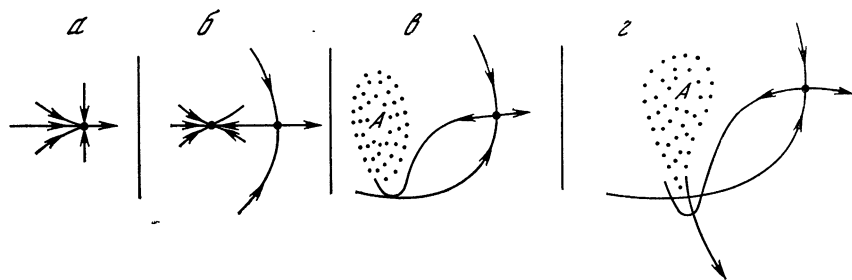


Рис. 19. Отображение Пуанкаре для параметрического осциллятора (по результатам [24])

a, б — возникновение устойчивого и седлового циклов в результате касательной бифуркации; *в* — возникновение гомоклинической траектории перед кризисом аттрактора; *г* — после кризиса!

аттрактор при уменьшении k , а именно, вначале появляется предельный цикл типа седло-узел (касательная бифуркация) (рис. 19, *a*), затем он распадается на седловый и устойчивый циклы (рис. 19, *б*).

Обратим внимание на то, что в границу области притяжения устойчивого цикла входит устойчивая сепаратриса седлового цикла, скажем L . Из устойчивого цикла в результате последовательности бифуркаций удвоения периода развивается странный аттрактор (рис. 19, *в*), в границу области притяжения которого

по-прежнему входит устойчивая сепаратриса цикла L . Кризис осуществляется в момент пересечения аттрактором этой сепаратрисы (в [24] установлено, что при этом $k = 0,4576$) (рис. 19, ε), а предшествует ему (по k) возникновение гомоклинической траектории к L в момент касания устойчивой и неустойчивой сепаратрис L (рис. 19, ε). Для этого уравнения после или в результате кризиса возникает странный аттрактор с областью притяжения, содержащей «старый» странный аттрактор и другой, симметричный ему [24]. На рис. 20 показаны старый и новый странные аттракторы ¹⁰.

7. Внутренние бифуркации странных аттракторов

После сказанного становится ясно, что любые бифуркации седловых предельных циклов в странном аттракторе и траекторий, лежащих на их сепаратрисах, происходящие без изменения поглощающей области, являются внутренними. Их можно перечислять, классифицировать и т. д., но некий парадокс заключается в том, что такие «одиночные» бифуркации нам увидеть не дано. Странный аттрактор предстает в виде наблюдаемой — функции от точки на «типичной» траектории. Осуществление отдельной бифуркации, скажем бифуркации удвоения седлового цикла, не изменит множества типичных траекторий и на наблюдаемой никак не скажется. Поэтому возникает новая постановка задачи — нужно говорить не об отдельных бифуркациях отдельных движений в аттракторе, а о «сценариях» — цепочках бифуркаций, приводящих к изменению наблюдаемых, в частности к изменению их спектров мощности, размерности и других характеристик хаоса, восстанавливаемых по наблюдаемым. Простейший из таких сценариев — это бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода седлового цикла. Несложно установить следующее

У т в е р ж д е н и е . Пусть $L_0(\mu)$ — седловой предельный цикл, содержащийся в аттракторе A_μ , $a \leq \mu \leq b$, причем: 1) при $a \leq \mu < \mu_0$ цикл $L_0(\mu)$ имеет k мультипликаторов, по модулю больших 1; 2) при $\mu = \mu_0$ $(k + 1)$ -й мультипликатор $L_0(\mu)$ становится равным -1 ; возникает предельный цикл $L_1(\mu)$ удвоенного периода; 3) при $\mu = \mu_1$ $(k + 1)$ -й мультипликатор цикла $L_1(\mu)$ становится равным -1 и уже $L_1(\mu)$ претерпевает бифуркацию удвоения периода и т. д.; при $\mu = \mu_j$ бифуркацию удвоения претерпевает цикл $L_j(\mu)$, получившийся при j -м удвоении; 4) $\mu_j \rightarrow \mu_* < b$. Тогда при $\mu > \mu_*$ аттрактор A_μ содержит континуальное множество седловых траекторий, размерность неустойчивой сепаратрисы каждой из которых равна $k + 2$.

Образование континуальных подмножеств в аттракторе со свойствами, отличными от свойств других траекторий, уже может

¹⁰ Автор искренне благодарен Н. Н. Веричеву за представленные фотографии, снятые с осциллографа, на который выводится с аналогового устройства решение приведенного уравнения.

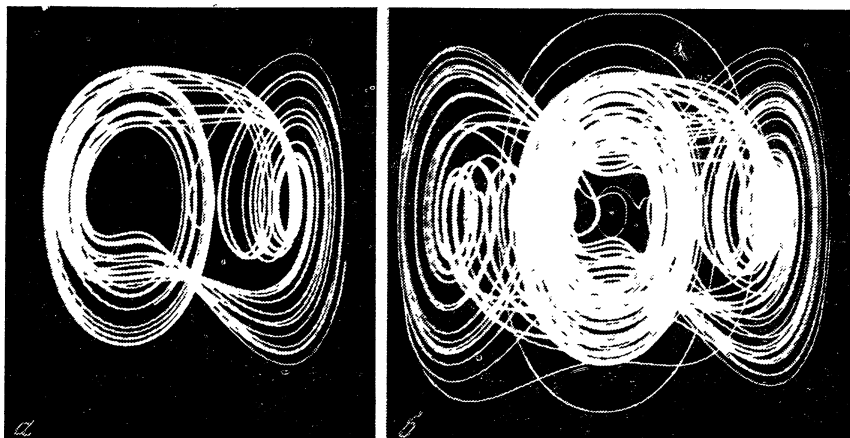


Рис. 20. Кризис «маленького» (а) и возникновение «большого» (б) аттракторов

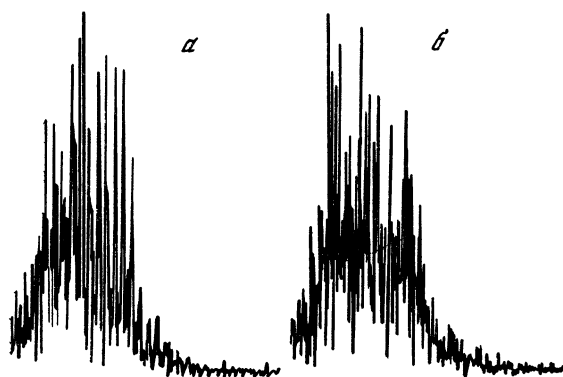


Рис. 21. Спектры мощности до (а) и после (б) прохождения ляпуновского показателя через нуль

отразиться и на наблюдаемых. Численный эксперимент с системой из [25] (см. об этой системе также статью А. В. Гапонова-Грехова и М. И. Рабиновича в настоящем сборнике) показал, что при уменьшении параметра e ($c = \beta = 1,71$, $N = 9$) ляпуновский показатель проходит через нуль (λ_3 становится положительным при $e \simeq 0,7$). При этом образование континуального множества траекторий с неустойчивыми многообразиями размерности на единицу больше, чем у остальных траекторий, может определяться механизмом, описанным в утверждении. На рис. 21 представлены спектры мощности сигнала до и после прохождения λ_3 через нуль. Видно, что при $e < 0,7$ в спектре возникают дискретные линии на половинных частотах относительно основных дискретных составляющих сигнала при $e > 0,7$. При $e < \varepsilon_*$ (здесь $\varepsilon = -(e - 0,7)$, $\varepsilon_* = 0$) наиболее заметна дискретная составляющая сигнала $\omega = 1,4$. При $e > \varepsilon_*$ появляется составляющая той же амплитуды для $\omega = 0,7$.

К возникновению континуального множества траекторий с увеличенной размерностью неустойчивых сепаратрис может при-

водить рождение (из седлового цикла в аттракторе) седлового тора, потеря им гладкости и последующее разрушение, подобное разрушению устойчивого тора (см. разд. 4). Численные эксперименты авторов, проведенные в работе [25], показывают, что такой сценарий, по-видимому, также осуществляется.

Заключение

В настоящей статье либо совсем не затронуты, либо лишь упомянуты многие стороны современной теории динамических систем, имеющие отношение к бифуркациям аттракторов, как-то: 1) применение ренормгруппового анализа при исследовании бифуркаций; 2) закономерности зависимости интегральных характеристик странных аттракторов (энтропии, хаусдорфовой размерности и т. п.) от бифуркационных параметров, в частности нахождение критических индексов; 3) восстановление свойств аттракторов по наблюдаемым; 4) изменение эргодических свойств странных аттракторов при бифуркациях и т. д. По возможности мы оставались в рамках качественной теории динамических систем с конечномерным фазовым пространством.

Описанные в статье эффекты и явления, безусловно, осуществляются и для бесконечномерных динамических систем, порождаемых уравнениями в частных производных, но здесь, кроме того, возникают особые, специфические задачи, на которых кратко остановимся. Их удобно формулировать для системы вида

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, x_2, \dots), \quad i = 1, 2, \dots,$$

являющейся дискретной аппроксимацией исходной распределенной системы — она может быть галеркинским приближением, феноменологической моделью и т. п. Будем говорить, что индекс i , возможно векторный, определяет положение в пространстве i -го элемента среды, динамика которого описывается уравнением для x_i . При таком подходе мало знать бифуркации и свойства аттрактора (предполагается, что он существует) во всем фазовом пространстве $\{(x_1, x_2, \dots)\}$, важно еще понять, как они проявляются в том или ином «месте среды».

Математически это можно сформулировать следующим образом. Пусть i_1, \dots, i_k — фиксированный набор близких индексов¹¹, тогда проекция аттрактора и изображающей точки в нем на подпространство $\{(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})\}$ описывает динамику в области, определяемой данным набором индексов. Можно поставить две задачи о пространственных бифуркациях¹²:

¹¹ Будем говорить, что индекс i близок к индексу j , если их разность (как векторов) является вектором, у которого все компоненты нулевые, кроме одной, равной единице.

¹² Термин введен в работе [26], в которой впервые сформулированы подобные задачи.

1) установить типичные перестройки проекций аттракторов на фиксированное подпространство $\{(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})\}$ при изменении бифуркационных параметров;

2) определить типичные перестройки проекций аттракторов при переходе от одного набора индексов к другому «близкому» набору.

Первоначальные результаты по второй задаче были получены в [26], причем сразу было обнаружено новое явление (строгого математического объяснения которому пока не имеется) стабилизации размерности аттрактора в одномерной цепочке автогенераторов, каждый из которых действует на следующий (см. статью А. В. Гапонова-Грехова, М. И. Рабиновича в настоящем сборнике). Это свидетельствует о нетривиальности приведенных задач. Понятия кризисов и внутренних бифуркаций, несомненно, могут оказаться полезными и при рассмотрении пространственных бифуркаций.

Автор благодарит М. И. Рабиновича за постоянную поддержку и конкретную помощь при подготовке текста статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Chaotic attractors in crisis // Phys. Rev. Letters. 1982. Vol. 48, N 2. P. 1507—1510.
2. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.; Л.: ОГИЗ; Гостехиздат, 1949.
3. Баутин Н. Н., Шильников Л. П. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости состояний равновесия и периодических движений («опасные» и «безопасные» границы) // Марсден Дж., Мак-Кракен. Бифуркация рождения цикла и ее приложение. М.: Мир, 1980. С. 264—316.
4. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.
5. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. Шильников Л. П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий // Мат. сб. 1963. Т. 61(104). С. 443—466.
7. Медведев В. С. О новом типе бифуркаций на многообразиях // Там же. 1980. Т. 113(155), № 3(11). С. 487—492.
8. Афраймович В. С., Шильников Л. П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1983. С. 3—26.
9. Анищенко В. С., Летчфорд Т. Е., Сафонова М. А. Параметрический анализ динамики неавтономной системы со странным аттрактором // Докл. 10-й Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. София. Изд-во БАН, 1985. С. 243—246.
10. Aronson D. G., Chory M. A., Hall G. R., McGehee R. P. A discrete dynamical system with subtly wild behavior // New approach to non-linear problems in dynamics. Philadelphia: SIAM, 1980. P. 339—360.
11. Carry J., Yorke J. A. A transition from Hopf bifurcation to chaos: computer experiments with maps or \mathbb{R}^2 // Lecture Notes in Mathematics. N. Y.: Springer, 1978. Vol. 470. P. 48—66.
12. Афраймович В. С. Принцип кольца и квазиаттракторы // Тез. докл. 9-й Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. С. 42.
13. Заславский Г. М., Рачко Г.-Х. Я. Особенности перехода к турбулентному движению // ЖЭТФ. 1979. Т. 76, № 6. С. 2052—2064.

14. Сенниковский Я. Н. К вопросу о гладких отображениях окружности со счетным множеством периодических точек // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1978. С. 79—92.
15. Newhouse S., Palis J., Takens F. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms // Publ. Math. IHES. 1983. N 57. P. 5—72.
16. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. I. II // Мат. сб. 1972. Т. 88(13), № 8. С. 475—492; 1973. Т. 90(132), № 1. С. 139—156.
17. Майер А. Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Учен. зап. ГГУ. 1939. Вып. 12. С. 215—229.
18. Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 1. С. 11—147. (Итоги науки и техники).
19. Хитецки Э. Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975. 304 с.
20. Афраймович В. С., Шильников Л. П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел // ДАН СССР. 1974. Т. 219, № 6. С. 1281—1284.
21. Chenciner A., Iooss G. Bifurcation of torus T^2 into torus T^3 // C. r. Acad. sci. A. 1977. Vol. 284, N 19. P. 1207—1210.
22. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Supersistent chaotic transients: Plasma preprint UMLPF 84-042, 1984.
23. Afraimovich V. S. Strange attractors and quasi-attractors // Nonlinear and turbulent processes in physics. N. Y.: Gordon and Breach, 1984. P. 1133—1138. (Harwood Acad. Publ.; Vol. 3).
24. Афраймович В. С., Рабинович М. И., Угодников А. Д. Критические точки и фазовые переходы в параметрически возбуждаемом ангармоническом осцилляторе со стохастическим поведением // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38, № 2. С. 64—67.
25. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. О рождении многомерного хаоса в активных решетках // ДАН СССР. 1984. Т. 279, № 3. С. 596—602.
26. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. Динамическая модель пространственного развития турбулентности / Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39, № 12. С. 561—564.



УДК 530.145

ГРУППОВОЙ РЕЗОНАНС, УНИВЕРСАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ И СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ЧАСТИЦ

Г. М. ЗАСЛАВСКИЙ, А. А. ЧЕРНИКОВ

Введение

Исследование движения частиц в поле волнового пакета является одной из задач нелинейной механики, привлекающей к себе пристальное внимание в течение уже многих лет. С одной стороны, эта задача содержит в себе многие характерные черты, типичные для различных физических ситуаций. С другой стороны, круг приложений этой задачи необычайно широк, и здесь достаточно, например, упомянуть вопросы, связанные с взаимодействием волна—частица в теории плазмы.

Формальное содержание задачи выражается достаточно простым на первый взгляд уравнением, которое в одномерном случае имеет вид

$$\ddot{x} = \frac{e}{m} \sum_n E_n \cos(k_n x - \omega_n t). \quad (1)$$

Основные свойства уравнения (1) зависят от структуры волнового пакета, определяемой параметрами E_n , k_n , ω_n . Последнее, в свою очередь, выражает ту или иную конкретную физическую ситуацию.

Можно ли при достаточно общих предположениях о правой части провести упрощение уравнения (1) и получить некоторые общие закономерности динамики частиц? Впервые такое упрощение было предложено в работах [1, 2], которое и легло в основу квазилинейной теории плазмы. Оно заключается в переходе от описания движения частиц с помощью регулярного уравнения (1) к кинетическому уравнению (называемому также квазилинейным):

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D_0(v) \frac{\partial f(v, t)}{\partial v}, \quad (2)$$

где коэффициент диффузии $D_0(v)$ получается путем некоторой процедуры усреднения и равен

$$D_0(v) = \pi \frac{e^2}{m^2} \sum_n E_n^2 \delta(\omega_n - k_n v). \quad (3)$$

Конечно, если бы поля E_n имели случайные фазы или если бы в уравнении (1) присутствовал какой-либо другой случайный элемент, то переход от (1) к (2) можно было бы реализовать с помощью какой-либо подходящей разработанной техники получения уравнения типа Фоккера—Планка. В действительности особенность разреженной плазмы в том, что статистический элемент динамики должен появиться в результате действия нелинейных процессов, а не как следствие столкновений, которые редки и имеют большой временной масштаб.

Таким образом, задача о переходе от (1) к кинетическому уравнению сводится к определению в первую очередь, как это сейчас принято говорить, условий возникновения стохастичности (хаоса) в динамической системе (1). Первое такое качественное условие было сформулировано в работе [1]. Оно заключается в отсутствии частиц, захваченных какой-либо из волн волнового пакета (или, более точно, в достаточно малом числе таких частиц).

Цель настоящей работы — привести точные результаты появления хаоса в системе (1) и точную форму соответствующего уравнения при определенных (но достаточно общих с физической точки зрения) ограничениях на форму волнового пакета. Некоторые качественные соображения по этому поводу опубликованы в [3] и в более общей форме в [4] (см. также [5—8]).

1. Универсальное отображение

Запишем уравнение движения частиц в виде пары гамильтоновских уравнений для переменных p, x :

$$\dot{p} = e \sum_{n=-N}^N E_n \cos(k_n x - \omega_n t), \quad \dot{x} = p/m = v, \quad (4)$$

где $2N + 1$ — число гармоник в волновом пакете. Сделаем относительно структуры пакета следующие упрощающие предположения:

$$k_n = k_0 + n\Delta k, \quad \omega_n = \omega_0 + n\Delta\omega, \quad E_n = E_0, \quad (5)$$

где n — целое число. Выражения (5) означают слабость эффектов дисперсии и достаточную однородность и симметрию спектральных характеристик волнового пакета. Подробное обсуждение условий (5) проводилось в работе [9].

Обозначим

$$\theta = k_0 x - \omega_0 t, \quad \xi = \Delta k x - \Delta\omega t. \quad (6)$$

Подстановка формул (5) и (6) в (4) дает

$$\dot{p} = eE_0 \cos \theta \sum_{n=-N}^N \cos n\xi, \quad \dot{\xi} = \Delta k p/m - \Delta\omega. \quad (7)$$

Изменение энергии частицы $\mathcal{E} = mv^2/2$ определяется уравнением

$$\dot{\mathcal{E}} = eE_0 v \cos \theta \sum_{n=-N}^N \cos n\xi. \quad (8)$$

Будем далее считать $\Delta k \neq 0$ (случай $\Delta k = 0$ рассмотрен в [4]) и введем новую переменную

$$w = \frac{1}{2}m (v - v_g) |v - v_g|, \quad (9)$$

где $v_g = \Delta\omega/\Delta k$ — групповая скорость волнового пакета. Величина $|w|$ имеет смысл энергии частицы в системе отсчета, движущейся со скоростью v_g . Связь между v и w имеет вид

$$v = v_g + \text{sign } w (2 |w| / m)^{1/2}. \quad (10)$$

Дифференцирование выражения (9) по t дает

$$\dot{w} = m |v - v_g| \dot{v}. \quad (11)$$

Из уравнений (7) и (10) имеем

$$\dot{\xi} = \Delta k (v - v_g) = \Delta k \text{sign } w (2 |w| / m)^{1/2}. \quad (12)$$

Объединение (11) и (12) дает

$$\dot{w} = (m/\Delta k) |\dot{\xi}| \dot{v} = (m/\Delta k) \dot{\xi} \dot{v} \text{sign } w. \quad (13)$$

С помощью (11)—(13) перепишем систему (7) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\xi} &= \frac{eE_0}{\Delta k} \cos \theta \operatorname{sign} w F_N(\xi), \\ \frac{d\theta}{d\xi} &= \frac{k_0}{\Delta k} \frac{v(w) - v_0}{v(w) - v_g}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$F_N = \sum_{n=-N}^N \cos n\xi, \quad v_0 = w_0/k_0$$

и зависимость $v = v(w)$ определяется с помощью выражения (10). Величина v_0 имеет смысл фазовой скорости центральной моды волнового пакета.

Нетрудно видеть, что система (14) является гамильтоновской с гамильтонианом

$$H(w, \theta, \xi) = H_0(w) - \operatorname{sign} w \frac{eE_0}{\Delta k} \sin \theta F_N(\xi), \quad (15)$$

$$H_0(w) = \frac{k_0}{\Delta k} [w + (v_g - v_0)(2m|w|)^{1/2}], \quad w \neq 0,$$

где роль времени играет переменная ξ , т. е.

$$\frac{dw}{d\xi} = - \frac{\partial H(w, \theta, \xi)}{\partial \theta}, \quad \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{\partial H(w, \theta, \xi)}{\partial w}.$$

Последнее упрощение, которое соответствует физической ситуации и будет более подробно обсуждаться далее, заключается в том, что N достаточно велико. Поэтому в формулах (14) и (15) можно заменить функцию $F_N(\xi)$ на

$$F(\xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(\xi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - 2\pi n). \quad (16)$$

Система (14) переходит в следующую:

$$\frac{dw}{d\xi} = eE_0 L \cos \theta \operatorname{sign} w \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - 2\pi n), \quad (17)$$

$$\partial \theta / \partial \xi = (k_0 L / 2\pi) [1 + \operatorname{sign} w (m/2 |w|)^{1/2} (v_g - v_0)].$$

Величина $L = 2\pi/\Delta k$ имеет смысл характерного размера системы.

От уравнений (17) можно перейти к уравнениям в конечных разностях. Для этого введем последовательность значений независимой переменной $\xi_n = 2\pi n$ и последовательность функций

$$w_n = w(\xi_n - 0), \quad \theta_n = \theta(\xi_n - 0).$$

Интегрирование выражений (17) на интервале $(\xi_n - 0, \xi_{n+1} - 0)$ дает

$$w_{n+1} = w_n + eE_0 L \cos \theta_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + \omega(w_{n+1}), \quad (18)$$

где величина

$$\omega(w) = k_0 L [\text{sign } w + (m/2 |w|)^{1/2} (v_g - v_0)] \quad (19)$$

является нелинейной частотой колебаний частицы в поле волнового пакета. При получении отображения (18) учтено, что на интервале $(\xi_n - 0, \xi_{n+1} - 0)$ система совершает свободное движение.

Определим интервал времени следования δ -импульсов с помощью соотношения $\Delta\xi = \xi_{n+1} - \xi_n = 2\pi$. Получаем уравнения

$$\Delta kx(t_n) - \Delta\omega t_n = 2\pi n, \quad \Delta kx(t_{n+1}) - \Delta\omega t_{n+1} = 2\pi(n+1).$$

Из уравнений (4) следует

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = v_{n+1}(t_{n+1} - t_n).$$

Из последних двух уравнений находим

$$\Delta t = |t_{n+1} - t_n| = 2\pi/\Delta k |v_{n+1} - v_g| = L(m/2 |w_{n+1}|)^{1/2}. \quad (20)$$

Отображение (18) в дальнейшем будем называть универсальным. Оно сохраняет меру в фазовом пространстве (w, θ) .

2. Область стохастичности

Перейдем в отображении (18) к новым независимым переменным, а именно введем безразмерную энергию

$$u = 2w/m(v_g - v_0)^2 (k_0 L)^2 \quad (21)$$

и новую фазу $y = 1/2 - \theta/2\pi$. Отображение (18) при этом приобретет вид

$$\bar{u} = u - K \cos 2\pi y, \quad \bar{y} = y - \frac{\text{sign } \bar{u}}{2\pi |\bar{u}|^{1/2}} + \tilde{y}, \quad (22)$$

удобный для дальнейшего численного моделирования. Величина

$$K = \frac{2eE_0 L}{m(v_g - v_0)^2 (k_0 L)^2} \quad (23)$$

характеризует интенсивность волнового пакета, а параметр $\tilde{y} = k_0 L/2\pi$ соответствует фазовому сдвигу.

Рассмотрим некоторые свойства отображения (22) в случае движения частицы в поле волнового пакета малой интенсивности, т. е. при $K \ll 1$. На рис. 1, а приведены численные результаты для отображения (22) при $K = 1,01 \cdot 10^{-3}$ и $\tilde{y} = 0$ после 10^5 итераций для одной траектории. В правой части рисунка показано распределение плотности $F(u)$, проинтегрированное по фазе. Начальное условие выбрано случайно в области малых u . Из рис. 1, а следует, что область стохастичности ограничена в фазовом пространстве. Не заполненные траекториями островки устойчивости ограничены инвариантными кривыми, а центрами островков являются стационарные эллиптические точки.

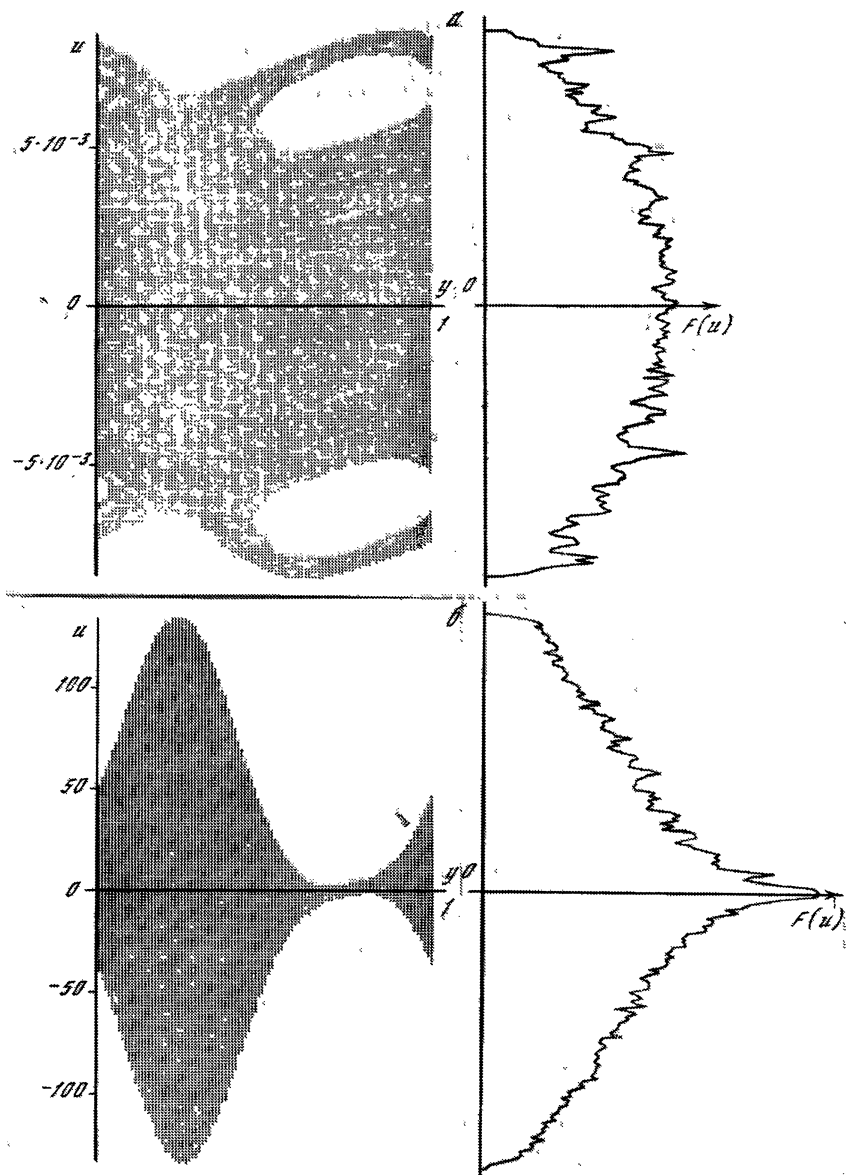


Рис. 1. Результаты численного моделирования отображения (22) при $K = 1,01 \cdot 10^{-3}$ (а) и $K = 10,1$ (б)

Слева — фазовая плоскость (y, u) ; справа — проинтегрированная по фазе функция распределения $F(u)$

Координаты стационарных точек единичного периода $(y^{(0)}, u^{(0)})$ определяются решениями следующих уравнений:

$$K \cos 2\pi y^{(0)} = 0, \quad |u^{(0)}|^{-1/2} = 2\pi m, \quad m - \text{целое.} \quad (24)$$

Отсюда следует, что фаза $y^{(0)} = 1/4$ либо $3/4$, а $u_m^{(0)} = \pm 1/4\pi^2 m^2$. Построим в окрестности стационарных точек $y^{(0)}$ и $u^{(0)}$ касательное отображение

$$\begin{pmatrix} \Delta u_{n+1} \\ \Delta y_{n+1} \end{pmatrix} = \hat{A} \begin{pmatrix} \Delta u_n \\ \Delta y_n \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где матрица \hat{A} имеет вид

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi K \sin 2\pi y^{(0)} \\ \frac{1}{4\pi |u^{(0)}|^{3/2}} & 1 + \frac{K \sin 2\pi y^{(0)}}{2 |u^{(0)}|^{3/2}} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

причем $\det \hat{A} = 1$ в силу сохранения фазовой площади. Разрешая уравнение для собственных значений λ матрицы \hat{A}

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{Sp} \hat{A} + 1 = 0, \quad (27)$$

находим условие устойчивости периодических стационарных точек

$$\left| 2 + \frac{K \sin 2\pi y^{(0)}}{2 |u^{(0)}|^{3/2}} \right| < 2. \quad (28)$$

Отсюда следует, что стационарные точки единичного периода при $y^{(0)} = 1/4$ всегда неустойчивы, т. е. являются гиперболическими, а при $y^{(0)} = 3/4$ неустойчивость периодических точек имеет место в области

$$|u| < K^{2/3}/4. \quad (29)$$

Область (29) является областью сплошной стохастичности, в которой отсутствуют островки устойчивости. Граница области сплошной стохастичности при малых значениях параметра K лежит, естественно, ниже верхней границы стохастичности (см. рис. 1), которую можно определить по достаточно известной схеме. Для этого следует определить величину

$$\tilde{K} = \left| \frac{dy_{n+1}}{dy_n} - 1 \right| = \frac{K}{2 |u_n|^{3/2}} |\sin 2\pi y_n|. \quad (30)$$

Условие стохастичности имеет вид $\tilde{K} \gtrsim 1$, или в более удобной форме

$$\tilde{K} = \Omega_0^2 \Omega \frac{L^2}{k_0 |v - v_g|^3} |\sin \theta| \gtrsim 1, \quad (31)$$

где

$$\Omega_0^2 = eE_0 k_0 / m; \quad \Omega = k_0 |v_g - v_0|. \quad (32)$$

Если отвлечься от области фаз θ , в которой возникает стохастичность, то условие (31) приводит к следующему интервалу

скоростей для области стохастичности:

$$|v - v_g| \lesssim (\Omega_0^2 \Omega L^2 / k_0)^{1/3}. \quad (33)$$

Из выражения (33) вытекают важные для приложений следствия: 1) интервал скоростей области стохастичности симметричен относительно групповой скорости волнового пакета v_g , 2) этот интервал ограничен и его граница пропорциональна $E_0^{1/3}$, 3) при $v_g = v_0$ область стохастичности отсутствует.

Рассмотрим некоторые предельные случаи условия (33). При $v \ll v_g$ и $v_0 \ll v_g$ оно переходит в неравенство

$$K_1 = \Omega_0^2 T^2 \gtrsim 1, \quad T = 2\pi / \Delta\omega,$$

полученное в работе [3]. Если $v \sim v_0$, то из (33) и (32) следует

$$K_2 = \Omega_0^2 / (\Delta k)^2 (v_g - v_0)^2 \sim \Omega_0^2 / (\Delta k)^2 (v_g - v)^2 \gtrsim 1.$$

Это условие было приведено в [4] и в более близкой к написанному выражению форме в [10]. В этих же работах было впервые отмечено существование ограничения по скоростям при стохастическом нагреве частиц. Аналогичный результат для близкой модели с $v_g = 0$ недавно опубликован в работе [11].

Пусть, как это часто бывает, $v_0 \gg v_g$. Тогда нетрудно видеть из (33), что стохастизация всегда происходит для скоростей v вблизи v_g и может не происходить для v вблизи v_0 . В связи с этим замечанием рассмотрим выражение для фазовой скорости n -й гармоники пакета. Согласно (5) имеем

$$v_\Phi(n) = \frac{\omega_n}{k_n} = \frac{\omega_0 + n\Delta\omega}{k_0 + n\Delta k}. \quad (34)$$

При малых n ($n\Delta\omega < \omega_0$, $n\Delta k < k_0$) имеем $v_\Phi(n) \sim v_0$ и, следовательно, характерные фазовые скорости волн имеют тот же порядок, что и фазовая скорость средней моды пакета v_0 . При больших n ($n\Delta\omega > \omega_0$, $n\Delta k > k_0$) имеем $v_\Phi(n) \sim v_g$. Пусть N_0 есть характерное число, разделяющее случаи больших и малых n . Рассмотренный выше случай соответствует $N \rightarrow \infty$, т. е. $N \gg N_0$ (N — число гармоник в пакете). Это означает, что практически для всех волн пакета $v_\Phi(n) \simeq v_g$, если только $\Delta\omega \neq 0$.

Однако реальные пакеты имеют конечные значения N , и поэтому для них вопрос о справедливости критерия (33) нуждается в дополнительном исследовании.

Аналогичное численное моделирование было проведено для отображения (22) при больших значениях K . На рис. 1, б изображена плоскость (y, u) после 10^5 итераций для $K = 10,1$ и $\tilde{y} = 0$. Из рис. 1, б следует, что при $K > 1$ в фазовом пространстве возникает регулярная структура — нагрев частиц происходит в основном вблизи определенного значения фазы $y = 1/4$. Выше границы стохастичности лежат инвариантные кривые, семейство которых можно получить следующим образом.

В области больших значений переменной $u \gg K$ изменение действия за один шаг отображения Δu мало по сравнению со значением $u \gg \Delta u$, для фазовой переменной y также имеем $y \gg \Delta y$, поэтому в отображении (22) можно перейти к дифференциальному приближению

$$\frac{du_n}{dn} = -K \cos 2\pi y_n, \quad \frac{dy_n}{dn} = -\frac{\text{sign } u_n}{2\pi |u_n|^{1/2}}. \quad (35)$$

Система (35) обладает первым интегралом

$$\text{sign } u_n |u_n|^{1/2} = (K/2)(1 + \sin 2\pi y_n) + C. \quad (36)$$

Семейство кривых (36) при $K \gg 1$ определяет инвариантные кривые отображения (22) с хорошей степенью точности. Кривой, ограничивающей область стохастичности, соответствует определенное значение константы C , зависящее, вообще говоря, от величины параметра K . Зависимость $C(K)$ на границе области стохастичности может быть найдена численно: $C(K) \simeq K^{1/2}/2$.

3. Кинетическое уравнение

Рассмотрим далее для простоты случай $K \ll 1$ и

$$K_0 = \max \tilde{K} = \Omega_0^2 \Omega L^2 / k_0 |v - v_g|^3 \gg 1. \quad (37)$$

Тогда для корреляции фаз можно привести следующую оценку [10]:

$$\begin{aligned} R(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta(0) \exp\{i[\theta(t) - \theta(0)]\} \sim \\ &\sim \exp[ik_0(v - v_0)t] \exp(-t/\tau_c), \end{aligned} \quad (38)$$

где время расщепления корреляций равно

$$\tau_c = 2\Delta t / \ln K_0; \quad (39)$$

Δt — время между двумя последовательными шагами отображения. Подставляя для Δt формулу (20) в (39), получаем

$$\begin{aligned} \tau_c &= 2L/|v - v_g| \ln K_0 = \\ &= 2L/|v - v_g| \ln \frac{\Omega_0^2 \Omega L^2}{K_0 |v - v_g|^3}, \quad K_0 \gg 1. \end{aligned} \quad (40)$$

Из выражения (40) видно, что при $v \rightarrow v_g$ время расщепления корреляций фаз стремится к бесконечности, хотя условие стохастичности (37) выполняются тем лучше, чем меньше величина $|v - v_g|$. Это связано с сильным взаимодействием между частицей и волновым пакетом в области $v \sim v_g$. Ниже динамика в области v_g будет исследована более детально.

Пусть выполнено условие (37) стохастичности фаз θ . Расщепление корреляции фаз (38) в области скоростей, в которой возму-

щение является малым, т. е. $eE_0L \ll w$, позволяет перейти к кинетическому описанию динамики частицы с помощью функции распределения $F(w, t)$, удовлетворяющей уравнению Фоккера—Планка—Колмогорова:

$$\frac{\partial F(w, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} D(w) \frac{\partial F(w, t)}{\partial w}, \quad (41)$$

$$D(w) = e^2 E_0^2 (|w|/2m)^{1/2},$$

которое имеет смысл в области значений w , определяемых согласно условию (33) и определению (9) неравенством

$$|w| \lesssim w_0 = (m/2) (\Omega_0^2 \Omega L^2 / k_0)^{2/3}. \quad (42)$$

Граничное условие должно иметь форму отсутствия потока частиц через границу w_0 , т. е.

$$D(w) \frac{\partial F(w, t)}{\partial w} \Big|_{w=w_0} = 0. \quad (43)$$

Таким образом, стационарное решение уравнения (41) имеет вид

$$F(w) = \text{const} = \rho/2w_0, \quad |w| \lesssim w_0, \quad (44)$$

где ρ — число частиц в области (42). Решение (44) находится в соответствии с результатами численного моделирования (ср. рис. 1, а).

Следует оговорить, что граница w_0 является «непроницаемой» для частиц в некотором грубом приближении, так как критерий (23) устанавливает границу лишь сильной стохастичности. Это не исключает возможности существования слабых и медленных процессов, приводящих к диффузии частиц в область $|w| > w_0$. Подобные процессы здесь не рассматриваются. Существует также некоторая тонкая структура функции распределения F в окрестности точки $w = 0$, которую мы далее обсудим в связи с явлением группового резонанса.

Рассмотрим также функцию распределения по скоростям $F(v)$. Согласно формулам (9) и (44)

$$F(v) = F(w) |dw/dv| = (m\rho/2w_0) |v - v_g|,$$

$$|v - v_g| \lesssim (2w_0/m)^{1/2}. \quad (45)$$

Распределение (44), (45) означает, что существует «плато» по энергии в системе отсчета, движущейся вместе с волновым пакетом, или «конус» по скоростям относительно точки $v = v_g$. Такое распределение является неустойчивым. Поэтому его стационарность следует понимать лишь в узком смысле, в котором рассматривается только взаимодействие частиц с заданным волновым пакетом.

Обратимся, наконец, к более общему случаю уравнений движения

$$\ddot{x} = \frac{e}{m} \sum_k E_k \cos(kx - \omega_k t), \quad (46)$$

в котором величины E_k , k , ω_k медленно изменяются по пакету и слабо отличаются от условий (5). Тогда можно с той же степенью точности сохранить анализ возникновения стохастичности, проведенный в разд. 2. Условие (33) теперь принимает вид

$$|v - d\omega_k/dk| \lesssim (\Omega_k^2 \Omega L^2/k)^{1/2}, \quad (47)$$

где величины

$$\Omega_k^2 = eE_k k/m, \quad \Omega = |\omega - kd\omega_k/dk| \quad (48)$$

относятся к некоторым характерным значениям k для волнового пакета.

Как уже отмечалось в разд. 1, роль канонической пары переменных типа действие—угол играют переменные (w, θ) .

Пренебрежем далее зависимостью v_g от k . Тогда определение переменной w формулой (9) сохраняет свой смысл и уравнение для \dot{w} находится с помощью формул (11) и (46):

$$\dot{w} = e |v(w) - v_g| \sum_k E_k \cos(kx - \omega_k t).$$

Соответствующая структура кинетического уравнения, полученная в работе [10, с. 116], имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(w, t)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} D(w) \frac{\partial F(w, t)}{\partial w}, \\ D(w) &= \frac{4\pi e^2}{m} \sum_k E_k^2 |w| \Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, \omega_k - kv\right), \\ \Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, z\right) &= \frac{1/\pi\tau_c}{(1/\tau_c)^2 + z^2} \xrightarrow{1/\tau_c \rightarrow 0} \delta(z), \end{aligned} \quad (49)$$

где использовано выражение для коррелятора фаз (38) и корреляционное время (40) с учетом обозначений (48) равно

$$\tau_c = 2L/|v(w) - d\omega_k/dk| \ln \frac{\Omega^2 \Omega L}{k |v(w) - d\omega_k/dk|^3}. \quad (50)$$

Нетрудно видеть, что выражение (49) для $D(w)$ переходит в (41), если положить $E_k^2 = \text{const} = E_0^2/2$ и совершить переход

$$\sum_k \Delta\left(\frac{1}{\tau_c}, \omega_k - kv\right) \rightarrow \frac{1}{\Delta k} \int \rho k \delta(\omega_k - kv) = L/2\pi |v - v_g|.$$

Уравнение (49) является наиболее полной формой квазилинейного уравнения, записанного в пространстве обобщенной канонической переменной w и с учетом конечного времени стоха-

стизации фаз. Покажем, как из уравнения (49) получается обычная первоначальная форма [1]. Для этого рассмотрим предельный случай $v \ll v_g$. Тогда

$$w \approx (m/2)(-v_g^2 + 2v_g v), \quad dw = mv_g dv.$$

Подставляем эти выражения в уравнение (49). Это дает

$$\frac{\partial F(v, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D(v) \frac{\partial F(v, t)}{\partial v},$$

$$D(v) = \pi \frac{e^2}{m^2} \sum_k E_k^2 \Delta \left(\frac{1}{\tau_c}, \omega_k - kv \right), \quad (51)$$

$$\tau_c = 2T / \ln(\Omega_k^2 T^2).$$

4. Групповой резонанс

В основе явления, рассматриваемого в данном разделе, лежит возможность группового резонанса, т. е. резонанса между частицей и волновым пакетом. Такой резонанс, если он реализуется, должен происходить при скоростях частицы, близких к v_g .

Однако, как видно из формул (9)–(14), точка $v = v_g$ является особой. В ее окрестности различные, даже малые, отклонения от условий (5) для структуры волнового пакета могут оказать сильное влияние на характер движения частицы. Поэтому в дальнейшем будем считать волновой пакет конечным, а в зависимости частоты ω_n от n учтем дисперсию, вводя член $\sim n^2$.

Теперь уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} = \frac{e}{m} E_0 \sum_{n=-N}^N \cos[k_c x - \omega_0 t + n(\Delta k x - \Delta \omega t) - \alpha n^2 t], \quad (52)$$

где α мал. Последнее слагаемое в фазе играет роль лишь на временах $t \gtrsim t_0$, где

$$t_0 = 1/\alpha N^2. \quad (53)$$

Исследуем движение в окрестности точки $v = v_g$. Положим

$$x = v_g t + \delta x, \quad \dot{x} = v_g + \delta v = v_g + \delta \dot{x}. \quad (54)$$

С помощью (54) уравнение (52) преобразуется к виду

$$\delta \ddot{x} = \frac{e}{m} E_0 \sum_{n=-N}^N \cos \{ \Omega t + k_0 \delta x + \alpha t n_0^2(t) - \alpha t [n - n_0(t)]^2 \}, \quad (55)$$

где обозначено $n_0(t) = \Delta k \delta x / 2\alpha t$ и, как и ранее, $\Omega = k_0(v_g - v_0)$. Наибольшее значение $n_0(t)$ достигается при минимальном значении t , при котором члены, обусловленные дисперсией частоты, существенны. Это время определяется величиной t_0 . С помощью (53) введем

$$n_0 \equiv n_0(t_0) = 1/2 \Delta k \delta x N^2. \quad (56)$$

Теперь очевидно, что предельная структура правой части (55) определяется соотношением между величинами n_0 и N .

Рассмотрим следующий случай: $n_0 \ll N$, т. е. согласно (56)

$$N\Delta k\delta x \ll 1. \quad (57)$$

Пренебрегаем в (55) слагаемыми в фазе, содержащими n_0 :

$$\delta\ddot{x} = \frac{e}{m} E_0 \sum_{n=-N}^N \cos(\Omega t + k_0\delta x - \alpha n^2 t). \quad (58)$$

Для не слишком малых времен можно заменить в формуле (58) суммирование интегрированием по n , устремив пределы к бесконечности. Это дает

$$\delta\ddot{x} = (e/m) E_0 (\pi/|\alpha| t)^{1/2} \cos [\Omega t + k_0\delta x - (\pi/4) \text{sign } \alpha]. \quad (59)$$

Вводя переменную

$$y = \Omega t + k_0\delta x - \pi/2 - \pi \text{sign } \alpha/4,$$

получаем окончательно

$$\ddot{y} + \Omega_0^2 (\pi/|\alpha| t)^{1/2} \sin y = 0. \quad (60)$$

Решение уравнения (60) очевидно. Это осцилляции с характерной «частотой»

$$\Omega_g(t) = \Omega_0 (\pi/|\alpha| t)^{1/4}, \quad (61)$$

затухающей со временем.

Физический смысл полученного результата легко понять. Можно показать, что в формуле (61) величине $\max \Omega_g(t)$ соответствует значение

$$\Omega_g = \Omega_g(t_0) \sim \Omega_0 N^{1/2} \quad (62)$$

(для этого надо обратиться к исходному уравнению (59) при малых t). Подставляя t_0 из (62) в (59), замечаем, что

$$\delta\ddot{x} \sim (e/m) E_0 N,$$

т. е. возмущение возрастает примерно в N раз. Это и есть прямое следствие того, что частица находится в резонансе не с одной волной, а с N волнами, действие которых эффективно стимулируется.

Величина Ω_g , определяемая формулой (62), может быть названа частотой группового резонанса. Затухание эффективной частоты $\Omega_g(t)$ со временем (см. (61)) связано с распылением волнового пакета.

Таким образом, характерные признаки группового резонанса заключаются в следующем:

1) точке резонанса соответствует скорость частицы, равная групповой скорости волнового пакета ¹;

¹ Заметим, что в рассмотренном случае центру резонанса соответствует $\dot{y} = 0$, т. е. $v = v_0$. Это связано с тем, что условие малости поправки $\delta\dot{t}$ приводит к неравенству $|v_0 - v_g| \ll v_g$.

2) динамика в окрестности резонанса соответствует колебаниям нелинейного маятника (см. (60)) с медленно убывающей частотой;

3) характерная частота группового резонанса Ω_g равна частоте нелинейного резонанса Ω_0 в поле одной волны, умноженной на квадратный корень из числа волн в пакете;

4) частота осцилляций в групповом резонансе убывает вследствие расплывания волнового пакета (или возрастает, если пакет «собирается»).

Остановимся вкратце на сути рассмотренного явления.

Общепринятое рассмотрение взаимодействия волн с частицей в плазме основано на двух предельных ситуациях, в которых участвует либо одна волна, либо волновой пакет. Во втором случае взаимодействие с группой волн рассматривается в рамках квазилинейной теории. Эвристическая ценность такого анализа несомненна. Однако в стороне остается вопрос о том, когда применимо то или иное приближение. Реально мы всегда имеем дело с волновым пакетом, и вопрос о том, в какой мере его можно считать узким или широким и как это реально отражается на динамике частицы, оставался открытым.

Выше было показано, что существует явление группового резонанса, во многом аналогичное обычному нелинейному резонансу (т. е. динамике частиц, захваченных одной волной). Однако групповой резонанс осуществляется для частиц, движущихся со скоростью, близкой к $v_g \sim v_0$.

При выполнении определенных условий, которые установлены выше, групповой резонанс разрушен, а динамика частиц становится стохастической. В этом случае можно для описания эволюции использовать кинетическое уравнение, которое имеет, как оказывается, различную структуру в зависимости от соотношения между скоростью частицы и v_g . Общая структура кинетического уравнения позволяет найти предельное распределение частиц по энергиям, которое, в свою очередь, создает неравновесную ситуацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Нелинейные колебания разреженной плазмы // Ядерный синтез. 1961. Т. 1, № 1. С. 82—105.
2. Drummond W. E., Pines D. Nonlinear stabilization of plasma oscillations // Nucl. Fusion. Suppl. 1962. N 3. P. 1049.
3. Заславский Г. М., Филоноенко Н. Н. Стохастическая неустойчивость захваченных частиц и условие применимости квазилинейного уравнения // ЖЭТФ. 1968. Т. 54, № 5. С. 1590—1602.
4. Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. и др. Вопросы теории стохастичности и турбулентности в плазме // Физика плазмы. 1983. Т. 9, № 1. С. 62—71.
5. Заславский Г. М. Регулярная и стохастическая динамика частиц в поле волнового пакета // ЖЭТФ. 1985, Т. 88, № 6. С. 1984—1995.
6. Chernikov A. A., Zaslavsky G. M. Universal mapping for particle dynamics in the wave-packet field and region of stochasticity // Phys. Lett. A. 1985. Vol. 110, N 2. P. 73—76.

7. Заславский Г. М., Черников А. А. Групповой резонанс, универсальное отображение и стохастическая динамика частиц // ЖЭТФ. 1985. Т. 89, № 5(11). С. 1632—1647.
8. Берзин А. А., Заславский Г. М., Моисеев С. С., Черников А. А. Стохастическое ускорение и диффузия частиц в поле волнового пакета // Физика плазмы. 1986. Т. 12.
9. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. О пределах статистического описания нелинейного волнового поля // ЖЭТФ. 1967. Т. 52, № 3. С. 1083—1095.
10. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 272 с.
11. Fuchs V., Krapchev V., Ram A., Bers A. Diffusion of electrons by coherent wavepackets // Physica D. 1985. Vol. 14, N 1. P. 141—160.



УДК 533 951

СОЛИТОНЫ И ХАОС ПРИ РЕЗОНАНСНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН

В. В. КУРИН, Г. В. ПЕРМИТИН

Введение

Одной из базовых моделей теории распределенных нелинейных колебаний является система укороченных уравнений трехволнового резонансного взаимодействия в прозрачной среде с квадратичной нелинейностью:

$$\begin{aligned}
 (\partial/\partial t + (\mathbf{v}_1, \nabla) + \gamma_1) a_1 &= -\sigma a_2 a_3, \\
 (\partial/\partial t + (\mathbf{v}_2, \nabla) + \gamma_2) a_2 &= \sigma a_1 a_3^*, \\
 (\partial/\partial t + (\mathbf{v}_3, \nabla) + \gamma_3) a_3 &= \sigma a_1 a_2^*,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где a_i — комплексные амплитуды квазигармонических волн; \mathbf{v}_i , γ_i — их групповые скорости и декременты затухания; $\sigma > 0$ — коэффициент нелинейного взаимодействия.

Уравнения (1) применяются для описания процессов вынужденного рассеяния и нелинейной трансформации волн в оптических и акустических системах, в плазме, в ферромагнетиках, на границах раздела сред и т. д. Кроме того, эти уравнения являются одной из самых простых и в то же время достаточно универсальных моделей распределенных усилителей и генераторов волн. Содержание данной работы составляет исследование различных режимов работы распределенных генераторов волн (типа электронной лампы обратной волны) на основе уравнений вида (1), несколько модифицированных вследствие учета дополнительных нелинейных эффектов. В основном сохранена терминология, принятая в теории вынужденного рассеяния; соответственно a_1 будем называть падающей волной или «накачкой», a_2 — рассеянной волной, a_3 — волной параметра, на вариациях которого происходит

рассеяние. Для конкретности рассмотрение проводится на примере вынужденного рассеяния Мандельштама—Бриллюэна (ВРМБ) в бесстолкновительной плазме, где a_1, a_2 — электромагнитные волны, a_3 — ионный звук ($v_1 \sim v_2 \sim c \gg v_3 \sim c_s$).

1. Нелинейные фазовые расстройки волнового резонанса

Эффективное взаимодействие волн, описываемое уравнениями (1), возможно только при выполнении условий временного и пространственного синхронизма ($\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$); кроме того, должны поддерживаться вполне определенные фазовые соотношения между волнами (вынуждающая сила должна быть сдвинута по фазе на $\pi/2$ относительно раскачиваемых колебаний). Если запись условий синхронизма считается в настоящее время чуть ли не банальностью, то последнее необходимое условие волнового резонанса упоминается сравнительно редко. Дело в том, что в наиболее типичных ситуациях волны a_2, a_3 раскачиваются от сравнительно малых затравочных уровней, определяемых тепловыми шумами, слабым линейным рассеянием или слабыми сигналами, падающими на область взаимодействия. На начальном этапе система (1) описывает параметрическую неустойчивость интенсивной волны a_1 , при этом оптимальные фазовые соотношения между накачкой и вторичными волнами устанавливаются автоматически. Однако на нелинейной стадии процесса различные побочные нелинейные эффекты приводят, как правило, к нарушению оптимальных фазовых соотношений и, как следствие, к торможению обмена энергией между волнами. Конкретно, в случае ВРМБ в плазме к нелинейным фазовым сдвигам приводит вытеснение плазмы из области взаимодействия пондеромоторными силами, баунс-захват частиц в ямы высокочастотного потенциала биений падающей и рассеянной волн, нагрев плазмы, дополнительная ионизация. Ниже будет продемонстрировано появление расстроек резонанса из-за действия гидродинамической нелинейности, приводящей к генерации гармоник ионного звука a_3 [1].

Рассмотрим вынужденное обратное рассеяние плоской электромагнитной волны a_1 в слое бесстолкновительной (достаточно горячей) сильно неизотермической плазмы ($T_e \gg T_i$, T_e, T_i — температуры электронов и ионов). Для простоты рассматривается одномерная ситуация — все участвующие в процессе волны распространяются вдоль оси x (рис. 1). Предполагается, что границы слоя размыты в масштабе длин волн и отражением их от границ можно пренебречь. Однако в масштабе характерной длины нелинейного взаимодействия $L_{\text{нр}}$ границы считаются достаточно резкими, чтобы можно было пользоваться укороченными уравнениями для комплексных амплитуд с постоянными коэффициентами.

Высокочастотная сила $\mathbf{F}_{\text{в.ч}} \sim \nabla |a_1 \exp(i\omega_1 t - ik_1 x) + a_2 \exp(i\omega_2 t + ik_2 x)|^2$, действующая на электроны, возбуждает в плазме синхронную с волной биений гармонику ионного звука

$b_1 \exp(i\omega_3 t - ik_3 x)$. По мере ее нарастания вследствие собственной гидродинамической нелинейности ионного звука будет возбуждаться его вторая гармоника $b_2 \exp(i2\omega_3 t - i2k_3 x)$. Уравнения для амплитуд b_1 , b_2 могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t + c_s \partial/\partial x) b_1 &= \sigma a_1 a_2^* - \beta b_2 b_1^*, \\ (\partial/\partial t + c_s \partial/\partial x + i\delta) b_2 &= \beta b_1^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где β — параметр гидродинамической нелинейности; c_s — скорость ионного звука; $\delta = \omega_3 (k_3 r_D)^2$ — параметр дисперсии звука (r_D — радиус экранирования Дебая). Полагая, что дисперсия достаточно сильна ($\delta > \sigma a_1 \sqrt{c_s/c}$), можно пренебречь генерацией более высоких гармоник звука и, кроме того, считать связь между b_1 и несобственной волной b_2 локальной: $b_2 \approx -i(\beta/\delta) b_1^2$.

Возвращаясь к старым обозначениям ($b_1 = a_3$), получаем следующую систему трехволнового взаимодействия:

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t + c_1 \partial/\partial x) a_1 &= -\sigma a_2 a_3, \\ (\partial/\partial t - c_2 \partial/\partial x) a_2 &= \sigma a_1 a_3^*, \\ (\partial/\partial t + c_3 \partial/\partial x) a_3 &= \sigma a_1 a_2^* - 4i\eta |a_3|^2 a_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где $c_1 \sim c_2 \gg c_3$; $\eta = \beta^2/4\delta$ — коэффициент нелинейной фазовой расстройки.

Задаче о падении плоской волны на безотражательный в линейном приближении плазменный слой соответствуют следующие краевые условия:

$$a_1|_{x=0} = a_0 = \text{const}, \quad a_2|_{x=L} = a_3|_{x=0} = 0. \quad (4)$$

Система (3) с граничными условиями (4) представляет собой модель распределенного параметрического генератора волн a_2 и a_3 . Система неконсервативна из-за притока энергии накачки через границу $x = 0$ и конвективного выноса энергии волн из слоя; ее динамика определяется двумя безразмерными параметрами:

$$\lambda = \Gamma L = (\sigma a_0 / \sqrt{c_2 c_3}) L, \quad (5)$$

$$\alpha = \eta \Gamma c_1 c_2 / c_3 \sigma^2 = \mu \lambda. \quad (6)$$

Параметр λ определяет отношение длины слоя L к характерной длине нелинейного взаимодействия $L_{\text{кр}} \sim \Gamma^{-1}$. Параметр α — нелинейный набег фазы на длине взаимодействия (иногда удобнее пользоваться вместо α перенормированным параметром μ , не зависящим от амплитуды падающей волны и определяемым только нелинейностью среды и длиной слоя).

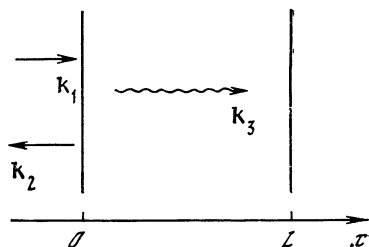


Рис. 1. К задаче о взаимодействии волн в плазменном слое

В достаточно протяженных слоях, когда $\lambda > \pi/2$, волна a_1 параметрически неустойчива по отношению к распаду на волны a_2 и a_3 . Опуская начальную стадию экспоненциального роста a_2 и a_3 из начальных возмущений, перейдем к описанию существенно нелинейных режимов рассеяния, ограничиваясь случаем большой надкритичности ($\lambda \gg 1$).

2. Стационарные режимы рассеяния

Стационарные ($\partial/\partial t = 0$) решения (3) с краевыми условиями (4) выражаются через эллиптические функции Якоби. Не приводя общих довольно громоздких выражений, остановимся лишь на предельных случаях слабых и сильных нелинейных фазовых расстройек.

При $\alpha \ll 1$ амплитуда падающей волны имеет вид [2]

$$|a_1|^2 = a_0^2 \operatorname{dn}^2(\lambda \xi, s), \quad (7)$$

где $\xi = x/L$ — безразмерная координата; s имеет смысл коэффициента нелинейного отражения и определяется из характеристического уравнения $K(s) = \lambda$ ($K(s)$ — полный эллиптический интеграл первого рода).

При $\alpha \gg 1$ [1]

$$|a_1|^2 = a_0^2 \{1 - 1/2 s^2 [1 - \operatorname{cn}(2\lambda \xi, s)]\}, \quad K(\alpha s^2/2) = \lambda. \quad (8)$$

Типичные распределения амплитуд полей в слое приведены на рис. 2 (для низших пространственных мод с одной вариацией). При $\alpha \ll 1$ ($\lambda \gg 1$) имеет место почти 100%-ное нелинейное отражение волны от слоя; характерный масштаб изменения полей порядка $L_{\text{кр}}$. Случай $\alpha \gg 1$, наоборот, соответствует почти полному прохождению волны через слой; амплитуды волн в толще слоя практически не зависят от координат и меняются только в приграничных областях с толщиной порядка $L_{\text{кр}}$. При $\alpha \sim 1$

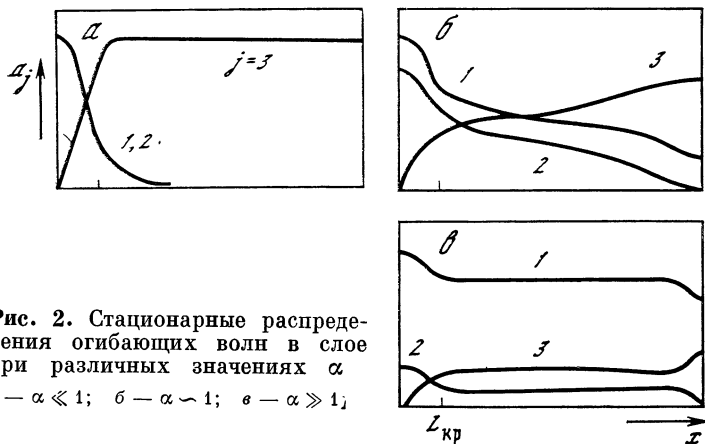


Рис. 2. Стационарные распределения огибающих волн в слое при различных значениях α
 $a - \alpha \ll 1$; $b - \alpha \sim 1$; $c - \alpha \gg 1$

имеет место промежуточная ситуация, когда характерный масштаб изменения полей порядка толщины слоя.

Исследование стационарных решений на устойчивость показывает, что при $\alpha < 1$ устойчива низшая мода с одной пространственной вариацией поля. При $\alpha > 1$ устойчивых стационарных решений не существует и следует ожидать возникновения автомодуляционных режимов генерации волн [1].

3. Солитонная динамика трехволнового взаимодействия

Элементарным динамическим образованием системы (3) в безграничной среде является стационарная волна огибающих, распространяющаяся вдоль оси x со скоростью u ($-c_2 < u < c_3$). Распределение полей в трехволновом солитоне в случае $\alpha = 0$ имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} \sigma a_1 &= \kappa_s (c_2 + u)^{1/2} (c_3 - u)^{1/2} \operatorname{ch}^{-1} (\kappa_s (x - ut)), \\ \sigma a_2 &= \pm \kappa_s (c_1 - u)^{1/2} (c_3 - u)^{1/2} \operatorname{ch}^{-1} (\kappa_s (x - ut)), \\ \sigma a_3 &= \pm \kappa_s (c_1 - u)^{1/2} (c_2 + u)^{1/2} \operatorname{th} (\kappa_s (x - ut)), \end{aligned} \quad (9)$$

где κ_s — свободный параметр, характеризующий ширину и амплитуду солитона. Как видно из (9), высокочастотные волны экспоненциально локализованы в пространстве, а волна параметра имеет форму перепада. В ограниченных системах решения (9) могут существовать только при специальном подборе краевых условий. Однако в слоях, толщина которых много больше критической длины взаимодействия, при произвольных граничных условиях на переходной стадии процесса рассеяния возникают волновые структуры, весьма близкие к (9).

На рис. 3 приведен пример кинограммы переходного процесса ВРМБ в плазменном слое, исследованного численными методами [4]. Из кинограммы видно, что после быстрой нерегулярной стадии переходного процесса, существенно зависящей от начальных условий, устанавливается сравнительно медленная квазирегулярная фаза процесса рассеяния, слабо зависящая от начальных условий. На этой стадии переходного процесса ВР распределения полей близки к совокупности нескольких солитонов. Один из них — пристеночный — покоится, остальные движутся с дозвуковыми скоростями; начальные условия определяют лишь места зарождения солитонов и их скорости (амплитуда и ширина солитона при этом жестко связаны со скоростью: $\kappa_s = \sigma a_0 [c_1 / (c_1 - u) \cdot (c_2 + u) c_3]^{1/2}$, так как все солитоны объединены в слое единым звуком). Квазисолитонная фаза процесса может продолжаться неопределенно долго (пока все подвижные солитоны не достигнут границы и не выветятся), но в конечном счете останется лишь один пристеночный солитон, соответствующий стационарному решению (7) с $s \approx 1$.

Кроме солитонов вида (9), в процессе эволюции системы могут возникать и более сложные структуры — нестационарные перио-

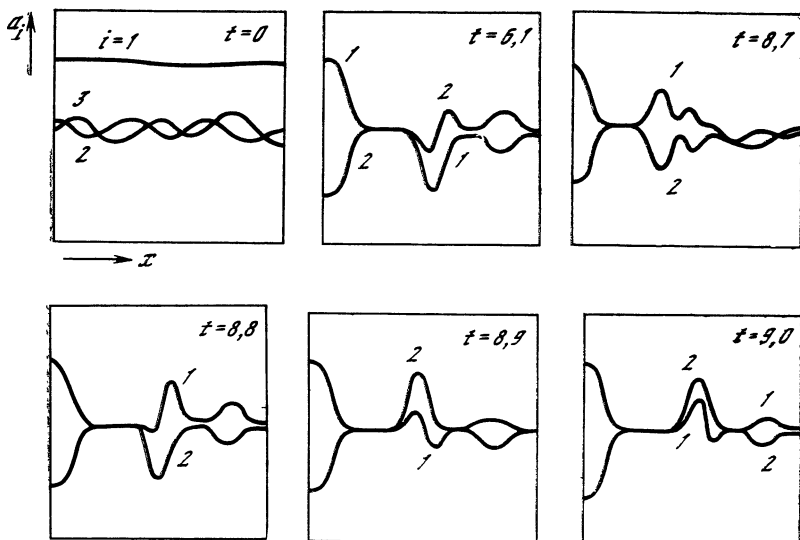


Рис. 3. Пример кинограммы переходного процесса рассеяния

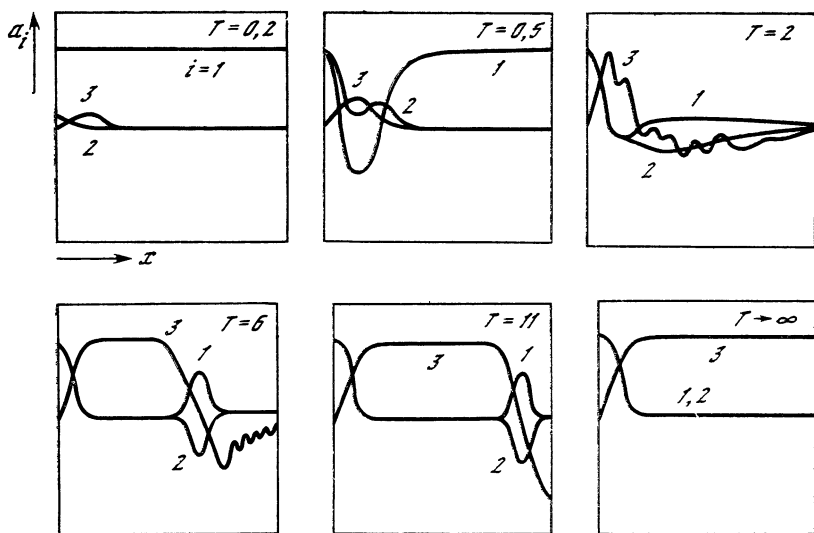


Рис. 4. Рождение осциллирующего солитона на переходной стадии ВРМБ в слое

дические локализованные состояния (осциллирующие солитоны), которые можно интерпретировать как связанные состояния солитонов типа (9). Рис. 4 иллюстрирует образование такого связанного состояния из начального нерегулярного распределения полей.

Солитонные решения (9) и их связанные состояния являются промежуточными асимптотиками; на достаточно протяженных ин-

тервалах времени динамика трехволнового взаимодействия определяется процессами «соударений» (в основном парных) солитонов. Замечательно, что парные столкновения солитонов допускают строгое аналитическое описание.

Приведем простейшее решение (3), описывающее столкновение двух солитонов с одинаковой шириной, движущихся навстречу друг другу из бесконечностей с одинаковыми скоростями u в системе отсчета, где $c_1 = c_2 = c$:

$$\begin{aligned} \sigma a_1 &= \alpha(x, t) / \Delta(x, t), \quad \sigma a_2 = \beta / \Delta, \quad \sigma a_3 = \gamma / \Delta; \\ \alpha &= 2\nu\kappa \left[\sqrt{(c+u)(c_3-u)} \operatorname{sh}(\kappa(x+ut)) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{(c-u)(c_3+u)} \operatorname{sh}(\kappa(x-ut)) \right], \\ \beta &= 2\nu\kappa \left[\sqrt{(c-u)(c_3-u)} \operatorname{ch}(\kappa(x+ut)) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{(c+u)(c_3+u)} \operatorname{ch}(\kappa(x-ut)) \right], \\ \gamma &= \kappa \sqrt{c^2 - u^2} \left\{ \pm \operatorname{ch}(2\kappa x) - v^2 \left[\pm \operatorname{ch}(2\kappa ut) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{c^2 + u^2}{c^2 - u^2} \sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{c_3^2}\right)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Delta = \pm \operatorname{ch}(2\kappa x) + v^2 \left[\pm \operatorname{ch}(2\kappa ut) + \sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{c_3^2}\right)} \right],$$

$$v = (cc_3)^{1/2}/u.$$

Столкновения солитонов не меняют их амплитуды и ширины, но приводят к сдвигам относительно невозмущенного движения и к изменению фазовых соотношений между образующими их волнами. Можно сказать, что при взаимодействии солитоны обмениваются своей внутренней структурой. Взаимодействие солитонов зависит существенным образом от их взаимной полярности; солитон можно характеризовать «зарядом». Заряды солитонов считаются одноименными, если $a_2^{(1)} a_2^{(2)} > 0$, и разноименными, если $a_2^{(1)} a_2^{(2)} < 0$ (фазы комплексных амплитуд $a_2^{(1)}$ и $a_2^{(2)}$ связаны, так как солитоны объединены общим ионным звуком, поэтому можно ввести действительное число — заряд). Одноименные солитоны отталкиваются и при столкновении практически не перекрываются. Разноименные заряды притягиваются и при столкновении проходят друг сквозь друга (во время перекрытия поля имеют довольно сложную структуру, не являющуюся, конечно, суперпозицией солитонов).

Разноименные солитоны могут образовывать связанные состояния — осциллирующие солитоны. Соответствующее решение может быть получено из (10), если положить значение скорости солитонов на бесконечности u равным мнимой величине:

$$\begin{aligned} \alpha &= (2i/v) \sqrt{(c\kappa - i\omega)(c_3\kappa + i\omega)} \operatorname{sh}(\kappa x - i\omega t) + \text{к. с.}, \\ \beta &= (2i/v) \sqrt{(c\kappa + i\omega)(c_3\kappa + i\omega)} \operatorname{ch}(\kappa x - i\omega t) + \text{к. с.}, \end{aligned}$$

$$\gamma = \sqrt{c^2 \kappa^2 + \omega^2} \left\{ -\operatorname{ch}(2\kappa x) + v^{-2} \left[\frac{\kappa^2 c^2 - \omega^2}{\kappa^2 c^2 + \omega^2} R - \cos(2\omega t) \right] \right\}, \quad (11)$$

$$\Delta = -\operatorname{ch}(2\kappa x) - v^{-2} [R - \cos(2\omega t)],$$

где $v = \omega/\kappa\sqrt{cc_3}$; $R = [(1 + \omega^2/c^2\kappa^2)(1 + \omega^2/c_3^2\kappa^2)]^{1/2}$.

На рис. 5 приведена кинограмма осциллирующего солитона. Решение (11) представляет «стоячий» осциллирующий солитон; чтобы получить решение для движущегося объекта со скоростью w , достаточно сделать в (11) преобразования Галилея: $x \rightarrow \tilde{x} + w\tilde{t}$, $t \rightarrow \tilde{t}$, $c_i \rightarrow \tilde{c}_i + w$.

В случае достаточно малых нелинейных фазовых расстройек ($\alpha < 1$) динамика трехволнового взаимодействия на переходной стадии также определяется движением и столкновениями солитонов. Правда, выражения для огибающих волн при этом сложнее — солитоны становятся двухмасштабными:

$$\sigma^2 |a_1|^2 = \kappa_s^2 (c_1 - u)(c_3 - u) \frac{1 - \alpha_s^2}{\operatorname{ch}^2(\kappa_s \sqrt{1 - \alpha_s^2}(x - ut)) - \alpha_s^2},$$

$$\alpha_s = \eta \kappa_s (c_1 - u)(c_2 + u)/\sigma^2 (c_3 - u). \quad (12)$$

При $\alpha_s = 1$ солитон вырождается в алгебраический ($a_{1,2}(x \rightarrow \infty) \sim x^{-1}$); при $\alpha > 1$ солитонная динамика в ограниченном слое невозможна.

4. Автомуляционные режимы взаимодействия волн

Итак, при достаточно больших значениях параметра нелинейной фазовой расстройки ($\alpha > 1$) все стационарные состояния системы (3) неустойчивы; невозможны также квазистационарные динамические режимы солитонного типа. В этих условиях реализуется автомуляционный (автоколебательный) режим взаимодействия волн, который был исследован [5] численными методами. На рис. 6 приведены временные зависимости модуля коэффициента нелинейного отражения от слоя R , иллюстрирующие последовательное усложнение динамики взаимодействия волн с ростом амплитуды накачки. Графики соответствуют различным значениям параметра надкритичности ($a - \lambda = 3$, $b - \lambda = 6$, $e - \lambda = 21$) при постоянном значении параметра μ . При небольших превышениях порога автомуляции реализуются периодические процессы (рис. 6, *a*), сменяемые при увеличении накачки квазипериодическими режимами (рис. 6, *б*). Оба режима характеризуются дискретными спектрами. При достаточно большой амплитуде накачки квазипериодические режимы рассеяния теряют устойчивость и возникает хаотическая динамика (рис. 6, *в*), характеризуемая сплошными спектрами амплитуд взаимодействующих волн и быстро спадающими временными и пространственными корреляциями.

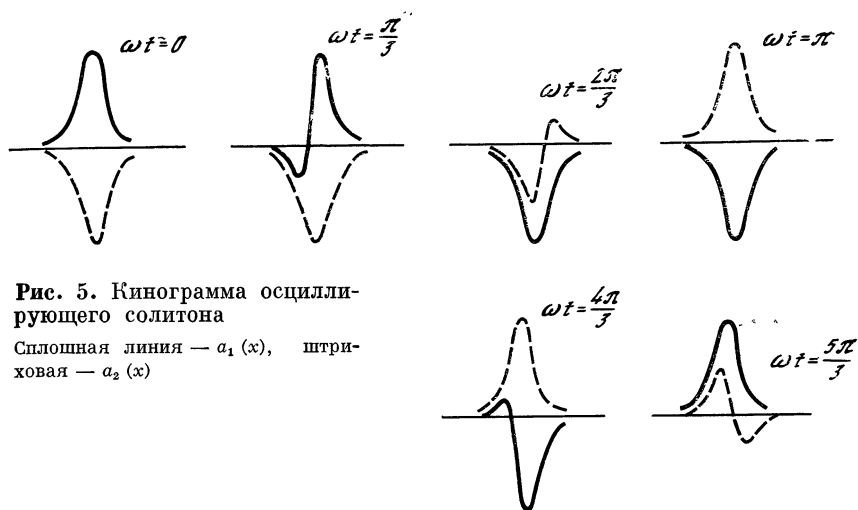


Рис. 5. Кинограмма осциллирующего солитона

Сплошная линия — $a_1(x)$, штриховая — $a_2(x)$

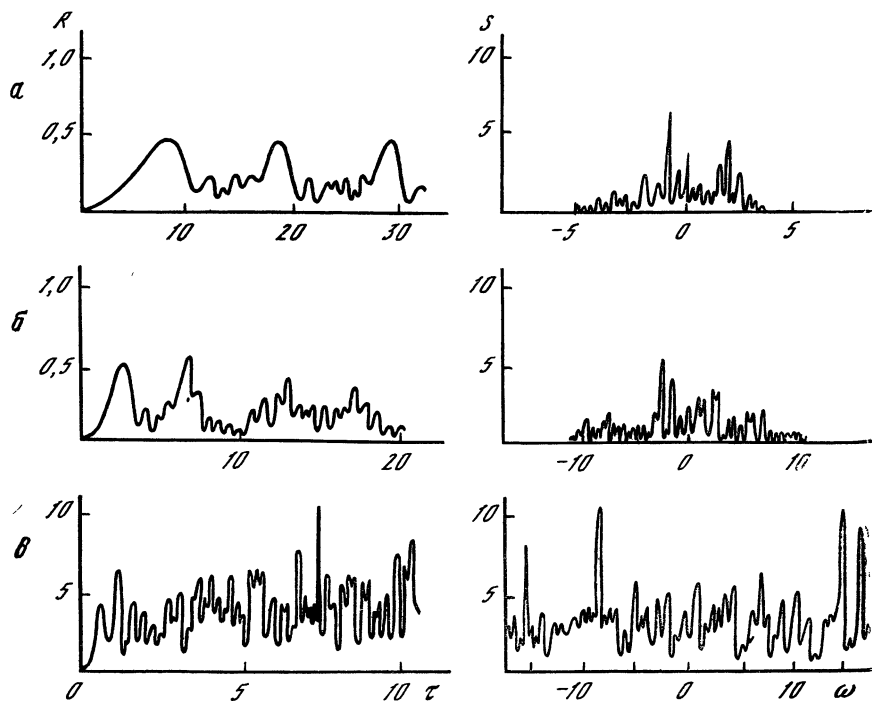


Рис. 6. Зависимости коэффициента отражения от времени и его спектры для периодического (а), квазипериодического (б) и стохастического (в) режимов ВР

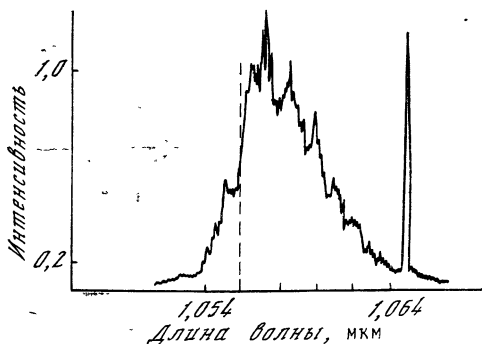


Рис. 7. Спектр рассеянного лазерной плазмой излучения [8]

Узкий пик на 1,064 мкм — калибровочная метка, $\lambda = 1,054$ мкм,
 $I_1 = 10^{16}$ Вт·см $^{-2}$,
 $I_2 = 8 \cdot 10^{14}$ Вт·см $^{-2}$

Наблюдающиеся автомодуляционные режимы являются притягивающими и грубыми [6], их статистические характеристики не зависят от начальных условий и слабо меняются при изменении параметров системы. Такое поведение является характерным для автоколебаний в неконсервативных системах, в которых присутствуют активность и диссипация. В данном случае, как уже отмечалось, распределенная активность и распределенная диссипация отсутствуют, а неконсервативность связана с конвективным выносом и вводом волн. Это обстоятельство расширяет, вообще говоря, класс изученных динамических систем, в фазовом пространстве которых могут существовать странные аттракторы [7].

Таким образом, довольно простые распределенные модели, описывающие взаимодействие волн в ограниченных нелинейных системах, аналогичных рассмотренной в данной работе, могут демонстрировать в зависимости от параметров как высокоорганизованную солитонную динамику, так и хаотическое поведение.

В заключение отметим, что имеются косвенные свидетельства о реализации автомодуляционных режимов ВРМБ в экспериментах с лазерной плазмой. На рис. 7 приведен спектр рассеянного плазмой излучения. Характерное уширение спектра рассеяния и его высокая изрезанность свидетельствуют о том, что в данном эксперименте был реализован автомодуляционный режим ВРМБ, причем параметр нелинейной фазовой расстройки был близок к бифуркационному значению, разделяющему квазипериодические и стохастические режимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курин В. В. Ограничение уровня ВРМБ в плазме вследствие нелинейных фазовых расстройек, возникающих при генерации гармоник ионного звука // Физика плазмы. 1984. Т. 10, № 2. С. 418—424.
2. Кольцугина И. А., Литвак А. Г. О вынужденном комбинационном рассеянии поперечной волны в слое плазмы // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14, № 9. С. 1329—1335.
3. Kurin V. V., Permitin G. V., Petrukhina V. I. A nonlinear stage of three wave interaction in a finite plasma // Proc. XIII Intern. Conf. Phenomena in Ionized Gases. Berlin, 1977. Vol. 2. P. 863—864.

4. *Nozaki K., Tonishi T.* Propagation of solitary pulses in interaction of plasma waves // *J. Phys. Soc. Japan.* 1973. Vol. 34. P. 796—799.
5. *Курип В. В.* Автомодационные режимы ВРМБ в плазме // *Физика плазмы.* 1984. Т. 10, № 4. С. 860—864.
6. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. М.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. С. 1—721.
7. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. С. 1—432.
8. *Turner R. E., Goldman L. M.* Measurements of Brillouin backscatter dependence on density scale lengths near critical density // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 44, N 6. P. 400—403.¹



УДК 517.9

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СИСТЕМ СО СТОХАСТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ

С. П. КУЗНЕЦОВ, А. С. ПИКОВСКИЙ

Введение

В последнее время достигнуты значительные успехи в понимании стохастического поведения динамических систем. Наиболее подробно изучены хаотические режимы в простых системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями или дискретными отображениями. В частности, выявлены и исследованы типичные сценарии перехода от регулярного поведения к хаотическому в простых моделях: через последовательность бифуркаций удвоения периода, перемежаемость, квазипериодический режим [1—6]. В этой связи все большее внимание стали привлекать стохастические режимы в более сложных системах, например в многомерных и распределенных. Здесь можно использовать хорошо известный в теории колебаний методологический прием: если подробно изучена динамика какой-нибудь системы, то, конструируя на ее основе сложные составные модели, можно продвинуться в понимании поведения более широкого класса систем. Например, от гармонического осциллятора мы переходим к связанным осцилляторам, затем к распределенной среде из осцилляторов и изучению волновых процессов.

В данной статье излагаются результаты применения такого подхода к системам со стохастическим поведением. Основное внимание уделяется задаче о переходе к хаосу. Рассматривается взаимодействие двух систем, демонстрирующих переход к хаосу через удвоения периода, и исследуется сплошная среда, составленная из таких систем. Описывается также взаимодействие систем, в каждой из которых переход к хаосу осуществляется через перемежаемость.

1. Взаимодействие двух систем, демонстрирующих переход к хаосу через удвоения периода

Один из наиболее распространенных и, во всяком случае, самый изученный сценарий перехода простых диссипативных систем к хаосу связан с бесконечной последовательностью бифуркаций удвоения временного периода. Как показал М. Фейгенбаум [1, 2], любая система, демонстрирующая этот сценарий, вблизи точки перехода к хаосу (критической точки) характеризуется универсальными свойствами подобия или скейлингом. Он состоит в следующем: если мы изобразим на оси параметра λ , управляющего динамикой системы, области различных режимов, то вся картина областей переходит сама в себя при уменьшении масштаба относительно критической точки в $\delta = 4,6692\dots$ раз с увеличением вдвое временных масштабов движений. Замечательным свойством универсальности является то, что поведение всех таких систем вблизи критической точки можно адекватно описать в деталях с помощью одномерного отображения, зависящего от параметра $u_{n+1} = f(u_n)$ (например, $u_{n+1} = \lambda - u_n^2$).

Рассмотрим систему из двух элементов, каждый из которых описывается одномерным отображением указанного вида. Связь введем наиболее общим способом с помощью функции двух переменных:

$$u_{n+1} = f(u_n) + \varphi(u_n, v_n), \quad v_{n+1} = f(v_n) + \varphi(v_n, u_n). \quad (1)$$

Связь будем считать слабой ($|\varphi| \ll 1$) и потребуем, чтобы она не влияла на динамику при синфазном движении элементов: $\varphi(u, u) = 0$.

Применим к системе (1) тот же аппарат, который позволил Фейгенбауму установить свойства универсальности и подобия в динамике индивидуальных элементов, — метод ренорм-группы (РГ). Первый шаг состоит в получении уравнения РГ. Применяя отображение (1) два раза и изменяя масштаб $u \rightarrow u/a$, $v \rightarrow v/a$, получим отображение того же вида, но с новыми функциями f и φ :

$$u_{n+2} = f_1(u_n) + \varphi_1(u_n, v_n), \quad v_{n+2} = f_1(v_n) + \varphi_1(v_n, u_n). \quad (2)$$

Переход старых функций к новым — это и есть ренорм-преобразование.

Выполняя его N раз, получим функции, определяющие эволюцию системы за 2^N временных шагов. Обозначив пару функций через $G = \{f, \varphi\}$, мы можем записать уравнение РГ в символической форме

$$G_N = R[G_{N-1}]. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что уравнение РГ имеет неподвижную точку, отвечающую невзаимодействующим системам: $G^0 = \{g(u), 0\}$, где

$g(u)$ — введенная Фейгенбаумом функция, получаемая из решения функционального уравнения

$$g(u) = ag(g(u/a)), \quad a = -2,503... \quad (4)$$

Линеаризуем уравнение РГ вблизи этой неподвижной точки, т. е. подставим в (3) решение в виде $G_N = G^0 + \varepsilon H_N$, $\varepsilon \ll 1$. Тогда для H_N получится линейное уравнение $H_N = \widehat{M}H_{N-1}$. Введенное выше условие малости приводит к тому, что линейные уравнения для компонент $H_N = \{h_N, \varphi_N\}$ «расцепляются»:

$$\begin{aligned} h_N(u) &= a [g'(g(u/a)) h_{N-1}(u/a) + h_{N-1}(g(u/a))], \\ \varphi_N(u, v) &= a [g'(g(u/a)) \varphi_{N-1}(u/a, v/a) + \\ &+ \varphi_{N-1}(g(u/a), g(v/a))]. \end{aligned}$$

Если искать решения этих уравнений вида $h_N \sim hv^N$, $\varphi_N \sim \varphi v^N$, то получаем задачу на собственные функции и собственные значения:

$$vh(u) = a [g'(g(u/a)) h(u/a) + h(g(u/a))], \quad (5)$$

$$v\varphi(u, v) = a [g'(g(u/a)) \varphi(u/a, v/a) + \varphi(g(u/a), g(v/a))]. \quad (6)$$

Заметим, что уравнение (5) изучалось Фейгенбаумом [1, 2]. Что касается уравнения (6), то для определения собственных значений достаточно рассмотреть его в области $|u - v| \ll 1$. Тогда $\varphi(u, v) \approx \Phi(u)(u - v)$, и относительно функции Φ получается уравнение, детально проанализированное в [7]. Суммируя результаты анализа уравнений (5) и (6), заключаем, что существенные собственные значения, превышающие по модулю единицу, есть $\delta = 4,6692...$, $\delta_A = a = -2,503...$, $\delta_B = 2$. Соответствующие собственные векторы таковы: $H_0 = \{h, 0\}$, $H_A = \{0, \varphi_A\}$, $H_B = \{0, \varphi_B\}$. Таким образом, эволюция решения уравнения РГ вблизи неподвижной точки за большое число шагов N определяется выражением

$$G_N = G^0 + \Lambda \delta^N H_0 + A \delta_A^N H_A + B \delta_B^N H_B, \quad (7)$$

содержащим три произвольные постоянные: Λ , A и B . Это существенные параметры задачи. Смысл их таков: Λ — это отклонение управляющего параметра точечной системы λ от критического значения $\lambda_{кр}$, A и B — коэффициенты связей двух типов, различающихся трансформационными свойствами по отношению к преобразованию РГ. Можно показать, что параметр B отвечает связи диссипативного, или диффузионного, типа, которая стремится выровнять мгновенные состояния систем; параметр A естественно трактовать тогда как параметр связи инерционного типа.

Итак, если исходное затравочное отображение близко к неподвижной точке G^0 ($u_{n+1} = g(u_n) +$ малая добавка, $v_{n+1} = g(v_n) +$ малая добавка), то форма отображения, описывающего динамику за достаточно большое число итераций, полностью определяется тремя константами: Λ , A , B . Поэтому структура бифуркационных множеств в пространстве этих трех параметров универсальна

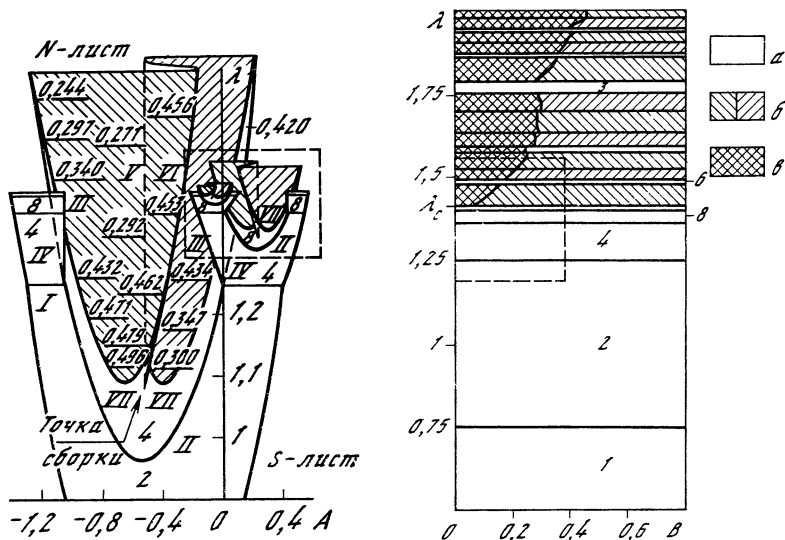


Рис. 1. Поверхность параметров (λ, A) для системы с чистой связью инерционного типа

Многолистность поверхности отражает возможность жестких переходов и гистерезиса. Лист S отвечает синфазным движениям связанных систем, а листы N — несинфазным; светлые области соответствуют устойчивым циклам, период которых указан цифрами. Римскими цифрами отмечены бифуркационные линии: I — линия удвоения периода синфазных циклов; II — линии удвоения периода с мягким рождением несинфазного цикла, по которым склеены S - и N -листы; III — края S -листа, при пересечении которых происходит перескок на N -лист; IV — края N -листов, при пересечении которых происходит перескок на S -лист; V, VI — линии складок на N -листах, сходящиеся в точках сборки; VII — линия бифуркаций Андронова—Хопфа (указаны числа вращения для рождающегося квазипериодического аттрактора)

Рис. 2. Плоскость параметров (λ, B) для системы с чистой связью диссипативного типа

a — области устойчивости синфазных циклов (цифры означают их период); b — зоны синфазных хаотических колебаний; e — области несинфазных режимов

и не зависит от конкретного вида добавок в затравочном отображении. Эта структура обладает свойством масштабной инвариантности и переходит сама в себя при изменении параметров Λ, A и B в δ, δ_A и δ_B раз и удвоении временного масштаба соответствующих режимов.

Хотя РГ-анализ не дает информации о конкретных режимах динамики связанных систем, из него вытекает, что для их исследования можно рассмотреть любую конкретную модель, лишь бы она допускала независимое управление тремя указанными параметрами. Рассмотрим следующую систему:

$$\left\| \begin{array}{l} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{array} \right\| = \hat{l} \left\| \begin{array}{l} \lambda - u_n^2 + A(1 - 0,176u_n)(u_n - v_n) \\ \lambda - v_n^2 + A(1 - 0,176v_n)(v_n - u_n) \end{array} \right\|,$$

$$\hat{i} = \left\| \begin{array}{cc} 1 - B & B \\ B & 1 - B \end{array} \right\|. \quad (8)$$

Специальный вид уравнений выбран с той целью, чтобы фигурирующие здесь параметры A и B точно соответствовали введенным при РГ-анализе.

Поскольку изобразить структуру трехмерного пространства параметров трудно, ограничимся двумя его сечениями: (λ, A) и (λ, B) (рис. 1, 2). В зависимости от траектории движения в пространстве параметров возможны различные бифуркации: удвоения периода без потери или с потерей синфазного характера колебаний подсистем, жесткие бифуркации рождения квазипериодических движений. Хорошо видна отмечавшаяся выше масштабнo-инвариантная структура пространства параметров.

2. Динамика одномерной распределенной среды, построенной из точечных систем, способных демонстрировать удвоения периода

Существует множество ситуаций, когда распределенную среду можно рассматривать как набор элементов, каждый из которых может претерпевать переход к хаосу через последовательность удвоений временного периода. В качестве примеров таких сред укажем распределенные экологические популяции, химические реакции, цепочки нелинейных радиотехнических осцилляторов [8]. Ясно, что динамика такой среды определяется способом введения связи между элементами. Как следует из разд. 1, можно ожидать существования двух универсальных типов связи. Однако, как будет видно ниже, каждый из них может осуществляться двумя способами — симметричным (правый и левый соседи действуют на данный элемент одинаково) и антисимметричным (правый и левый соседи действуют в противофазе).

Пусть состояние среды задается функцией пространственной координаты $u(x)$, а эволюция во времени определяется нелинейным оператором \hat{F} :

$$u_{n+1}(x) = \hat{F}[u_n]. \quad (9)$$

Будем считать, что при действии на не зависящее от x состояние u оператор $\hat{F}u$ сводится к функции $f(u)$, например $f(u) = \lambda - u^2$. Следуя схеме Фейгенбаума, проведем РГ-анализ задачи.

Применим уравнение (9) два раза и в полученном соотношении выполним масштабное преобразование S , изменив масштаб по u в a раз и масштаб по x в b раз:

$$Su(x) = au(bx). \quad (10)$$

В результате получим новый оператор \hat{F}_1 :

$$u_{n+2}(x) = \hat{F}_1(u_n), \quad \hat{F}_1 = S\hat{F}\hat{F}S^{-1} \equiv R[\hat{F}].$$

Процедура нахождения оператора \hat{F}_1 по исходному оператору \hat{F} и есть операция РГ-преобразования. Повторяя ее N раз, получим оператор \hat{F}_N , определяющий эволюцию системы за 2^N временных шагов. Он выражается из рекуррентного уравнения

$$\hat{F}_N = R [\hat{F}_{N-1}], \quad (11)$$

которое и представляет собой уравнение РГ.

Как и раньше, найдем сначала неподвижную точку уравнения РГ. Пусть затравочный оператор имеет следующий частный вид: $\hat{F} = \hat{l}f$, где f — нелинейная функция, зависящая от параметра λ , а \hat{l} — линейный оператор, определяемый выражением

$$\hat{l}u(x) = \int L(\xi) u(x - \xi) d\xi,$$

где ядро L подчинено требованиям симметрии ($L(\xi) = L(-\xi)$), нормировки ($\int L(\xi) d\xi = 1$) и локальности ($\int \xi^2 L(\xi) d\xi = 2D^2$). Тогда можно показать, что при критическом значении параметра $\lambda_{кр}$ и выборе масштабных констант $a = -2,503\dots$, $b = \sqrt{2}$ последовательность операторов \hat{F}_N имеет регулярный предел \hat{G} . Оператор \hat{G} является неподвижной точкой уравнения РГ (11) и поэтому не зависит от конкретного выбора f и \hat{l} в затравочном операторе. Это значит, что оператор \hat{G} универсален. Если рассматривать его действие только на слабонеоднородные состояния, то можно написать его явный вид:

$$\hat{G}[u] = \exp\left(D^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) g(u). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь решение уравнения РГ в окрестности неподвижной точки, т. е. положим $\hat{F}_N = \hat{G} + \varepsilon \hat{H}_N$, $\varepsilon \ll 1$. Тогда из (11) можно получить для \hat{H}_N линейное уравнение, структура которого такова: $\hat{H}_N = \hat{M}[\hat{H}_{N-1}]$. Асимптотика решения при больших N определяется собственными векторами оператора \hat{M} , собственные числа которых превышают по модулю единицу. Их оказывается четыре:

$$v_0 = \delta = 4,6692\dots, \quad v_1 = a/\sqrt{2} = -1,770\dots,$$

$$v_2 = \sqrt{2} = 1,4142\dots, \quad v_3 = a/2 = -1,251\dots$$

Поэтому оператор эволюции за 2^N шагов выражается следующим образом:

$$\hat{F}_N = \hat{G} + \Lambda \delta^N \hat{h}_0 + \alpha v_1^N \hat{h}_1 + \beta v_2^N \hat{h}_2 + \gamma v_3^N \hat{h}_3. \quad (13)$$

Это соотношение содержит четыре произвольных параметра Λ , α , β , γ . Как и раньше, Λ характеризует отклонение параметра λ от критического значения; величины α , β , γ задают характер связи между пространственными элементами среды. Если положить $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то получается система с симметричной диффузион-

ной связью между точечными элементами. Коэффициенты α и γ управляют соответственно антисимметричной и симметричной инерционной связями, а коэффициент β — антисимметричной диффузионной связью. Отметим, что ренормализационные константы ν_i отличаются от полученных в разд. 1 констант δ_A и δ_B вследствие перенормировки пространственной переменной.

Следующий шаг состоит в том, чтобы изучить, какие режимы поведения реализуются в среде при различных значениях параметров Λ , α , β , γ . Для этого можно использовать любую конкретную модель среды исследуемого класса, допускающую управление всеми четырьмя параметрами, например

$$u_{n+1, m} = \hat{l}(\beta) \{ \lambda - u_{n, m}^2 + (1 - 0,176u_{n, m}) \times \\ \times [\alpha(u_{n, m+1} - u_{n, m-1}) + \gamma(u_{n, m+1} - 2u_{n, m} + u_{n, m-1})] \}, \quad (14) \\ \hat{l}(\beta) = 1/3 [(1 + \beta)u_{m+1} + u_m + (1 - \beta)u_{m-1}].$$

Здесь индекс m отвечает пространственной координате, n — дискретное время. Вид уравнения подобран так, чтобы смысл входящих в него параметров соответствовал проведенному РГ-анализу. Граничные условия на концах среды будем задавать в виде

$$u_{n, 0} = \text{const}, \quad u_{n, L} = \text{const}, \quad (15)$$

что соответствует закрепленным концам. Здесь L — длина системы.

Обсудим сначала простейший случай среды с симметричной диффузионной связью ($\alpha = \beta = \gamma = 0$).

Если среда безгранична, то динамика определяется единственным параметром λ . При $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$ реализуются устойчивые пространственно-однородные состояния, временной период которых удваивается при тех же значениях λ , как и в точечной системе. При $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$ возникает пространственно-временной хаос, причем радиус корреляции вблизи критической точки подчиняется универсальному закону

$$r \sim (\lambda - \lambda_{\text{кр}})^{-\kappa}, \quad \kappa = \lg \sqrt{2} / \lg \delta. \quad (16)$$

Соотношение (16) следует из сформулированных выше свойств подобия оператора эволюции: при приближении λ к критической точке в δ раз пространственный масштаб возникающих в среде образований должен возрасти в $\sqrt{2}$ раз.

Рассмотрим теперь систему большой, но конечной длины L с закрепленными концами:

$$u_0 = \text{const}, \quad u_L = \text{const}.$$

В этом случае задача содержит два существенных параметра: λ и LD^{-1} . В докритической области при увеличении λ происходят последовательные бифуркации удвоения временного периода, сначала практически при тех же значениях λ , что и в точечной (или бесконечной однородной) системе. При этом структура распределения поля по длине такова.



Рис. 3. Зависимость относительной интенсивности спектральных компонент, возникающих после n -й бифуркации удвоения, от безразмерной координаты $y = xD^{-1}2^{-n/2}$

В середине имеется протяженный участок пространственной однородности, а вблизи границ — области неоднородности («хвосты»). При каждом удвоении периода длина хвостов возрастает в $b = \sqrt{2}$ раз. Наблюдается подобие хвостов, возникающих при последовательных удвоениях (рис. 3), что связано, разумеется, со свойством подобия оператора эволюции. После достаточно большого числа удвоений периода длина хвостов возрастает настолько, что хвосты, простирающиеся от левой и правой границ в глубь среды, начинают перекрываться. При этом наступает существенное отклонение бифуркационных значений λ от соответствующих значений точечной системы. В дальнейшем удвоения продолжают, но уже в таких условиях, когда характерный пространственный масштаб, связанный с оператором эволюции за период цикла, превышает длину системы. При этом система ведет себя как сосредоточенная, и бифуркационные значения λ даются формулой Фейгенбаума $\lambda_n = \lambda_{кр} - K\delta^{-n}$, $\delta \simeq 4,6692$, константы K и $\lambda_{кр}$ теперь другие, нежели в точечной системе. Картина бифуркационных линий на плоскости параметров $(\Lambda, D/L)$ показана на рис. 4. В соответствии с результатами РГ-анализа она подчиняется закону подобия:

$$\Lambda_n = \delta^{-n} \Psi\left(\frac{D}{L} 2^{n/2}\right),$$

где Ψ — универсальная функция.

Перейдем к изучению влияния дополнительных типов связи α , β , γ на динамику среды (14). Чтобы облегчить анализ и изложение, будем включать эти типы по отдельности и рассмотрим только систему асимптотически большой длины, задавая граничные условия в форме (15) (будем выбирать длину системы L настолько

большой, чтобы она не влияла на бифуркационные значения остальных параметров).

1. $\alpha \neq 0$. На рис. 5 показана структура плоскости параметров (λ, α) вблизи критической точки $(\lambda_{кр}, 0)$. Характер режимов и бифуркаций проиллюстрирован на рис. 6 с помощью пространственно-временных диаграмм. Заметим, что переходы, отмеченные на рис. 5 буквами *a* и *b*, связаны не с потерей устойчивости однородного состояния, а со сменой характера неустойчивости с конвективной на абсолютную (переход *a* отвечает удвоению временного периода, а переход *b* — возникновению бегущих волн). Внешне они выглядят как изменение направления движения по среде волны переключения, разделяющей два разных режима (см. рис. 6, *a*, *b*). Эти переходы характеризуются необычным сочетанием свойств мягких и жестких бифуркаций: они сопровождаются конечным изменением состояния среды, однако гистерезис отсутствует. В этом проявляется специфика распределенной среды. Что касается линии *e*, то при приближении к ней из области бегущих волн период этих волн, возникающих у левого края среды и уходящих направо, стремится к бесконечности. После перехода через линию волны более не испускаются и среда остается в состоянии с удвоенным временным периодом (см. рис. 6, *e*).

2. $\beta \neq 0$. Структура плоскости параметров (λ, β) показана на рис. 7, а пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие характер различных режимов, — на рис. 8. Система обозначений та же, что и на рис. 5, 6. На линии, обозначенной буквой *a*, реализуется переход к пространственно однородному режиму с удвоенным временным периодом, аналогичный рассмотренному в предыдущем пункте (см. рис. 6, *a*). При переходе через линию a_1 вновь возникающий режим также имеет удвоенный временной период, но обладает сложной пространственной структурой, зависящей от того, в какой точке линии осуществляется переход (рис. 8, *a*). Вблизи *b* (слева от нее) у левого края среды возникает осциллирующий в пространстве хвост, затухающий в глубь среды. При приближении к этой линии декремент затухания уменьшается и длина хвоста стремится к бесконечности. После перехода реализуется состояние, являющееся пространственно периодическим вдали от края среды; временной период остается неизменным (рис. 8, *b*).

3. $\gamma \neq 0$. На рис. 9 показана плоскость параметров (λ, γ) , рис. 10 иллюстрирует динамику среды в разных областях. Большая светлая область в центре рис. 9 отвечает пространственно однородному (вдали от краев среды), периодическому во времени режиму. При выходе из этой области через верхнюю горизонтальную границу происходит удвоение временного периода с сохранением пространственной однородности (рис. 10, *a*). При выходе через участок боковой границы *b* возникает пространственно неоднородный режим типа стоячих волн с удвоенным временным периодом (рис. 10, *b*). Этот переход мягкий, гистерезис отсутствует. При

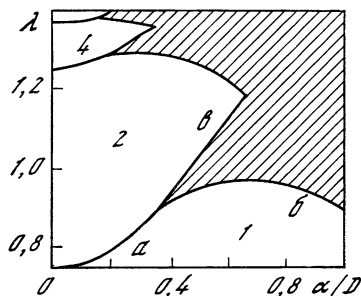
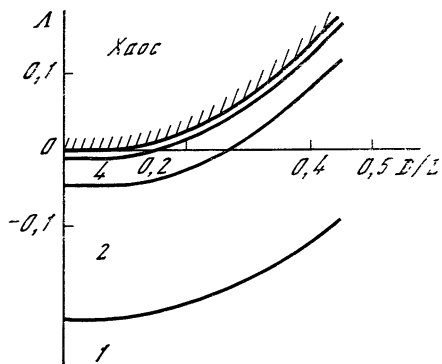


Рис. 4. Плоскость параметров пространственно ограниченной среды с симметричной диффузионной связью ($\alpha = \beta = \gamma = 0$)

Цифры 1, 2, 4 обозначают области существования циклов соответствующих периодов

Рис. 5. Плоскость параметров среды с закрепленными концами при наличии симметричной диффузионной и антисимметричной инерционной связей ($\alpha \neq 0$, $\beta = \gamma = 0$, $L \rightarrow \infty$)

Светлые области соответствуют пространственно однородным режимам, временной период которых указан цифрами; заштрихована область существования бегущих волн

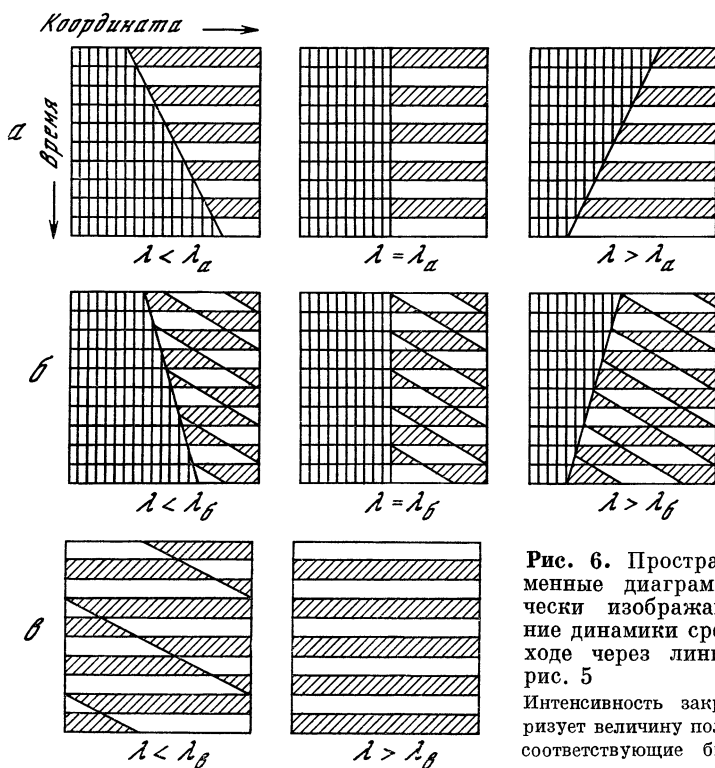
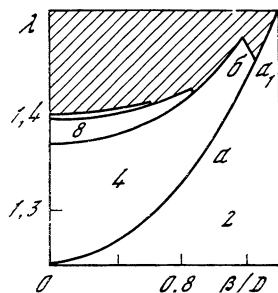


Рис. 6. Пространственно-временные диаграммы, схематически изображающие изменение динамики среды при переходе через линии a, b, c на рис. 5

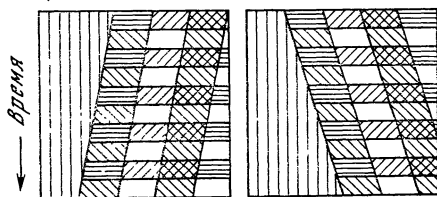
Интенсивность закрашки характеризует величину поля u ; λ_a, b, c — соответствующие бифуркационные значения параметра λ !

Рис. 7. Плоскость параметров среды с закрепленными концами при наличии симметричной и антисимметричной диффузионных связей ($\alpha = 0, \beta \neq 0, \gamma = 0, L \rightarrow \infty$)

Светлые области соответствуют пространственно однородным, а заштрихованные — неоднородным режимам



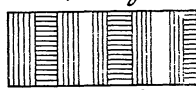
Координата →



$\lambda < \lambda_{a_1}$ $\lambda > \lambda_{a_1}$



$\lambda < \lambda_b$

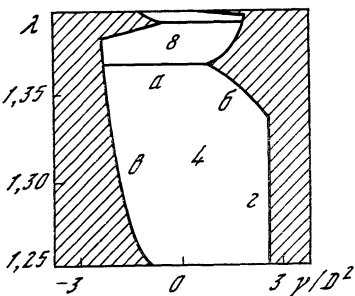


$\lambda > \lambda_b$

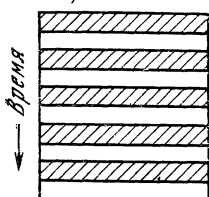
Рис. 8. Пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие изменение динамики среды при переходе через линии a_1 и b на рис. 7. Интенсивность окраски характеризует величину поля u

Рис. 9. Плоскость параметров среды при наличии симметричных диффузионной и инерционной связей ($\alpha = \beta = 0, \gamma \neq 0, L \rightarrow \infty$)

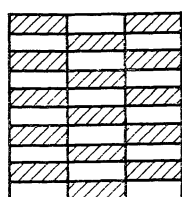
Светлые области соответствуют пространственно однородным режимам, а темные — неоднородным режимам стоячих волн



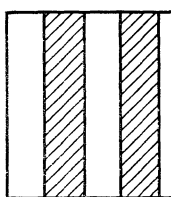
а
Координата →



б



в



г

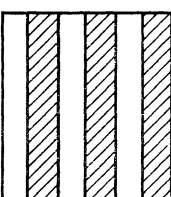


Рис. 10. Пространственно-временные диаграммы режимов, реализующихся при выходе из области устойчивости однородного режима через линии a, b, v, z на рис. 9

Временной шаг на всех картинках одинаков и равен периоду исходного режима; окраска отражает разную интенсивность поля u

пересечении границ v и z жестким образом возникают более коротковолновые пространственные стоячие структуры (рис. 10, v , z), при этом имеет место сильный гистерезис.

Обратим внимание, что на всех приведенных рисунках хорошо виден скейлинг: структура областей многократно воспроизводится в уменьшающихся масштабах при приближении к критической точке $(\lambda_{кр}, 0, 0, 0)$. Это вытекает из соотношения (13), которое не меняется при замене $N \rightarrow N + k$, $\Lambda \rightarrow \Lambda \delta^{-k}$, $\alpha \rightarrow \alpha v_1^{-k}$, $\beta \rightarrow \beta v_2^{-k}$, $\gamma \rightarrow \gamma v_3^{-k}$. Поэтому в точках пространства параметров $(\Lambda \delta^{-k}, \alpha v_1^{-k}, \beta v_2^{-k}, \gamma v_3^{-k})$ реализуются такие же динамические режимы, как и в точке $(\Lambda, \alpha, \beta, \gamma)$, но с увеличенным в 2^k раз временным и в $2^{k/2}$ раз пространственным масштабами.

3. Взаимодействие двух систем, демонстрирующих переход к хаосу через перемежаемость

Одним из распространенных сценариев возникновения хаоса является переход через перемежаемость, когда после потери устойчивости периодического движения появляется стохастический режим, в котором относительно кратковременные стадии хаотической динамики (турбулентные) перемежаются длительными стадиями почти периодического движения (ламинарными). Мы рассмотрим перемежаемость двух типов (I и III) по классификации И. Помо и П. Манневилла [3]. Бифуркация, которая приводит к перемежаемости I типа, состоит в том, что устойчивый предельный цикл сливается с неустойчивым и исчезает. В случае перемежаемости III типа в устойчивый цикл «влипает» неустойчивый цикл удвоенного периода. В обоих случаях после бифуркации в фазовом пространстве возникает область, через которую изображающая точка путешествует очень долго (тем дольше, чем мы ближе к точке бифуркации), что соответствует ламинарным стадиям. Затем система уходит в удаленные области фазового пространства, где динамика является сложной и неустойчивой по отношению к возмущению начальных условий (турбулентная стадия). Для реализации перемежаемости необходимо, чтобы потом изображающая точка обязательно возвращалась и вновь попадала в область ламинарных движений.

Так же как и переход через удвоения периода, при описании динамики систем, демонстрирующих перемежаемость, можно использовать одномерные отображения, а также выявить свойства универсальности и подобия на основании метода РГ. В формулировке работ [4, 5] РГ-анализ по существу повторяет по форме фейгенбаумовский, отличаясь только характером дополнительных условий, налагаемых на функцию g при нахождении неподвижной точки уравнения РГ (4). Так, для перемежаемости I типа $a = 2$, $g(u) = u(1 - u)^{-1}$; для перемежаемости III типа $a = \sqrt{2}$, $g(u) = u(1 - u^2)^{-1/2}$. Таким образом, переходя к изу-

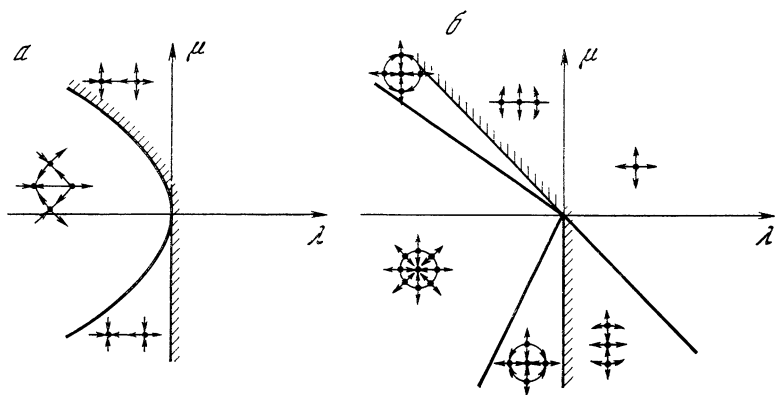


Рис. 11. Бифуркационные диаграммы для взаимодействия двух систем с перемежаемостью I типа (а) и III типа (б)

Линия перехода заштрихована

чению связанных систем, демонстрирующих переход через перемежаемость, мы можем использовать те же формулы, что и в разд. 1, подставляя в них соответствующие выражения для $g(u)$ ¹.

Для перемежаемости I типа уравнения (5) и (6) принимают вид

$$\nu h(u) = 2h\left(\frac{u}{2-u}\right) + 2\frac{u}{(2-u)^2}h\left(\frac{u}{2}\right), \quad (17)$$

$$\nu\varphi(u) = \frac{4}{(2-u)^2}\varphi\left(\frac{u}{2-u}\right) + \frac{(2-u)^2}{4(1-u)^2}\varphi\left(\frac{u}{2}\right). \quad (18)$$

Отыскивая решения $h, \varphi \sim c_0 + c_1u + c_2u^2 + \dots$, находим собственные значения $\nu_1 = 4$ для уравнения (17) и $\nu_2 = 2$ для уравнения (18). Остальные собственные значения не превосходят по модулю единицу и поэтому несущественны. Аналогичный расчет для перемежаемости III типа дает три существенных собственных значения: $\nu_1 = 2$ для возмущений типа h и $\nu_2 = 2, \nu_3 = \sqrt{2}$ для возмущений типа φ .

Таким образом, в случае перемежаемости I типа следует учитывать лишь один тип взаимодействия между связанными системами. Всего существенных параметров два: λ (бифуркационный параметр точечной системы) и μ (параметр связи). Плоскость параметров (λ, μ) должна обладать вблизи точки $(0, 0)$ масштабно-инвариантной структурой, которая переходит в себя при изменении λ в 4 раза и μ в 2 раза. Для перемежаемости III типа надо рассматривать два типа взаимодействия, характеризуемого параметрами μ_1 и μ_2 , т. е. анализировать трехмерное пространство параметров (λ, μ_1, μ_2) . Оно также имеет масштабно-инвариантную

¹ Соотношения, получаемые при РГ-анализе перехода через перемежаемость, относятся к ламинарным стадиям. Что касается турбулентных стадий, то при анализе малой окрестности критической точки зависимость динамики от параметра на этих стадиях можно пренебречь.

структуру, переходящую в себя при изменении масштабов по осям координат соответственно в 2, 2 и $\sqrt{2}$ раз.

Конкретные бифуркационные диаграммы («циферблаты») показаны на рис. 11. Из рис. 11, а видно, что в системе связанных элементов, демонстрирующих перемежаемость I типа, включение связи делает возможной потерю устойчивости с разрушением симметрии через перемежаемость III типа. Для возникновения перемежаемости в связанных системах, как и в индивидуальных элементах, обязательным является условие возвращаемости траекторий в область потерявшего устойчивость регулярного режима.

Заключение

РГ-анализ оказался мощным инструментом для изучения динамики связанных систем и распределенных сред, построенных из элементов, демонстрирующих переход к хаосу. Он показывает, что закономерности универсальности и подобия при переходе к хаосу свойственны не только индивидуальным элементам, но проявляясь также и при взаимодействии этих элементов. Применительно к распределенным средам РГ-анализ выявляет принципиально важный новый тип скейлинговых закономерностей при возникновении динамического хаоса — подобие пространственно-временных структур, формирующихся в среде на пути к хаосу. Представляет очевидный интерес дальнейшее развитие предложенного нами подхода (см. также [9—11]), в частности обобщение анализа на двумерные и трехмерные среды, поиск установленных универсальных закономерностей в конкретных системах, в том числе в эксперименте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feigenbaum M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1978. Vol. 19, N 1. P. 25—52.
2. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. 1983. Т. 141, № 2. С. 343—374.
3. Pomeau Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // Commun. Math. Phys. 1980. Vol. 74, N 2. P. 189—197.
4. Hu B., Rudnick J. Exact solution to the Feigenbaum renormalization-group equations for intermittency // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48, N 24. P. 1645—1648.
5. Hirsh J. E., Nauenberg M., Scalapino D. Intermittency in the presence of noise: a renormalization group formulation // Phys. Lett. A. 1982. Vol. 87, N 8. P. 391—393.
6. Jensen M. H., Bak P., Bohr T. Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems // Ibid. 1984. Vol. 30, N 4. P. 1960—1981.
7. Кузнецов С. П. О модельном описании цепочки связанных динамических систем вблизи точки перехода порядок—беспорядок // Изв. вузов. Физика. 1984. Т. 27, № 6, С. 87—96.
8. Кузнецов С. П., Пиковский А. С. Универсальность бифуркаций удвоения периода в одномерной диссипативной среде // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 3. С. 308—319.
9. Pikovsky A. S. On the interaction of strange attractors // Ztschr. Phys. B. 1984. Bd. 55, N 2. S. 149—154.

10. Кузнецов С. П. Бифуркации удвоения периода в простой модели рас-
пределенной системы // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 11.
С. 1364—1368.
11. Кузнецов С. П. Универсальность и подобие в поведении связанных
систем Фейгенбаума // Там же. 1985. Т. 28, № 8. С. 991—1007.



УДК 537.86 : 530.1б

БИФУРКАЦИИ И АВТОВОЛНЫ

Б. А. МАЛОМЕД

Введение

Нелинейные волновые режимы в неравновесных средах, называемые обычно автоволнами, составляют основу процессов самоорганизации в многочисленных физических, химических и биологических активных системах [1]. С общей точки зрения автоволны можно разделить на два обширных класса — жесткие и мягкие — в соответствии с условиями их возбуждения из однородного стационарного состояния системы. Если стационарное состояние сохраняет локальную устойчивость и для возбуждения автоволны требуется конечное (жесткое) возмущение, такая автоволна сразу имеет достаточно большую амплитуду и сильно ангармоничную форму. Противоположным является случай мягкого возбуждения, когда квазигармонические автоволны малой амплитуды рождаются в результате бифуркации, сопровождающей потерю устойчивости стационарного состояния. В данной работе будут рассматриваться только квазигармонические автоволновые режимы.

Согласно [2—5], автоволны малой амплитуды описываются в наиболее общем случае системой нелинейных эволюционных уравнений параболического типа

$$u_t = f(u, \nabla u) + D_1 \Delta u + D_2 \Delta^2 u, \quad (1)$$

где u — набор локальных кинетических переменных (скорости течения, концентрация, температура и т. д.); ∇ и Δ — соответственно градиент и лапласиан; D_1 и D_2 — постоянные матрицы; f — полиномиальные функции, описывающие локальные кинетические свойства системы. Более привычным является частный случай уравнений (1), соответствующий реакционно-диффузионным системам [6], когда $D_2 = 0$ и функции f не зависят от градиентов. Уравнения (1) общего вида возникают как уравнения типа Гинзбурга—Ландау, описывающие вторичные автоволны [4, 5], например волны искривления на фронте волны горения или детонации, представляющей собой первичную автоволну [2]. Обычно функции f и матрицы D_1, D_2 зависят от некоторого параметра R (например, от чисел Рейнольдса или Рэля в гидродинамических задачах), характеризующего скорость диссипации свободной энергии в соответствующей физической системе. Бифуркация проис-

ходит при значении $R = R_c$, когда однородное стационарное состояние, описываемое тривиальным решением $u = 0$ системы (1), теряет устойчивость к малым возмущениям вида

$$u \sim \exp(\Gamma t + i\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad (2)$$

где Γ — инкремент; \mathbf{k} — волновой вектор возмущения.

Как отмечалось в предыдущих обзорах [3—5], можно выделить несколько универсальных типов бифуркаций, каждый из которых встречается в системах совершенно различной физической природы, допускающих, однако, единое математическое описание в слаборадикальной области $0 < (R - R_c)/R_c \ll 1$ (возможно, впервые вопрос о построении универсальной классификации бифуркаций обсуждался в [7]). Принадлежность бифуркации в конкретной системе к какому-либо типу определяется рядом качественных свойств системы. Одно из этих свойств является линейным: имеет ли неустойчивость длинно- или коротковолновый характер, т. е. возникает ли она впервые при нулевом или конечном значении k . Как будет показано далее, фактически есть несколько различных типов длинноволновой неустойчивости. Важно также, обладает ли система пространственной (линейной) дисперсией, т. е. различно ли от нуля (d^2/dk^2) $\text{Im}\Gamma(k)$ в области волновых чисел, где $\text{Re}\Gamma(k) > 0$.

Нарастание неустойчивости ограничивается нелинейными (квадратичными или кубическими) членами в уравнении (1). Вид возникающих в результате бифуркации автоволн существенно зависит от того, какие именно нелинейные члены играют основную стабилизирующую роль. Кроме того, характер бифуркации зависит от наличия нелинейной дисперсии, т. е. зависимости частоты колебаний от их амплитуды.

В работе рассматриваются некоторые новые результаты исследования бифуркаций общего вида в системах различной пространственной размерности. Более ранние результаты можно найти, в частности, в обзорных статьях [2—5], которые существенно дополняются оригинальными работами [8—20].

1. Коротковолновая аperiodическая бифуркация

Данная бифуркация играет важную роль в теории конвекции [19, 20] и во многих других задачах [17, 18]. В одномерном случае универсальную роль играет уравнение [17, 18]

$$u_t + u + (2 + \lambda^2)u_{xx} + u_{xxx} + (4/3)u^3 = 0, \quad (3)$$

где $\lambda^2 \ll 1$ — бифуркационный параметр. Тривиальное решение $u = 0$ неустойчиво к малым возмущениям с волновыми числами, лежащими в узкой области:

$$(k^2 - 1)^2 \leq \lambda^2. \quad (4)$$

Здесь мы изложим общие результаты, относящиеся к двумерному случаю, который оказывается значительно более интересным

и важным с точки зрения физических приложений, чем одномерный.

В двумерном случае условие (4) выделяет на плоскости волновых векторов узкое кольцо ширины λ . Эволюционное уравнение удобно при этом записывать не в координатном представлении, как (3), а для фурье-образа функции $u(\mathbf{r})$. В отличие от одномерного случая в двумерном квадратичная нелинейность в эволюционном уравнении не сводится к некоторой эффективной кубичной. По этой причине в двумерном случае отсутствует строго универсальное уравнение типа (3). Однако можно вывести «полууниверсальное» уравнение, охватывающее все задачи, в которых квадратичная нелинейность фигурирует с малым коэффициентом (это условие выполняется почти всегда в теории конвекции):

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{k}) = \varepsilon^2(k) U(\mathbf{k}) - \frac{\alpha}{2} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) U(\mathbf{k}_1) U(\mathbf{k}_2) - \frac{4}{3} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \mu(\theta) U(\mathbf{k}_1) U(\mathbf{k}_2) U(\mathbf{k}_3). \quad (5)$$

Здесь $\varepsilon^2 = \lambda^2 - (k^2 - 1)^2$; интегрирование идет по области (4); α в соответствии со сказанным выше — малый параметр (в общем случае малость α не связана с малостью λ^2); μ — матричный элемент эффективного нелинейного взаимодействия мод, зависящий фактически только от одного угла θ (угла раствора ромба, образованного векторами $\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$), что отмечено в (5).

Уравнение (5) имеет пространственно-периодические стационарные двумерные решения различных типов. Во-первых, это квазиодномерные решения (валы по терминологии теории конвекции [19]), имеющие в координатном представлении вид

$$u = \varepsilon(q) \cos(qx), \quad (6)$$

где принято нормировочное условие $\mu(0) = 1$. Во-вторых, имеются решения, описывающие решетку из ромбических ячеек

$$u = A_1 \cos(\mathbf{q}_1 \mathbf{r}) + A_2 \cos(\mathbf{q}_2 \mathbf{r}); \quad (7)$$

здесь

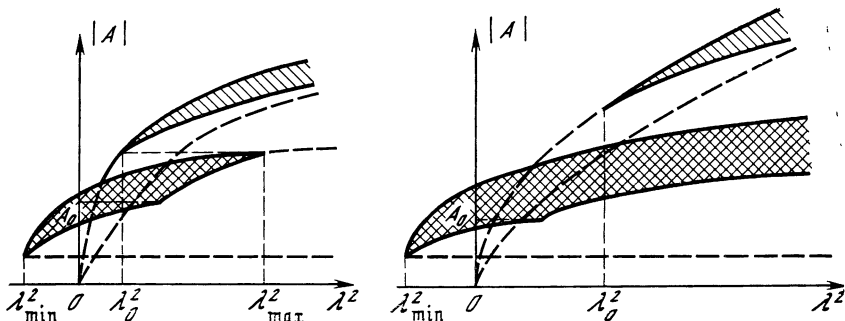
$$A_{1,2}^2 = [\varepsilon(q_{1,2}^2) - 2\mu(\theta_0) \varepsilon(q_{2,1}^2)] / [1 - 4\mu^2(\theta_0)]; \quad (8)$$

θ_0 — угол между векторами \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 ($\theta_0 \neq \pi/3$). Наконец, решение третьего типа описывает решетку из гексагональных ячеек

$$u = A \sum_{n=1}^3 \cos(\mathbf{q}_n \mathbf{r}), \quad (9)$$

где \mathbf{q}_n — три равных по модулю вектора, образующих между собой углы $2\pi/3$, а общая амплитуда трех гармоник равна

$$A = -[\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 16[1 + 4\mu(\pi/3)]\varepsilon^2(q)}] / \{4[1 + 4\mu(\pi/3)]\}. \quad (10)$$



«Фазовые диаграммы» двумерных структур, порождаемых коротковолновой аperiodической бифуркацией

Слева — $\mu(\pi/3) > 1/2$; справа — $\mu(\pi/3) \leq 1/2$

Основной интерес представляет вопрос об устойчивости решений (6)–(10). Для решений максимальной амплитуды ($\lambda^2 = \epsilon^2$, т. е. $q^2 = 1$) этот вопрос исследован довольно давно [19]. Для решений с $0 < \epsilon^2 < \lambda^2$ результаты были недавно получены автором совместно с М. И. Трибельским (аналогичные результаты были независимо получены А. А. Непомнящим) [27].

Необходимые условия устойчивости для валов (6) и ромбических решений (7), (8) имеют соответственно следующий вид:

$$\mu(\theta) > 1/2 \quad \text{и} \quad \mu(\theta_0) < 1/2.$$

Таким образом, эти условия являются взаимоисключающими: если устойчивы валы, то неустойчивы все ромбические решетки, и если устойчива решетка хотя бы с одним θ_0 , то неустойчивы валы. Что касается гексагонов, то они могут сосуществовать как с валами, так и с ромбами. Полный критерий устойчивости для всех перечисленных решений может быть дан в явной аналитической форме, однако более наглядно графическое представление в виде «фазовых диаграмм» на рисунке, где на плоскости «амплитуда—надкритичность» двойной и одинарной штриховкой покрыты области, занятые соответственно устойчивыми гексагонами и валами либо ромбами. Границы областей существования неустойчивых решений всех типов показаны жирными штриховыми линиями.

Как видно из выражения (10), гексагоны возникают в подкритической области (т. е. при отрицательных λ^2) в точке

$$\lambda^2 = \lambda_{\min}^2 \equiv -[1 + 4\mu(\pi/3)]^{-1} (\alpha^2/16).$$

При $\mu(\pi/3) > 1/2$ область устойчивости гексагонов заканчивается в точке

$$\lambda^2 = \lambda_{\max}^2 \equiv (1/2) [\mu(\pi/3) + 1] [2\mu(\pi/3) - 1]^{-2} \alpha^2,$$

и при $\lambda^2 > \lambda_{\max}^2$ устойчивыми могут быть только валы. В обратном

случае ($\mu (\pi/3) \leq 1/2$) область устойчивости гексагонов не ограничена справа. Отметим, что в любом случае нижняя граница области устойчивости гексагонов имеет излом в точке $|A| = A_0 \equiv \equiv \alpha/[8\mu (\pi/3)]$.

Решения в виде валов и ромбов формально имеют мягкий режим возбуждения, как видно из выражения (6) и рисунка. Однако устойчивые валы и ромбы существуют лишь с не слишком малыми амплитудами в областях $\lambda^2 \geq \lambda_0^2$, где для валов

$$\lambda_0 = (1/2) [2\mu (\pi/3) - 1]^{-1},$$

а для квадратов ($\theta_0 = \pi/2$)

$$\lambda_0 = (1/2) \sqrt{1 + 2\mu (\pi/2)} \{2[\mu (\pi/3) + \mu (\pi/6) - \mu (\pi/2)] - 1\}^{-1} \alpha.$$

Можно также исследовать в трехмодовом галеркинском приближении устойчивость валов и гексагонов к конечным возмущениям и найти сепаратрисы, разделяющие области притяжения решений двух типов.

В заключение этого раздела сделаем некоторые замечания. Если в эволюционном уравнении доминирует не кубичная, а квадратичная нелинейность, его решения оказываются совершенно иными. Например, уравнение

$$u_t + u + (2 + \lambda^2) \Delta u + \Delta^2 u + (\nabla u)^2 = 0,$$

играющее важную роль в теории газового горения, вообще не имеет устойчивых стационарных решений на неограниченной плоскости, и в описываемой им системе реализуется, по-видимому, стохастическая динамика [24].

Трехмерный случай не имеет смысла в теории конвекции и горения, однако он представляет интерес с точки зрения реакционно-диффузионных систем. Соответствующее эволюционное уравнение имеет вид

$$u_t + u + (2 + \lambda^2) \Delta u + (\alpha/2) u^2 + (4/3) u^3 = 0, \quad (11)$$

где, как и в выражении (5), λ^2 и α считаются независимыми малыми параметрами. Квазиодномерные валы (6) и гексагоны (9), (10) устойчивы как решения трехмерного уравнения (11). Помимо них есть еще собственно трехмерное решение, описывающее тетраэдрическую структуру:

$$u = A \sum_{n=1}^6 \cos(\mathbf{q}_n \mathbf{r}), \quad A = - [\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 60\epsilon^2 (q^2)}] / 30, \quad (12)$$

где \mathbf{q}_n — шесть векторов равной длины, образующих правильный тетраэдр. Отметим, что тетраэдры, подобно гексагонам, возникают жестко в подкритической области при $\lambda^2 = -\alpha^2/60$. Существует еще мягко возбуждаемая трехмерная структура в виде решетки из кубических ячеек, однако она всегда неустойчива, в то время как тетраэдрическая структура устойчива.

2. Длинноволновая колебательная бифуркация

В конкретных задачах часто встречается длинноволновая бифуркация, описываемая нестационарным уравнением Гинзбурга—Ландау

$$u_t = u - |u|^2 u + i\alpha |u|^2 u + \Delta u + i\beta \Delta u. \quad (13)$$

Эта бифуркация хорошо исследована [8, 9, 11, 12]. Очевидными решениями уравнения (13) являются плоские волны

$$u = \sqrt{1 - q^2} \exp \{i [\alpha - (\alpha + \beta) q^2] t + iqx\}, \\ 0 \leq q^2 < 1. \quad (14)$$

Полные условия устойчивости решений (14) найдены в работе [8]. В двумерном случае важную роль играют вращающиеся спиральные волны

$$u = a(r) \exp \{i [\omega t + N\theta + \varphi(r)]\}, \quad (15)$$

где r и θ — полярные координаты; N (целое число) — топологический заряд [2] (число «рук» спирали). Асимптотическое радиальное волновое число $k = \lim_{r \rightarrow \infty} (d\varphi/dr)$ в отличие от волнового числа

q плоской волны (14) определено однозначно, т. е. является собственным значением задачи. Аналитическое выражение для k , справедливое при условиях $\alpha^2 \ll 1$, $\beta^2 \ll 1$, найдено в работе [9]. Представляет значительный интерес задача о взаимодействии плоской и спиральной волн. Недавно автором был получен результат, согласно которому это взаимодействие приводит к стационарному дрейфу спирали со скоростью $V = |\alpha + \beta| (q^2 - k^2)/q$ (при условии $k^2 < q^2 \ll 1$) [24].

В задачах физики плазмы встречаются длинноволновые колебательные неустойчивости с иной зависимостью инкремента от волнового числа. Примером является токово-диссипативная неустойчивость замагниченной неоднородной плазмы [22, 23]. С учетом результатов работы [23] соответствующее уравнение типа Гинзбурга—Ландау в слаборадкритической области можно представить в следующем виде:

$$u_t = -|u|^2 u + i\alpha |u|^2 u - Vu_x - iu_x + u_{xx}, \quad (16)$$

где координата x направлена вдоль магнитного поля, чем объясняется отсутствие симметрии относительно изменения знака x (плазма неоднородна в одном направлении поперек магнитного поля). Легко заметить, что преобразование $u = \exp(iy/2) U(t, y)$, где $y = x - Vt$, переводит уравнение (16) в (13), т. е. токово-диссипативная неустойчивость фактически не порождает бифуркацию нового типа.

С методической точки зрения представляет интерес рассмотреть бифуркацию, описываемую следующим уравнением (его линейная часть воспроизводит неустойчивость, совпадающую по форме с дрейфово-диссипативной неустойчивостью замагниченной неоднородной плазмы [25]):

$$u_t = -u_{xx} - u_{xxxx} - |u|^2 u + i\alpha |u|^2 u. \quad (17)$$

Простейшими нетривиальными решениями уравнения (17) являются плоские волны

$$u = k \sqrt{1 - k^2} \exp \{i [(\alpha - \beta) k^2 - \alpha k^4] t + ikx\}. \quad (18)$$

Полные условия устойчивости волн (18) являются весьма громоздкими. Поэтому приведем здесь только необходимые условия:

$$2(7 + 4\alpha^2)k^4 - (8\alpha^2 + 15)k^2 + 3 + 2\alpha^2 \leq 0; \quad (19)$$

$$k^2 \geq (4 - \sqrt{6})/20.$$

Более сложные одномерные решения вида

$$u = a(x - Vt) \exp \{i[\omega t + \varphi(x - Vt)]\} \quad (20)$$

описывают локализованную стационарную структуру (вообще говоря, движущуюся с постоянной скоростью), испускающую в обе стороны бегущие волны (18) (ведущий центр [6]). Скорость V и частота ω выражаются через асимптотические волновые числа $k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_x$ следующим образом:

$$\omega = \alpha k_1 k_2 (k_1^2 + k_2^2 + k_1 k_2 - 1), \quad V = \alpha (k_1 + k_2) (k_1^2 + k_2^2 - 1). \quad (21)$$

Здесь предполагается, что k_1 и k_2 удовлетворяют условиям (19). Отметим, что уравнение (13) также имеет устойчивые решения вида (20), однако в отличие от рассматриваемых здесь решений они описывают структуру, поглощающую, а не излучающую бегущие волны [11].

3. Коротковолновая колебательная бифуркация

Колебательная неустойчивость к малым возмущениям с конечной длиной волны известна в теории детонации и теории безгазового горения (соответствующие ссылки можно найти в [12, 13]). Такой же характер имеет конвективная неустойчивость проводящей жидкости в магнитном поле, а также вращающейся жидкости [26]. В одномерном случае данная бифуркация подробно изучена в [10, 12, 13]. В работах [12, 13] получено общее уравнение типа Гинзбурга—Ландау для этой бифуркации:

$$u_t = -u - (2 + \lambda^2) \Delta u - \Delta^2 u - |u|^2 u - \mu |\nabla u|^2 u - \theta (\nabla u)^2 u^* + i\alpha |u|^2 u + i\nu |\nabla u|^2 u + i\eta (\nabla u)^2 u^*. \quad (22)$$

Наиболее простое одномерное решение имеет вид монохроматической бегущей волны

$$u = \sqrt{(\lambda^2 - 4k^2)/(1 + \mu - \theta)} \exp \{i[(1 + k)x + \omega t]\}; \quad (23)$$

здесь $\omega = (\lambda^2 - 4k^2) (\alpha + \nu - \eta) / (1 + \mu - \theta)$ и предполагается $1 + \mu - \theta > 0$, $k^2 \leq \lambda^2/4$. При выполнении условий $3\theta + 1 - \mu > 0$, $1 + \theta > 0$ решение (23) устойчиво в области волновых чисел

$$-\text{const} \cdot \lambda \leq k \leq \text{const} \cdot \lambda, \quad (24)$$

где const довольно громоздким образом выражается через коэффициенты уравнения (22) [12, 13]. Более сложно устроены решения, описывающие модулированные волны:

$$u = \exp [i(kx + \omega t)] \{a \sin [(1 + q)x + \chi t] + ib \cos [(1 + q)x + \chi t]\}, \quad (25)$$

где амплитуды a и b и частоты ω и χ однозначно выражаются через k и q [12, 13]. Для устойчивости всех модулированных волн (25) необходимо условие $\mu - 1 - 3\theta \geq 0$, противоположное условию устойчивости монохроматических волн (23). При этом область устойчивости имеет в отличие от (24) вид $|k|, |q| \lesssim \lambda^2$.

Более подробное исследование решений (23)–(25) изложено в работах [12, 13]. Здесь приведем прежде всего новые результаты относительно устойчивости указанных решений к двумерным (поперечным) возмущениям. Так же как в аналогичной задаче [19, 20] для квазиодномерных структур (6), порождаемых коротковолновой аperiодической бифуркацией, условие устойчивости для квазиодномерных волн (23) записывается так:

$$\lambda^2 - 4k \leq 0. \quad (26)$$

С учетом малости λ^2 выражение (26) означает, что от интервала устойчивости (24) остается правая половина: $\lambda^2/4 \leq k \leq \text{const} \cdot \lambda$. Что касается модулированных волн (25), для них критерий устойчивости к поперечным возмущениям имеет вид, аналогичный (26): $\lambda^2 - 4(q - |k|) \leq 0$. Ввиду отмеченной выше узости областей устойчивости решений (25), это условие может привести в зависимости от значений параметров уравнения (22) к неустойчивости части или всех модулированных волн.

Помимо квазиодномерных волн, значительный интерес представляют двумерные решения в виде вращающихся спиральных волн, аналогичные (15) [24]:

$$u = a(r) \exp \{i[\omega t + N\theta + r + \varphi(r)]\}, \quad (27)$$

где подразумевается, что $(d\varphi/dr)^2 \ll 1$ при $r \rightarrow \infty$ (ср. (23)). По аналогии с теорией, развитой в [9] для спиральных волн, описываемых уравнением (13), решение (27) следует искать методом сшиваемых асимптотических разложений, предполагая параметры α и β малыми. В данной задаче естественно выделяются внутренняя и внешняя области: $r \ll \lambda^{-1}$ и $r \gg \lambda^{-1}$. Во внутренней области решение определяется «квадрированным» уравнением Бесселя

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + r^{-1} \frac{d}{dr} + 1 - N^2 r^{-2}\right)^2 u = 0, \quad (28)$$

а во внешней области асимптотические уравнения в частном случае ($\beta = 0$) при любых N совпадают с уравнениями из работы [9], где следует формально положить $N = 1/2$. Несложный анализ показывает, что оба асимптотических решения можно гладко сшить в области их перекрытия лишь для трех значений:

$$N = 0, \quad N = 1, \quad N = 2. \quad (29)$$

В общем случае ($\beta \neq 0$) решение во внешней области можно построить при дополнительных условиях $\beta^2 \ll \alpha^2$, $\beta^2 \ll \lambda^4$. При этом для построения решения во внешней области в ней необходимо выделить два слоя ($\lambda^{-1} \ll r \ll \beta^{-1}$ и $r \gg \beta^{-1}$), внутри которых строятся отдельные асимптотические разложения. Сшивка с внутренним решением по-прежнему возможна лишь для N , определенных в (29), и для всех трех значений N асимптотическое радиальное волновое число одинаково:

$$k = \lim_{r \rightarrow \infty} (d\varphi/dr) = -\beta/(4\alpha). \quad (30)$$

Здесь видно существенное отличие от спирального решения уравнения (13), которое существует для всех N , причем для $N \geq 1$ волновое число k зависит от N [9], а для $N = 0$ (когда спираль заменяется системой концентрических волн) k является произвольным параметром. Отметим, что согласно выражениям (26) и (30) спиральная волна (27) может быть устойчива только в случае $k > > 0$, т. е. $\beta/\alpha \leq 0$.

Можно рассмотреть спиральные волны более общего вида, которые при $r \rightarrow \infty$ асимптотически совпадают с модулированной волной (25). Такое решение содержит два асимптотических волновых числа k и q и два целых числа M и N (числа «рук» основной и огибающей спиралевидных волн). Аналогично (29) регулярное решение может существовать лишь для $|M| + |N| \leq 2$, т. е. для значений $(M, N) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, -1), (0, 2), (2, 0)$.

Переходя к трехмерному случаю, отметим прежде всего, что все рассмотренные двумерные решения допускают очевидное трехмерное обобщение [5]:

$$u(t, r, \theta, z) = \exp(ikz) v(t, r, \theta),$$

где z — третья координата и подразумевается $k^2 \ll 1$. Двумерные решения с $N = 1$ и $N = 2$ переходят в решения с вращающейся геликоидальной поверхностью равных фаз, а решения с $N = 0$ — в решения с движущимися вдоль оси z коническими поверхностями равных фаз.

Большой интерес представляет сферически-симметричное решение [24]

$$u = a(r) \exp\{i[\omega t + r + \varphi(r)]\}. \quad (34)$$

Во внутренней области уравнение (28) заменяется на

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + 2r^{-1} \frac{d}{dr} + 1\right)^2 u = 0. \quad (32)$$

Сшивка решения уравнения (32) с асимптотическим решением, справедливым во внешней области, приводит к выводу о том, что, так же как и в случае уравнения (13), асимптотическое волновое число решения (31) является произвольным параметром.

В заключение отметим, что уравнение (22) допускает инволюцию: если $u(\alpha, \beta, \eta, v, r, t)$ есть некоторое его решение, функция $u^*(-\alpha, -\beta, -\eta, -v, r, t)$ также будет решением. Нетрудно убедиться, что любому дву- или трехмерному решению, групповая скорость которого направлена наружу, инволюция сопоставляет решение с групповой скоростью, направленной внутрь, и наоборот. Таким образом, в отличие от случая, описываемого уравнением (13), когда решение с $N \geq 1$ может быть только «излучателем» бегущих волн, а решение с $N = 0$ — только «поглотителем» (так же как и сферически-симметричное решение), в данном случае решение любого типа может описывать как «излучатель», так и «поглотитель».

ЛИТЕРАТУРА

1. Self-organization. Autowaves and structures far from equilibrium / Ed V. I. Krinsky. Berlin etc.: Springer, 1984. 264 p.
2. Зельдович Я. Б., Маломед В. А. Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 6. С. 591—618.
3. Жаботинский А. М., Маломед В. А. Бифуркации и диссипативные структуры в распределенных кинетических системах // Модели механики сплошной среды. Новосибирск: ИПТМ СО АН СССР, 1983. С. 83—90.
4. Malomed B. A., Zhabotinsky A. M. Bifurcations in distributed kinetic systems // Synergetics. Tallinn: Valgus Publ., 1983. P. 217—226.
5. Malomed B. A., Zhabotinsky A. M. Bifurcations and dissipative structures in distributed kinetic systems // Nonlinear and turbulent processes in physics / Ed. by R. Z. Sagdeev. N.Y.: Harwood Acad. Publ., 1984. Vol. 2. P. 881—894.
6. Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974. 178 с.
7. Ortoleva P., Ross J. On variety of wave phenomena in chemical reactions // J. Chem. Phys. 1974. Vol. 60, N 12. P. 5090—5107.
8. Stuart J. T., DiPrima R. C. The Eckhaus and Benjamin — Feir resonance mechanisms // Proc. Roy. Soc. London A. 1978. Vol. 362. P. 27—41.
9. Hagan P. S. Spiral waves in reaction-diffusion equations // SIAM J. Appl. Math. 1982. Vol. 42, N 4. P. 762—786.
10. Livshits M. A. Chemical waves as a result of instability in reaction-diffusion systems // Ztschr. Phys. 1983. Bd. 53, N 1. S. 83—88.
11. Malomed B. A. Nonsteady waves in distributed dynamical systems // Physica D. 1983. Vol. 8, N 3. P. 353—359.
12. Маломед В. А. Пульсирующие автоколебательные волны // ЖТФ. 1984. Т. 54, № 2. С. 233—240.
13. Malomed B. A. Nonlinear waves in nonequilibrium systems of the oscillatory type. I, II // Ztschr. Phys. 1984. Bd. 55, N 3. S. 241—248; S. 249—256.
14. Malomed B. A., Staroselsky I. E. Two-dimensional quasiharmonic dissipative structures in gas flames and their stability // Phys. Lett. A. 1983. Vol. 99, N 4. P. 143—144.
15. Malomed B. A., Staroselsky I. E. Stability of two-dimensional quasiharmonic dissipative structures // Ibid. P. 145—146.
16. Маломед В. А., Старосельский И. Е. Слабонадркритические диссипатив-

ные структуры на искривленных поверхностях // ПММ. 1984. Т. 48, № 6. С. 942—949.

17. Маломед Б. А., Трибельский М. И. Высшие бифуркации в распределенных кинетических системах с аperiодической неустойчивостью // ДАН СССР. 1984. Т. 275, № 6. С. 1363—1367.
18. Malomed B. A., Tribelsky M. I. Bifurcations in distributed kinetic systems with aperiodic instability // Physica D. 1984. Vol. 14, N 1. P. 67.
19. Busse F. S. Nonlinear properties of thermal convection // Rep. Progr. Phys. 1978. Vol. 41, N 12. P. 1929—1967.
20. Кузнецов А. Е., Спектор М. Д. О слабонадкритической конвекции // ЖПМТФ. 1980. № 2. С. 262—270.
21. Sivashinsky G. I. Instabilities, pattern formation and turbulence in flames // Annu. Rev. Fluid Mech. 1983. Vol. 15. P. 179—199.
22. Кадомцев Б. Б. Турбулентность плазмы // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 188—339.
23. Simon A., Shiau L. N. Quasilinear theory of the positive column spiral instability // Phys. Fluids. 1969. Vol. 12, N 12. P. 2630—2637.
24. Маломед Б. А. К теории спиральных и концентрических волн в активных средах // ДАН СССР. 1986. Т. 291, № 2. С. 327—332.
25. Shukla P. K., Yu M. Y., Rahman H. U., Spatschek K. H. Nonlinear convective motions in plasmas // Phys. Rep. 1984. Vol. 105, N 4/5. P. 228—328.
26. Chandrasekhar R. D. Hydrodynamic and hydromagnetic instabilities. Oxford: Clarendon press, 1961. 652 p.
27. Маломед Б. А., Трибельский М. И. Об устойчивости стационарных слабонадкритических структур в конвекции и родственных задачах // ЖЭТФ. 1987. Т. 92, № 2. С. 539—548.



УДК 530.18

СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ АКТИВНЫХ СРЕДАХ

В. А. ДАВЫДОВ, А. С. МИХАЙЛОВ

Введение

Распределенная активная среда состоит из связанных между собой автоколебательных, триггерных или возбудимых (моностабильных) элементов. К каждому из элементов подводится энергия от внешнего источника, благодаря чему компенсируются диссипативные потери при прохождении в среде волн. Известно, что в распределенных активных средах могут возникать однородные и неоднородные колебания, возбуждаться бегущие без затухания импульсы и нелинейные волны или же образовываться сложные стационарные диссипативные структуры [1—4]. Особым типом элементарных возбуждений в двумерных активных средах служат вращающиеся спиральные волны (рис. 1). Подобно вихрям в сверхпроводнике или сверхтекучей жидкости, они обладают ненулевым топологическим зарядом и являются устойчивыми образованиями.

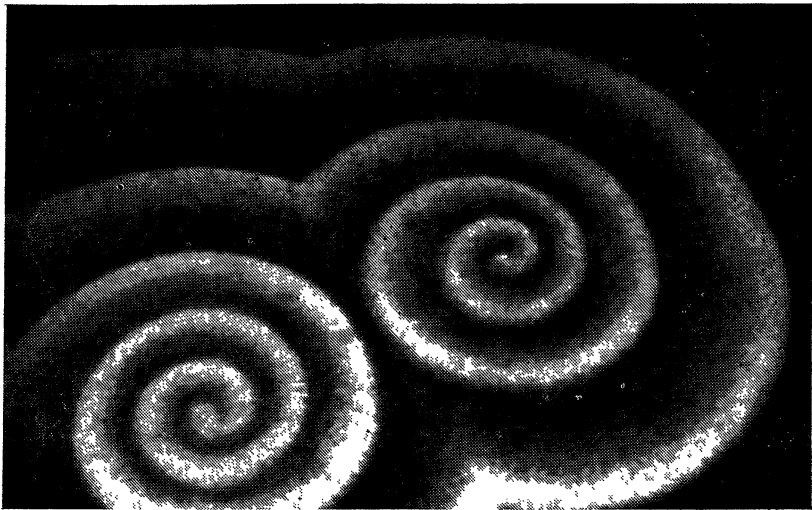


Рис. 1. Спиральные волны в среде с химической реакцией Белоусова—Жаботинского

Спиральные волны рождаются парами (с противоположным направлением вращения) из разрывов фронта плоских волн возбуждения. Частота всех спиральных волн в среде одинакова и служит фундаментальной характеристикой активной среды.

При столкновении двух волн возбуждения в активной среде происходит их взаимное погашение. Благодаря этому наиболее быстрый периодический источник автоволн подавляет все более медленные источники. Спиральная волна является наиболее быстрым из автономно действующих источников: ее частота выше, чем у ведущего центра (автоволнового источника с нулевым топологическим зарядом). На рис. 1 отчетливо показаны вращающиеся спиральные волны в среде с химической реакцией Белоусова—Жаботинского. Популярный обзор свойств спиральных волн в различных активных средах можно найти в работе [5]. В настоящей статье главное внимание будет уделено методам расчета основных характеристик этих автоволновых источников.

1. Активные среды

Приведенное выше определение активной среды является самым общим. Практически, однако, на сегодняшний день лучше всего изучены процессы в таких активных средах, где элементы связаны между собой по диффузионному закону. Подобные среды описываются параболическими нелинейными «уравнениями с реакцией и диффузией» вида

$$\dot{W} = F(W) + \hat{D}\Delta W, \quad (1)$$

в которых W — вектор с несколькими компонентами, а \widehat{D} — матрица диффузионных коэффициентов¹.

Наиболее проста ситуация, когда есть всего одна компонента, так что (1) сводится к уравнению

$$\dot{u} = f(u) + D\Delta u. \quad (2)$$

Если функция $f(u)$ имеет вид, показанный на рис. 2, то среда обладает тремя однородными состояниями: $u = u_1$, $u = u_2$, $u = u_3$, из которых устойчивыми по отношению к малым возмущениям являются состояния u_1 и u_3 . Лишь одно из этих состояний, однако, является абсолютно устойчивым (второе из них метастабильно). Если $A > 0$, где

$$A = \int_{u_1}^{u_3} f(u) du, \quad (3)$$

то абсолютно устойчиво состояние $u = u_3$. В этом случае по среде могут распространяться волны перехода из состояния u_1 в u_3 (рис. 3, а). В обратной ситуации, когда $A < 0$, состояние u_3 метастабильно и при распространении волны осуществляется переход из u_3 в u_1 (рис. 3, б).

Уравнения вида (2) описывают процессы различной природы, и в том числе распространение волн горения. Их подробное исследование проведено в работах Я. Б. Зельдовича с сотр. (см., например, [6]). Известно, что при распространении волны перехода сохраняются профиль волны и скорость ее движения. Они однозначно определяются характеристиками самой среды и не зависят от начальных условий.

Теперь несколько модифицируем уравнение (2), добавив вторую компоненту — «концентрацию ингибитора» v :

$$\dot{u} = f(u) - v + D\Delta u, \quad \varepsilon^{-1}\dot{v} = [v - v(u)], \quad (4)$$

где $v(u)$ — монотонно возрастающая функция u , а параметр ε мал ($\varepsilon \ll 1$). Ограничимся обсуждением случая, когда имеется всего одно однородное устойчивое состояние среды, т. е. она является возбудимой. Нуль-изоклины такой системы (4) без диффузии показаны на рис. 4.

Уравнения (4) имеют одномерное решение (рис. 5) в виде уединенного бегущего импульса [7—9]. На профиле импульса можно выделить области резкого фронта и спада (шириной порядка единицы), где происходит быстрое изменение переменной u , которую ниже мы иногда условно будем называть «температурой», а также области более медленного изменения: вершину импульса и следующий за ним «хвост» (шириной порядка ε^{-1}). «Концентрация ингибитора» v не совершает быстрых изменений:

¹ Совершенно не обязательно, чтобы в активной среде происходил физический процесс диффузии. Диффузионная связь между элементами осуществляется при теплопроводности; ее можно также реализовать и в сети, построенной из электрических автогенераторов.

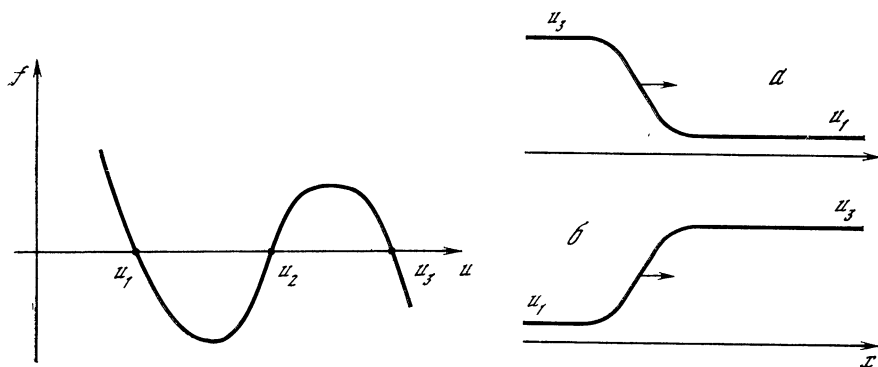


Рис. 2. К уравнению (2)

Рис. 3. Распространение волн перехода при $A > 0$ (а) и $A < 0$ (б)

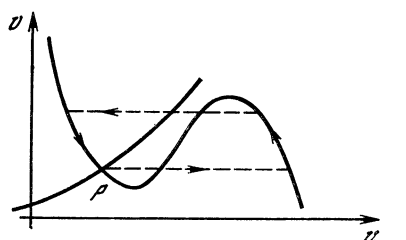


Рис. 4. Нуль-изоклины возбудимой активной среды

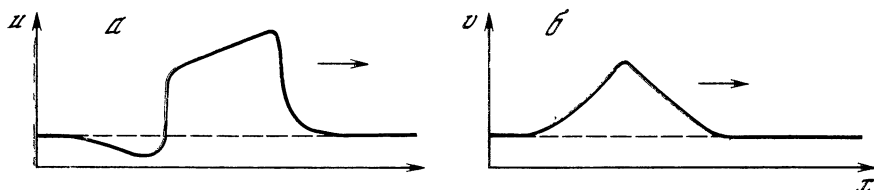


Рис. 5. Уединенный бегущий импульс в возбудимой активной среде
а, б — соответственно профили изменения концентраций активатора и ингибитора вдоль направления распространения

она медленно возрастает при прохождении вершины импульса, а затем плавно спадает до стационарного значения.

Фронт и спад импульса — это фактически две волны перехода (загорания и гашения), движущиеся одна за другой с одинаковой скоростью. Гашением и загоранием управляет медленно меняющаяся величина v . При малых концентрациях ингибитора он не способен предотвратить загорания. После того как загорание произошло и температура u резко повысилась, концентрация ингибитора v возрастает и, когда она достигает некоторой критической величины, горение прекращается. Температура понижается, выделение ингибитора прекращается и его концентрация медленно спадает. В результате среда возвращается в исходное состояние. Теперь по ней можно пустить еще одну волну и т. д.

На плоскости (u, v) уединенному импульсу отвечает фазовая траектория, отмеченная стрелками на рис. 4. Скорость распространения одиночного импульса V_0 однозначно определена характеристиками активной среды. Для ее нахождения можно поступить следующим образом. Перейдем в систему координат $\xi = x - Vt$, движущуюся вместе с волной. Тогда уравнения (4) перейдут в систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-Vu' = f(u) - v + Du'', \quad -(V/\varepsilon)v' = -(v - v(u)), \quad (5)$$

которую мы должны решать, потребовав выполнения условий $u \rightarrow u_0$ и $v \rightarrow v_0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$, где (u_0, v_0) — стационарное однородное решение. Наличие такого решения означает существование петли сепаратрисы стационарной седловой точки P' (см. рис. 4) в фазовом пространстве системы, а это возможно лишь при определенном значении параметра V в этих уравнениях. Таким образом, скорость импульса находится путем решения нелинейной задачи на собственное значение. При достаточно малых значениях ε справедливо разложение (см. [8])

$$V_0 = V_{00} \{1 - \xi\varepsilon + O(\varepsilon^2)\}. \quad (6)$$

Разумеется, уравнения (4) допускают и периодическое распространение импульсов. Если период следования импульсов L достаточно велик, скорость их движения совпадает со скоростью одиночного импульса. Однако с уменьшением L скорость движения уменьшается, фронт следующего импульса начинает наступать на «хвост» предыдущего и его распространение идет на фронте остаточной концентрации ингибитора, превышающей стационарный уровень v_0 .

Периодическая последовательность импульсов описывается решением вида $u = u(\eta)$, $v = v(\eta)$, где $\eta = kx - \omega t$; $u(\eta + 2\pi) = u(\eta)$, $v(\eta + 2\pi) = v(\eta)$. Оно удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\omega u' = f(u) - v + Dk^2 u'', \quad -(\omega/\varepsilon)v' = -[v - \bar{v}(u)] \quad (7)$$

и соответствует предельному циклу этой системы. При произвольных значениях параметров ω и k период такого предельного цикла может быть различным. Потребовав, чтобы он был равен 2π , мы получаем соотношение, связывающее ω и k , которое естественно назвать законом дисперсии нелинейных периодических волн $\omega = \Omega(k, \varepsilon)$. Типичный вид закона дисперсии показан на рис. 6. Устойчивое распространение автоволн возможно при $k < k_{\max}$; значению k_{\max} соответствует максимальная частота распространения $\omega_{\max} \sim \varepsilon^{1/2}$.

Перейдем теперь к рассмотрению волн в двумерной активной среде, описываемой уравнениями (4). Наиболее важным для нас обстоятельством является зависимость скорости распространения волны от кривизны ее фронта. Оказывается, что выпуклый в направлении движения фронт обладает скоростью, меньшей,

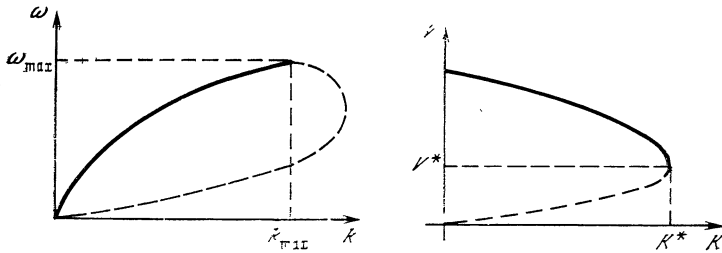


Рис. 6. Типичный вид закона дисперсии нелинейных периодических автоволн в возбудимой активной среде

Штриховой кривой показана ветвь, отвечающая неустойчивому решению

Рис. 7. Зависимость скорости распространения одиночной автоволны в двумерной возбудимой среде от кривизны ее фронта

Обозначения те же, что на рис. 6

чем скорость плоского фронта. Этот эффект легко объяснить, воспользовавшись аналогией с волнами горения. Действительно, в случае выпуклого фронта поток тепла из зоны горения рассеивается на большую область перед фронтом.

Чтобы найти зависимость скорости волны V от кривизны ее фронта K , введем на плоскости мгновенную полярную систему координат, в которой локально фронт описывается окружностью радиусом $R = 1/K$ с центром в начале координатной системы. Если радиус кривизны R гораздо больше ширины волны (т. е. ширины распространяющегося импульса, см. рис. 5), приближенно можно записать

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) - v + \frac{D}{R} \frac{\partial u}{\partial r} + D \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial t} = -(v - \bar{v}(u)).$$

Радиальному распространению со скоростью V отвечает решение $u = u(\xi)$, $v = v(\xi)$, где $\xi = r - Vt$. Оно удовлетворяет уравнениям

$$-(V + DK) u' = f(u) - v + Du'',$$

$$-(V/\varepsilon) v' = -[v - \bar{v}(u)]. \quad (9)$$

Нетрудно заметить, что они переходят в уравнения (5), если положить $\bar{V} = V + DK$ и заменить в (5) ε на $\varepsilon^* = (V + DK)\varepsilon/V$. С учетом (6) тогда справедливо

$$V + DK = V_{00} [1 - \xi\varepsilon (V + DK)/V]. \quad (10)$$

Решая уравнение (10), находим [10]

$$\frac{V}{V_{00}} = \frac{1}{2} \left(1 - \xi\varepsilon - \frac{DK}{V_{00}} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \xi\varepsilon - \frac{DK}{V_{00}} \right)^2 - 4\xi\varepsilon \frac{DK}{V_{00}}}. \quad (11)$$

Зависимость $V(K)$ показана на рис. 7. Никакие волны не могут распространяться с кривизной, превышающей

$$K^* = (V_{00}/D) [1 - 2(\xi\epsilon)^{1/2}]. \quad (12)$$

При $K < K^*$ имеются две ветви, из которых лишь верхняя отвечает устойчивым решениям.

Подчеркнем, что в отличие от волн горения (т. е. волн перехода в однокомпонентных моделях активных сред), где критическому значению кривизны соответствует покоящийся фронт, для двухкомпонентных моделей с участием ингибитора (4) фронт критической кривизны движется с отличной от нуля скоростью

$$V^* = V_{00} (\xi\epsilon)^{1/2}. \quad (13)$$

Заметим также, что при $K \ll K^*$ справедливо

$$V \cong V_0 - DK. \quad (14)$$

Этими выражениями мы воспользуемся впоследствии.

2. Эволюция разрывов волнового фронта

К настоящему времени проведен значительный объем численного моделирования автоволновых процессов в активных средах [10—13]. В частности, моделировалось распространение одиночных волн в возбудимой среде, содержащей непроницаемые препятствия. На рис. 8, взятом из работы [13], показано распространение волны по среде с невозбудимым участком при двух значениях параметров, характеризующих возбудимую среду. В первом случае (рис. 8, а) после разрыва происходит восстановление сплошного волнового фронта. Во втором случае (рис. 8, б) разрыв не исчезает, а, наоборот, начинает расти со временем. Моделировалось также огибание волной возбуждения разреза в активной среде [12]. Как видно из рис. 9, при огибании разреза волна либо следует за ним (рис. 9, а), либо при других значениях параметров среды происходит отрыв волны от разреза (рис. 9, б) и образуется «свободный конец» возбуждения. В дальнейшем свободный конец закручивается, давая начало спиральной волне (рис. 10).

Анализируя результаты численных экспериментов, можно сделать важный вывод. Существует критическое значение параметров среды, при котором распространение сплошного плоского фронта еще является устойчивым, однако достаточно широкий разрыв плоского фронта начинает расширяться со временем, так что волна возбуждения «съедается» на своем конце. Это вполне естественно: на свободном конце волны активатор должен рассеиваться по гораздо большей области, чем перед участком плоского фронта. Поэтому при слабой возбудимости среды выделения активатора в возбудимой зоне недостаточно для того, чтобы поддерживать распространение и рост свободного конца волны.

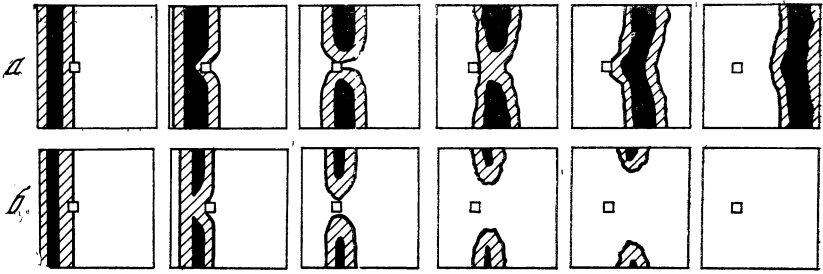


Рис. 8. Распространение волны в среде, содержащей невозбудимый участок (квадратик вблизи центра), при двух значениях параметров, характеризующих возбудимую среду.

Показаны последовательные положения волны через равные промежутки времени

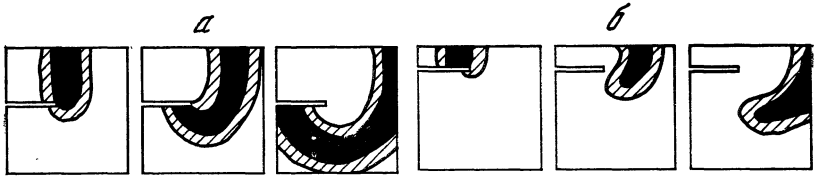


Рис. 9. Огибание волной возбуждения разреза в возбудимой среде для двух значений параметров, характеризующих эту среду

а — конец волны следует по границе разреза; б — отрыв волны от границы и образование свободного конца волнового фронта

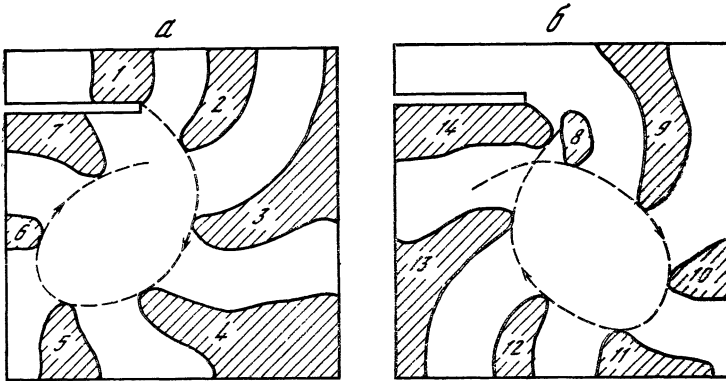


Рис. 10. Образование спиральной волны при огибании разреза

а, б — первый и второй обороты; *1—14 — последовательные положения волны через равные промежутки времени; штриховая кривая — траектория кончика спирали

Заметим, далее, что критическое значение ε , при котором свободный конец волны, изогнутой с кривизной K , перестает расти и начинает сокращаться со временем, будет меньше, чем соответствующее критическое значение $\varepsilon_{кр}$ для плоского волнового фронта. Или, иначе говоря, для каждого ε можно указать

такое критическое значение $K_{кр}$ кривизны свободного конца волны, при котором этот свободный конец не «прорастает» и не сокращается со временем. Повторяя рассуждения, проведенные выше при выводе формул (11) — (14), нетрудно получить для $K_{кр}$ выражение

$$K_{кр} = \frac{\epsilon_{кр} - \epsilon}{\epsilon_{кр}} \frac{V_0}{D}. \quad (15)$$

Это значение кривизны меньше, чем критическая кривизна (12) для распространения сплошного фронта. Если $|\epsilon_{кр} - \epsilon| \ll \epsilon_{кр}$, то $K_{кр} \ll K^*$. При значениях кривизны свободного конца волны K , близких к $K_{кр}$, скорость его «прорастания» (или сокращения) c выражается как

$$c = \gamma (K_{кр} - K), \quad (16)$$

где γ — некоторый постоянный коэффициент.

Основываясь на приведенных соображениях, можно построить простую кинематическую теорию распространения фронта одиночной автоволны с учетом эволюции его разрывов.

Как известно (см. [14]), всякую кривую на плоскости можно задать ее натуральным уравнением $K = K(s)$, которое устанавливает связь между длиной дуги кривой s и ее кривизной K в соответствующей точке; натуральное уравнение определяет кривую с точностью до ее положения на плоскости.

Рассмотрим положение фронта волны в некоторый момент t . Пусть его кривизна в точке a (рис. 11) равнялась в этот момент K_a , через промежуток времени dt малая окрестность точки a на фронте волны переместится в окрестность точки b , а кривизна в этой точке станет равной K_b . Найдем связь между K_a и K_b . Для этого удобно перейти в полярную систему координат с полюсом в центре кривизны малого участка фронта, лежащего в окрестности точки a . В этом случае справедливо соотношение

$$\rho_b = \rho_a + V dt, \quad (17)$$

где $\rho_a = 1/K_a$ — радиус кривизны фронта в точке a , а ρ_b — полярный радиус-вектор точки b . Кривизна кривой, описываемой в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, вычисляется по формуле [14]

$$K = (\rho^2 - 2\rho' - \rho\rho'')/(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}. \quad (18)$$

Подставляя (17) в выражение (18), получаем с точностью до членов первого порядка по dt :

$$K_b = K_a - V K_a^2 dt - K_a^2 (d^2V/d\varphi^2) dt \quad (19)$$

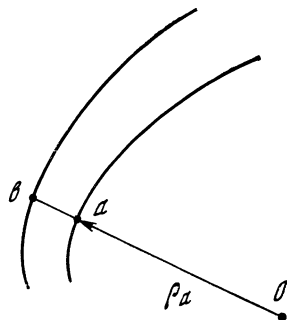


Рис. 11. К выводу уравнения (22)

(мы учли здесь, что $\partial \rho_c / \partial \varphi = 0$). Перейдя в формуле (19) к дифференцированию по длине дуги s ($ds = \rho_a d\varphi$), находим

$$K_b - K_a = dK = -(K_a^2 V + d^2 V / ds^2) dt. \quad (20)$$

С другой стороны, $dK = (\partial K / \partial s) ds + (\partial K / \partial t) dt$. Для приращения длины дуги ds за время dt нетрудно получить выражение

$$ds = \left(\int_0^s KV d\xi \right) dt + c dt. \quad (21)$$

Первое слагаемое в формуле (21) описывает увеличение длины дуги за счет изменения радиусов кривизны в каждой точке кривой, второму слагаемому отвечает увеличение длины дуги за счет «прорастания» фронта на своем свободном конце, который выбран за начало отсчета длины s .

Комбинируя (20) и (21), приходим к уравнению²

$$\frac{\partial K}{\partial s} \left(\int_0^s KV d\xi + c \right) + \frac{\partial K}{\partial t} = -K^2 V - \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}, \quad (22)$$

в котором скорость прорастания c зависит от кривизны $K(0, t)$ на свободном конце. Учитывая, что скорость нормального смещения фронта V однозначно определяется локальной кривизной этого фронта в соответствующей точке (см. выражения (11) и (14)), получаем $V = V(K(s, t))$. Таким образом, уравнение (22) однозначно определяет эволюцию фронта автоволны со свободным концом (т. е. разрывом волнового фронта).

3. Кинематическое описание спиральных волн

В этом разделе эволюционное уравнение (22) используется для расчета основных характеристик установившейся стационарной циркуляции спиральных волн.

При стационарной циркуляции форма волнового фронта постоянна, меняется со временем лишь положение кривой на плоскости. Поэтому зависимость K от t отсутствует. Кроме того, стационарная циркуляция возможна лишь, если свободный конец волны, совершающий равномерное круговое движение вокруг центра, не «прорастает» и не сокращается со временем. Это означает, что его кривизна должна быть равной критической, т. е. $K(0) = K_{кр}$. Круг, по границе которого движется свободный конец спиральной волны, называют ее ядром; фронт спиральной волны подходит к ядру по нормали.

Заметим, что с помощью уравнения (22) можно описать также стационарную циркуляцию спиральной волны вокруг круглого

² Без учета «прорастания» на свободном конце аналогичное уравнение приведено ранее в работе [15].

«отверстия» в активной среде. Если граница отверстия непроницаема и диффузионный поток через нее равен нулю, фронт ортогонален к границе. Форма фронта тогда определяется стационарным пределом уравнения (22) при отсутствии слагаемого, которое описывало бы «прорастание» свободного конца (поскольку такого свободного конца уже нет).

Для стационарной циркуляции выражение (22) сводится к уравнению

$$\frac{dK}{ds} \int_0^s KV d\xi = -K^2V - \frac{d^2V}{ds^2}. \quad (23)$$

Его можно один раз проинтегрировать, получив в результате

$$K \int_0^s KV d\xi + \frac{dV}{ds} = \omega. \quad (24)$$

Постоянная интегрирования ω равна частоте вращения спиральной волны. Это легко понять, вспомнив, что фронт подходит к ядру (или отверстию) по нормали, и учитывая, что тогда dV/ds при $s = 0$ есть угловая скорость.

Рассмотрим вначале простейшую модель, в которой $V = \text{const}$. Нетрудно заметить, что в этом случае уравнение (24) имеет решение

$$K = (\omega/2sV)^{1/2}. \quad (25)$$

Пусть в среде вырезано отверстие с радиусом R . Тогда частота циркуляции спиральной волны вокруг отверстия равна $\omega = V/R$ и из решения (25) следует

$$K = (2Rs)^{-1/2}. \quad (26)$$

Кривая, определяемая данным натуральным уравнением, есть эвольвента круга с радиусом R (см. [14]). При $s \gg R$ она представляет собой спираль с постоянным шагом $h = 2\pi R$ (т. е. архимедову спираль). Этот результат был найден еще в классической работе Винера и Розенблюта [16] в 1946 г.

Упрощенная модель, в которой $V = \text{const}$, неспособна описать спиральную волну в отсутствие отверстия. Действительно, как видно из выражения (25), $K \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow 0$, тогда как на свободном конце волны кривизна фронта должна оставаться конечной ($K(0) = K_{\text{кр}}$).

Рассмотрим теперь задачу о расчете параметров спиральной волны в отсутствие отверстия при учете зависимости скорости фронта от его кривизны. Как увидим ниже, кривизна фронта монотонно убывает по мере удаления от центра спирали. Поэтому, если критическая кривизна мала ($K_{\text{кр}} \ll V_0/D$), во всех точках фронта справедлива простая линейная зависимость (14). В этом случае уравнение (24) принимает вид

$$K \int_0^s K d\xi = \frac{\omega}{V_0} + \frac{D}{V_0} \frac{dK}{ds}. \quad (27)$$

(Мы пренебрегли здесь в подинтегральном выражении малым слагаемым DK/V_0 .)

В уравнение (27) входит неизвестный параметр ω — частота вращения спиральной волны. Она определяется из следующих соображений. Вдали от центра спирали кривизна ее фронта должна стремиться к нулю, т. е. $K \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Можно показать, что это условие уже однозначно определяет фазовую траекторию для дифференциального уравнения (27) при заданном ω . В том числе оказывается однозначно определенным и значение кривизны $K(0)$ при $s = 0$, т. е. на свободном конце волны, подходящем к ядру спирали. Потребовав теперь, чтобы $K(0) = K_{\text{кр}}$, получим уравнение для нахождения частоты ω .

При достаточно больших значениях s можно пренебречь слагаемым с производной в правой части уравнения (27). В этой области решение дается формулой (25). С другой стороны, из уравнения (27) следует, что при $s = 0$ величина производной равна $dK/ds = -\omega/D$. Поэтому при малых s натуральное уравнение интересующей нас кривой есть

$$K = K_{\text{кр}} - (\omega/D) s. \quad (28)$$

Выражения (25) и (28) представляют собой внешнюю и внутреннюю аппроксимации для единой фазовой траектории. Покажем, что при правильном выборе ω внешнее и внутреннее решения имеют перекрывающуюся область применимости. Действительно, существует точка $s = s_0$, в которой совпадают как значения этих двух функций, так и величины их первой производной. Эти условия дают два уравнения:

$$K_{\text{кр}} - (\omega/D) s_0 = (2V_0 s_0/\omega)^{-1/2}, \quad (29)$$

$$(\omega/D) = (1/2) (2V_0/\omega)^{-1/2} s_0^{-3/2}. \quad (30)$$

Их решения имеют вид

$$\omega = (2/3)^{3/2} (DV_0)^{1/2} K_{\text{кр}}^{3/2}, \quad (31)$$

$$s_0 = (1/2) (3/2)^{1/2} (D/K_{\text{кр}} V_0)^{1/2}. \quad (32)$$

Радиус ядра спиральной волны находится из условия $\omega R_0 = V_0$ с точностью до членов порядка $DK_{\text{кр}}/V_0$.

Обсудим полученные выражения. Как видно, при $K_{\text{кр}} \rightarrow 0$ частота вращения спиральной волны убывает и стремится к нулю; при этом радиус ядра спиральной волны неограниченно возрастает. При $s > s_0$ фронт спирали имеет форму эвольвенты. Отклонения от эвольвенты существенны лишь в малой области: $0 < s < s_0$. Как следует из (32), $s_0/R_0 = (1/3)DK_{\text{кр}}/V_0$.

Фактически в узкой области шириной порядка s_0 вблизи границы ядра имеется пограничный слой, а выражения (28) и (25) представляют собой внутреннее и внешнее разложения для задачи с пограничным слоем.

Заметим, что несколько иным методом задача о кинематическом описании спиральной волны решалась в работе [10], где путем численного расчета был получен коэффициент 0,685 вместо $(2/3)^{3/2}$ в выражении (31).

Совершенно аналогично можно найти решение для спиральной волны, вращающейся вокруг достаточно большого отверстия. К отверстию с радиусом $R \gg D/V_0$ фронт волны подходит с кривизной

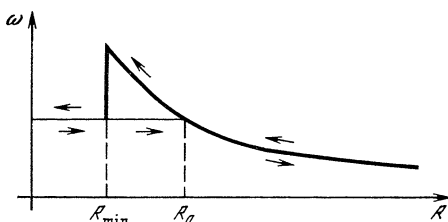
$$K(0) = 3/2 (V_0/DR^2)^{1/2}. \quad (33)$$

Вне узкого пограничного слоя шириной $(1/2)(D^2R/V_0^2)$ спираль имеет форму эвольвенты отверстия. С точностью до членов порядка $(D/V_0R)^{2/3}$ частота вращения определяется из условия $\omega R = V_0$.

Заметим, что конец спиральной волны, движущейся вдоль непроницаемой для диффузии границы отверстия, нельзя считать свободным. Его кривизна может превышать значение критической кривизны $K_{кр}$ для свободного конца волны, но должна,

Рис. 12. Зависимость частоты вращения спиральной волны от радиуса отверстия (по данным численного расчета [17])

В интервале $R_{\min} < R < R_0$ возможны два режима циркуляции, что обуславливает эффект гистерезиса



однако, оставаться меньше, чем значение критической кривизны K^* для распространения сплошного фронта (см. выражение (12)). Это обуславливает эффект гистерезиса, наблюдавшийся в численном эксперименте [17]. В некотором интервале значений радиуса отверстия ($R_{\min} < R < R_0$) могут осуществляться два режима циркуляции спиральной волны, отличающиеся частотой вращения (рис. 12). При первом режиме конец волны движется вдоль границы отверстия (волна как бы «приклеена» к отверстию), а при втором — конец волны оказывается свободным и движется вокруг ядра радиусом R_0 , так что спиральная волна не ощущает отверстия, расположенного в ее центре. Если вначале создать в среде достаточно большое отверстие с радиусом $R > R_0$ и затем плавно уменьшать его, то спиральная волна будет оставаться «приклеенной» к отверстию вплоть до $R = R_{\min}$, после чего конец волны отходит от отверстия, частота вращения скачком понижается и остается при $R \leq R_{\min}$ равной частоте вращения спиральной волны в однородной среде (31). При движении в обратном направлении, т. е. при плавном увеличении R от нуля вплоть до $R = R_0$, сохраняется режим с «отклеившимся» концом волны, и лишь при $R > R_0$ конец спиральной волны подходит к границе отверстия.

Выше приведены решения, отвечающие стационарной циркуляции спиральной волны. Результаты численных расчетов (см. [10]) свидетельствуют, что в ряде случаев стационарная циркуляция неустойчива. Тогда свободный конец волны движется не по окружности, а по траектории, напоминающей розетку. В аналитическом виде задача об устойчивости стационарной циркуляции до настоящего времени не решена. Для волны, вращающейся вокруг отверстия, в рамках кинематического описания нами показано, что стационарный режим вращения является устойчивым. Малые локальные возмущения формы волнового фронта затухают со временем, постоянно смещаясь от центра спирали к периферии.

4. Общий метод расчета характеристик спиральных волн

Кинематическое описание спиральных волн имеет ограниченную область применимости. Оно справедливо, когда спираль является достаточно «рыхлой», т. е. при условии, что к моменту прохождения следующего витка спирали через данную точку остаточная концентрация ингибитора после прохождения предыдущего витка спирали уже успела исчезнуть. Это условие эквивалентно требованию, чтобы период вращения спиральной волны T был намного больше минимального периода устойчивого следования волн $T_{\min} = 2\pi/\omega_{\max}$ (см. рис. 6). Результаты численного моделирования [11] свидетельствуют, что подобное условие выполнено не всегда: в зависимости от параметра релаксационности ε величина T может приближаться к T_{\min} , превышая ее всего лишь в несколько раз. В настоящем разделе мы предлагаем более общий метод расчета характеристик спиральных волн [18—21], частным случаем которого является кинематическое описание.

Пусть мгновенная форма спирали задается некоторой функцией $\varphi = \chi(r, t)$ в полярных координатах r и φ . Тогда после подстановки

$$u = u(\varphi - \chi(r, t), r), \quad v = v(\varphi - \chi(r, t), r) \quad (34)$$

в уравнения (4) получаем

$$\begin{aligned} -\dot{\chi}u' &= f(u) - v + Qu' + Dk^2u'' + J, \\ -\varepsilon^{-1}\dot{\chi}v' &= -(v - \bar{v}(u)), \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} Q &= \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\chi_r), \quad k^2 = \chi_r^2 + \frac{1}{r^2}, \\ J &= D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2\chi_r \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь использованы обозначения: $u' = \partial u / \partial \varphi$, $\dot{\chi} = \partial \chi / \partial t$, $\chi_r = \partial \chi / \partial r$.

Если отбросить в (35) слагаемое J (справедливость такого приближения обсуждается ниже), то эти уравнения для разных значений радиуса r распадаются. При каждом заданном r они описывают периодическое (с периодом 2π) одномерное распространение импульсов, модифицированное лишь за счет добавочного слагаемого с коэффициентом Q :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u) - v + Q \, du/d\varphi + Dk^2 \partial^2 u/\partial\varphi^2, \\ \varepsilon^{-1} \dot{v} &= -(v - \bar{v}(u)). \end{aligned} \quad (37)$$

При заданных Q и k это распространение будет характеризоваться определенной частотой ω , определяя тем самым модифицированный закон дисперсии

$$\omega = \Omega(k, Q). \quad (38)$$

Сравнивая выражения (37) и (5), можно записать

$$\dot{\chi} = \Omega(k, Q). \quad (39)$$

Поскольку согласно (36) k и Q являются функциями от χ_r и χ_{rr} , полученное нами замкнутое уравнение описывает эволюцию формы спиральной волны со временем.

Уравнение (39) служит аналогом фазового описания, разработанного И. Курамото [22] для систем, связанных диффузией самовозбуждающихся осцилляторов. Если фазы колебаний достаточно плавно меняются от точки к точке, то, как показано в [22], возможно сокращенное описание такой системы, использующее лишь уравнение для фаз колебаний $\Phi(r, t)$. В описании не участвуют амплитуды колебаний, поскольку они адиабатически подстраиваются к локальному значению фазы.

В рассматриваемом нами случае среда является не автоколебательной, а возбудимой. Тем не менее при наличии в среде спиральной волны почти каждый элемент среды (кроме области ядра) совершает со временем периодические колебания. Функцию $\chi(r, t)$ можно рассматривать в качестве мгновенной фазы колебаний элемента, расположенного в точке r . Уравнение (39) будет справедливо при описании медленных процессов эволюции, для которых характерное время гораздо больше, чем время релаксации профиля бегущего импульса после возмущения.

Установившаяся стационарная циркуляция спиральной волны с угловой частотой ω отвечает частному решению уравнения (39), для которого $\chi(r, t) = \chi(r) - \omega t$. Для функции $\chi(r)$, задающей форму установившейся спиральной волны, справедливо тогда уравнение

$$\omega + \Omega(k, Q) = 0, \quad (40)$$

где

$$k^2 = \chi_r^2 + \frac{1}{r^2}, \quad Q = \left(\chi_{rr} + \frac{1}{r} \chi_r \right) D. \quad (41)$$

Оно представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $\chi_r = d\chi/dr$. Уравнение (40) необходимо дополнить граничными условиями.

Рассмотрим вначале волну, которая вращается внутри кольцевого канала с внутренним R_1 и внешним R_2 радиусами. Ввиду непроницаемости границ канала фронт волны подходит к ним по нормали. Это эквивалентно граничным условиям

$$\chi_r(R_1) = 0, \quad \chi_r(R_2) = 0. \quad (42)$$

Итак, имеются два граничных условия для дифференциального уравнения первого порядка (40). Их можно одновременно выполнить лишь при определенном выборе параметра ω в этом уравнении, что фиксирует частоту вращения волны.

Для спиральной волны, вращающейся вокруг отверстия радиусом R в неограниченной среде, граничные условия имеют вид

$$\chi_r(R) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \chi_r = \text{const}. \quad (43)$$

Значение постоянной во втором условии определяется самим уравнением.

Чтобы получить решение для спиральной волны в неограниченной среде без отверстия, необходимо сформулировать дополнительное условие, которое позволило бы найти неизвестный радиус ядра R_0 . Как уже отмечалось в предыдущем разделе, вдоль границы ядра движется свободный конец, который не может проникнуть внутрь, поскольку иначе в конечной точке было бы превышено критическое значение кривизны. В отличие от разд. 3 мы анализируем теперь более общий случай и должны учитывать присутствие остаточной концентрации ингибитора, сохранившейся после предыдущего прохождения волны.

Пусть по плоскости движется периодическая последовательность волн со свободными концами. Как и для одиночной волны, должно существовать некоторое критическое значение параметра релаксационности ε в (4), при котором свободные концы не будут ни удлиняться, ни сокращаться со временем. Это критическое значение $\varepsilon_{\text{кр}}(\omega)$ зависит от периода следования волн (или частоты ω) и лишь в пределе одиночной волны переходит в значение $\varepsilon_{\text{кр}}$, о котором шла речь в разд. 3. Можно показать, что $\varepsilon_{\text{кр}}(\omega)$ убывает с ростом ω .

Исходя из значений $\varepsilon_{\text{кр}}(\omega)$, нетрудно вычислить критическое значение кривизны $K_{\text{кр}}(\omega)$ для распространения последовательности искривленных волн, при котором свободные концы волн не «прорастают» и не сокращаются. Оно вновь дается выражением (15) с заменой $\varepsilon_{\text{кр}}$ на $\varepsilon_{\text{кр}}(\omega)$. Критическая кривизна убывает с ростом частоты следования волн: она стремится к нулю при $\omega \rightarrow \omega_{\text{max}}$, где ω_{max} — максимальная возможная частота следования плоских волн (см. разд. 1).

Согласно формулам дифференциальной геометрии [14], кривизна кривой, заданной уравнением $\varphi = \chi(r)$, в точке r , где

$d\chi/dr = 0$, определяется выражением $K(r) = \chi_{rr}r$. Потребовав дополнительно, чтобы на границе ядра спиральной волны, т. е. при $r = R_0$, кривизна равнялась критической, получаем систему условий

$$\chi_r(R_0) = 0, \quad K_{кр}(\omega) = R_0\chi_{rr}(R_0), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \chi_r = \text{const}, \quad (44)$$

которые в совокупности с уравнением (40) определяют как частоту вращения спиральной волны, так и радиус ее ядра.

Заметим, что условия (44) можно преобразовать к эквивалентному виду

$$\begin{aligned} \chi_r(R_0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \chi_r = \text{const}, \\ \omega + \Omega [1/R_0, DR_0^{-1}K_{кр}(\omega)] = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

поскольку уравнение (40) должно выполняться и в конечной точке (при $r = R_0$).

Изложенная выше общая схема применена в работах [19, 20] к расчету основных характеристик спиральных волн в модели активной среды, описываемой уравнениями

$$\dot{u} = -u + \bar{u}\theta(u - u_0) - v + \Delta u, \quad \varepsilon^{-1}\dot{v} = u, \quad (46)$$

в которых ступенчатая функция $\theta(z)$ определена как $\theta(z) = 0$ при $z < 0$ и $\theta(z) = 1$ при $z \geq 0$. Для указанной модели найден закон дисперсии автоволн. В частности, максимальное волновое число устойчивого распространения волн составляет

$$k_{\max} = \frac{\pi \sqrt{\varepsilon/3}}{\text{arctg}(\sqrt{3\varepsilon/2q})}, \quad (47)$$

где $q = 1/2 - (u_0/\bar{u})$. При $q \ll 1$ справедливо $k_{\max} \ll 1$.

Если минимальный пространственный период следования импульсов $L_{\min} = 2\pi/k_{\max}$ гораздо больше характерной диффузионной длины, совпадающей с шириной фронта импульса, принятой в модели (46) за единицу измерения расстояний, частоту вращения спиральной волны можно вычислять в предположении, что спиральная волна вращается вокруг эффективного отверстия (ядра), радиус которого определяется соображениями устойчивости. Внутри ядра спиральной волны имеют место лишь вынужденные колебания переменных u и v , обусловленные диффузионным потоком из наружной области. При движении от границы ядра к его центру эти колебания экспоненциально затухают на расстоянии порядка диффузионной длины. Поскольку радиус ядра, как можно показать, всегда больше $L_{\min}/2\pi = s/k_{\max}$, это означает, что при $k_{\max} \ll 1$ в центре спиральной волны лежит большая невозбужденная область. Естественно, что характеристики вращения спиральной волны определяются при этом процессами на границе ядра и во внешней области.

Для модели (46) в работе [18] были проведены математические оценки величины слагаемых, отброшенных в (35) при выводе уравнения (40). Оказывается, что эти слагаемые малы, если $q \ll 1$, т. е. при выполнении условия $L_{in} \gg 1$. Следует ожидать, что тем же самым условием будет определяться применимость изложенного выше метода расчета для произвольной модели активной среды. Обобщение этого метода для расчета автоволновых режимов в трехмерных активных средах проведено в работе [23], в которой найдены основные характеристики волн, имеющих вид «скрученных свитков».

Заметим, что в квазигармонических активных средах, образованных связанными между собой осцилляторами Ван-дер-Поля, $L_{min} \sim 1$, и условие применимости нашей теории нарушено. Характеристики спиральных волн в квазигармонических активных средах рассчитаны в работе [24].

ЛИТЕРАТУРА

1. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Наука, 1975. 421 с.
2. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 527 с.
3. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. Автоволновые процессы в распределенных активных средах // УФН. 1979. Т. 12. С. 625—647.
4. Полак Л. С., Михайлов А. С. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. М.: Наука, 1983. 287 с.
5. Гринский В. И., Михайлов А. С. Автоволны. М.: Знание, 1984. 81 с.
6. Зельдович Я. Б. Избранные труды. Химическая физика и термодинамика. М.: Наука, 1984. 132 с.
7. Островский Л. А., Яхно В. Г. Образование импульсов в возбудимой среде // Биофизика. 1975. Т. 20. С. 489—493.
8. Gasten R. G., Cohen H., Lagerstrom P. A. Perturbation analysis of an approximation to the Hodgkin-Huxley theory // Quart. Appl. Math. 1975. Vol. 32. P. 365—402.
9. Ortoleva P., Ross J. Theory of propagation of discontinuities in kinetic systems with multiple time scales: fronts, front multiplicity and pulses // J. Chem. Phys. 1975. Vol. 63. P. 3398—3431.
10. Зыков В. С. Моделирование волновых процессов в возбудимых средах. М.: Наука, 1984. 271 с.
11. Перцов А. М., Панфилов А. В. Спиральные волны в активных средах // Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. М. 77—84.
12. Панфилов А. В., Перцов А. М. Механизм возникновения волн в активных средах, связанный с явлением критической кривизны // Биофизика. 1982. Т. 27. С. 866—869.
13. Перцов А. М., Панфилов А. В., Медведова Ф. У. Неустойчивости автоволн в возбудимых средах, связанные с явлением критической кривизны // Там же. 1983. Т. 28. С. 100—103.
14. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Гостехтеориздат, 1956. 412 с.
15. Зыков В. С. Исследования на ГВС-100 некоторых характеристик самоподдерживающейся активности в возбудимой среде // Управление сложными системами. М.: Наука, 1975. С. 59—66.
16. Wiener N., Rosenblueth A. Mathematical formulation of the pulse conduction in the network of connected excitable elements, particularly, in the cardiac tissue // Arch. Inst. cardiol. Méx. 1946. Vol. 16, N 3/4. P. 205. (Рус. пер.: Винер Н., Розенблюэт А. Математическая формулировка проб-

лем проведения импульсов в сети связанных возбудимых элементов, в частности, в сердечной мышце // Кибернетический сборник. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. № 3. С. 1—43.

17. *Pertsov A. M., Panfilov A. V., Ermakova E. A.* Numerical simulation of spiral waves in active media // *Physica. D.* 1984. Vol. 14. P. 117—125.
18. *Михайлов А. С., Кринский В. И.* Ревербератор в активной среде. Аналитические результаты // *Биофизика.* 1982. Т. 27. С. 875—879.
19. *Mikhailov A. S., Krinsky V. I.* Rotating spiral waves in excitable media: the analytical results // *Physica D.* 1983. Vol. 9. P. 346—376.
20. *Кринский В. И., Михайлов А. С., Панфилов А. В.* и др. Спиральные волны в активных средах // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1984. Т. 27. С. 1116—1127.
21. *Mikhailov A. S.* A theory of spiral waves // *Self-organization. Autowaves and structures far from equilibrium/Ed. V. I. Krinsky.* Berlin etc.: Springer, 1984. P. 92—95.
22. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves and turbulence. Heidelberg: Springer, 1984. 432 p.
23. *Mikhailov A. S., Panfilov A. V., Rudenko A. N.* Twisted scroll waves in three-dimensional active media // *Phys. Lett. A.* 1985. Vol. 160, N 1, P. 16—21.
24. *Hagan P. S.* Spiral waves in oscillatory media // *SIAM J. Appl. Math.* 1982. Vol. 42. P. 762—781.



УДК [536.2+533.9]: 517.9

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ И СИММЕТРИИ

А. М. ВИНОГРАДОВ

Математический аспект той «нелинейной культуры», о которой говорил Л. И. Мандельштам, получил с тех пор, как были произнесены эти слова, довольно однобокое развитие. Достижения современной теории динамических систем подчеркивают относительную бедность математической культуры исследования содержательных систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (НДУ). Этот факт достоин сожаления, поскольку аппаратная часть физики нелинейных явлений содержится именно в теории НДУ.

Выделение и исследование класса НДУ, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния, явились замечательным достижением теории НДУ за последние 15 лет. Тем не менее необходимо признать, что оно носит заведомо ограниченный характер, поскольку касается пространственно одномерных систем. Сейчас ясно, что техника обратной задачи принципиально не обобщается на пространственно неоднородные (по существу) уравнения. Для этих уравнений нетривиальной является уже сама проблема дать содержательное определение такого важного понятия, как полная интегрируемость. В данной статье мы обсудим ее современное состояние.

1. Восходящая к Лагранжу идея «полной интегрируемости» и по сей день исчерпывающим образом разработана лишь в контексте обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Первая половина этой концепции — понятие интеграла, как известно, состоит в следующем. Пусть для простоты интересующая нас система ОДУ имеет вид

$$\dot{x}_i = \alpha_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка «фазового пространства». Тогда функция $I = I(x)$ называется интегралом этой системы, если

$$\sum \alpha_i \frac{\partial I}{\partial x_i} \equiv 0.$$

Говоря иначе, функция I должна быть постоянной вдоль любой кривой фазового пространства, являющейся решением системы (1). Набор интегралов I_1, \dots, I_s называется полным, если система «алгебраических» уравнений $I_j = C_j, j = 1, \dots, S, C_j = \text{const}$, при любом выборе констант C_j определяет кривую, являющуюся решением системы (1), и любое решение этой системы может быть описано подобным образом. Здесь, очевидно, можно считать, что $S = n - 1$.

Ниже рассмотрим, как эти понятия интеграла и полноты ввести в рамки теории НДУ.

2. Интегралы НДУ. Было бы ошибкой пытаться определить понятие интеграла для системы НДУ «в лоб», т. е. как функцию, постоянную на решениях этой системы. Реализация этой идеи приводит к бессодержательным результатам. Полезным здесь оказывается интерпретировать интеграл как сохраняющуюся величину и «довериться природе». Последнее состоит в следующем.

«Стартуем» с некоторой классической сохраняющейся величины, например энергии. Для замкнутой физической системы с конечным числом степеней свободы, а она описывается системой ОДУ вида (1), такая сохраняющаяся величина является интегралом в указанном выше смысле. Рассмотрим распределенную физическую систему. Ее движение уже описывается системой НДУ. Для такой системы, как правило, нетрудно по аналогии установить точный вид рассматриваемой сохраняющейся величины. Далее следует установить математическую природу полученной величины и, наконец, величины подобной природы называть в дальнейшем интегралами НДУ.

Этот ход мысли приводит к следующим заключениям. Пусть $u = [u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)]$ — функции, описывающие рассматриваемую сплошную среду. Тогда «сохраняющаяся величина» для такой системы, как показывают частные примеры энергии, импульса и т. п., представляет собой интеграл

$$I(t) = \int \mathcal{L}_0(x, u, u_x, u_{xx}, \dots) dx,$$

где для краткости u_x означает совокупность всех производных первого порядка функций $u_i(x)$ по переменным x_j , u_{xx} — второго порядка и т. п. Если нас интересует лишь та часть рассматриваемой сохраняющейся величины, которая сосредоточена в объ-

еме Ω , то интеграл $I(t, \Omega) = \int_{\Omega} \mathcal{L} dx$ меняется со временем.

Введя вектор $\bar{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)$, $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_i(x, u, u_x \dots)$, поток которого через $\partial\Omega$ определяет это изменение, получим

$$\frac{d}{dt} I(t, \Omega) = \int_{\partial\Omega} (\bar{\mathcal{L}}, \mathbf{n}) dS; \quad (2)$$

здесь \mathbf{n} — нормаль к $\partial\Omega$; dS — «элемент площади», гипер поверхности $\partial\Omega$. Рассмотрев $(n+1)$ -мерное пространство $x = (x_0 = t, x)$, $(n+1)$ -мерный вектор $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_0, \bar{\mathcal{L}})$ на нем и воспользовавшись формулой Гаусса—Остроградского, интегральное условие (2) можно переписать в инфинитезимальной форме

$$\operatorname{div} \mathcal{L} = 0, \quad (3)$$

где div означает $(n+1)$ -мерную дивергенцию. Так как движение рассматриваемой среды описывается некоторой системой НДУ \mathcal{Y} , то вектор \mathcal{L} уместно назвать сохраняющимся током для \mathcal{Y} , а его t -компоненту — сохраняющейся величиной, если (3) выполнено всякий раз, когда функция $u = u(x)$ есть решение системы \mathcal{Y} .

Попытка найти все сохраняющиеся токи для НДУ \mathcal{Y} , непосредственно решая (3) совместно с \mathcal{Y} , как правило, бывает весьма нереалистичной, поскольку в указанной постановке эта задача имеет слишком много несущественных решений. Именно, пусть $w = \{w_{ij}\}$, $w_{ij} = w_{ij}(x, u, u_x, \dots)$, $w_{ij} = -w_{ji}$, и $\mathcal{L} = \operatorname{rot} w$, т. е.

$$\mathcal{L}_i = \sum_{k=0}^n \frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k},$$

тогда (3), очевидно, выполнено. Более того, можно

считать, что равенство $\mathcal{L} = \operatorname{rot} w$ имеет место только тогда, когда $u = u(x)$ есть решение системы \mathcal{Y} . Таким образом, имеет смысл избавиться от такого рода сохраняющихся токов, которые назовем тривиальными.

С этой целью отождествим все сохраняющиеся токи, которые отличаются один от другого на величину тривиальную, и полученный таким образом класс назовем законом сохранения системы \mathcal{Y} . Ниже увидим, что именно понятие закона сохранения, а не сохраняющейся величины (читатель должен обратить внимание на разницу между ними) является нужным обобщением на НДУ понятия интеграла ОДУ.

3. Рассмотрим теперь вопрос о нахождении всех законов сохранения заданной системы НДУ. Ключевым здесь является вопрос о том, как описывать законы сохранения, т. е. целые классы сохраняющихся токов. Ответ на него дается введением понятия производящей функции закона сохранения, которое определяется следующим образом.

Равенство (3) при условии, что $u = u(x)$ есть решение системы \mathcal{U} , эквивалентно равенству

$$\operatorname{div} \mathcal{L} = S(F),$$

где S — некоторый дифференциальный оператор; $F = (F_1, \dots, F_m)$, и система \mathcal{U} записывается в виде

$$F_j(x, u, u_x \dots) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Точнее, $S(F) = \sum S_i(F_i)$, где S_i — скалярные дифференциальные операторы. Напомним, что если $P = \sum_{\sigma} a_{\sigma}(x) \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x_{\sigma}}$ — линейный дифференциальный оператор (здесь мы пишем $\partial^{|\sigma|}/\partial x_{\sigma}$ вместо $\partial^i/\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}$, где $\sigma = (i_1, \dots, i_n)$ и $i = i_1 + \dots + i_n$), то $P^* = \sum (-1)^{|\sigma|} \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x_{\sigma}} a_{\sigma}(x)$ — формально сопряженный с P оператор. Положим

$$\Psi(\mathcal{L}) = (S_1^*(1), S_2^*(1), \dots, S_m^*(1)).$$

Пример. Пусть $F \equiv u_{xxx} + uu_x + u = 0$ — уравнение Кортевега—де Вриза (КДВ). Известен его сохраняющийся ток

$$\mathcal{L} = \left(\frac{u^3}{6} - \frac{u_x^2}{2}, \frac{u^4}{8} - uu_x^2 + \frac{u^2}{2} u_{xx} + \frac{u_{xx}^2}{2} - u_x u_{xxx} \right)$$

(первая компонента — это t -компонента, а вторая — x -компонента). Тогда $\operatorname{div} \mathcal{L} = (u^2/2 - u_x(\partial/\partial x))F$, т. е. $S = u^2/2 - u_x(\partial/\partial x)$ и $S^* = u^2/2 + (\partial/\partial x)u_x$. Поэтому $\Psi(\mathcal{L}) = u^2/2 + u_{xx}$.

Имеет место следующее утверждение: если сохраняющиеся токи \mathcal{L} и \mathcal{L}' эквивалентны, то $\Psi(\mathcal{L}) = \Psi(\mathcal{L}')$. Подчеркнем, что последнее равенство понимается «в силу \mathcal{U} ». Таким образом, величина $\Psi(\mathcal{L})$ одинакова для всех эквивалентных сохраняющихся токов \mathcal{L} и поэтому характеризует весь этот класс величин в целом, т. е. соответствующий закон сохранения. Мы ее называем производящей функцией рассматриваемого закона сохранения.

Далее, естественно спросить, полностью ли определяется закон сохранения своей производящей функцией? Если рассматриваемая система \mathcal{U} является определенной, т. е. число уравнений равно числу неизвестных функций, а ее символ регулярен, то ответ на поставленный вопрос положителен. Опустим здесь точное определение регулярности, поскольку для основных уравнений математической физики оно автоматически выполняется.

Итак, для описанного широкого класса НДУ вопрос о нахождении законов сохранения равнозначен вопросу о вычислении их производящих функций. Последний решается следующим образом.

Пусть $u_{\sigma}^i = \partial^{|\sigma|} u_i / \partial x_{\sigma}$ — производная i -й неизвестной функции, отвечающая мультииндексу σ , и $F_i = 0$, $i = 1, \dots, m$, — рассматриваемая система НДУ. Обозначим через l_F операторную матрицу, у которой на месте (i, j) стоит оператор

$$S_{ij} = \sum_{\sigma} \frac{\partial F_i}{\partial u_{\sigma}^i} \frac{\partial |\sigma|}{\partial x_{\sigma}},$$

т. е. $l_F = \|S_{ij}\|$. Рассмотрим операторную матрицу l_F^* , которая получается из l_F заменой каждого из операторов S_{ij} оператором S_{ij}^* и последующим транспонированием. Представим производящую функцию $\Psi = \Psi(\mathcal{L})$ в виде m -столбца. Тогда имеет смысл символ $l_F^*(\Psi)$, обозначающий результат действия операторной матрицы l_F^* на столбец Ψ . Оказывается, что

$$l_F^*(\Psi) = 0 \quad \text{в силу } \mathcal{U}, \quad (4)$$

если Ψ — производящая функция некоторого закона сохранения.

Пример. Пусть $F \equiv u_{xxx} + uu_x + u_t = 0$ — уравнение КДВ. Тогда $l_F = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + u \frac{\partial}{\partial x} + u_x + \frac{\partial}{\partial t}$ есть операторная (1×1) -матрица и $l_F^* = -\frac{\partial^3}{\partial x^3} - u \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}$. В предыдущем примере мы построили производящую функцию $\Psi = u^2/2 + u_{xx}$ для одного из законов сохранения уравнения КДВ. Непосредственное вычисление показывает, что

$$l_F^*(\Psi) = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \right) (F),$$

т. е. что $l_F^*(\Psi) = 0$, если $u(x)$ есть решение уравнения $F = 0$.

Таким образом, решая линейное дифференциальное уравнение (4), можно найти все производящие функции законов сохранения рассматриваемой системы НДУ. При этом, однако, можно получить лишнее, т. е. не всякое решение уравнения (4) является производящей функцией некоторого закона сохранения. Поэтому необходима процедура отбраковки ненужных решений, которая состоит в следующем.

Пусть Ψ — решение системы (4). Это означает, что $l_F^*(\Psi) = S(F)$, где S — некоторый матричный дифференциальный оператор. Рассмотрим матричный дифференциальный оператор $l_{\Psi} + S^*$, где l_{Ψ} строится по Ψ так же, как l_F по F . Если этот оператор можно представить в виде $T \circ l_F^*$, где $T^* = T$ в силу \mathcal{U} , то Ψ является производящей функцией некоторого закона сохранения, и наоборот. Здесь следует заметить, что коэффициенты рассматриваемых дифференциальных операторов зависят от x , u , u_x и т. д. Поэтому слова «в силу \mathcal{U} » означают, что требуемое представление должно иметь место при условии, что $u = u(x)$ есть решение системы \mathcal{U} .

Пример. Пусть $F \equiv u_x + u_y = 0$. Тогда $l_F = \partial/\partial x + \partial/\partial y$ и $l_F^* = -l_F$. Очевидно, что функция $\Psi \equiv u_{(k)} = \underbrace{u_x \dots x}_{k \text{ раз}}$, где $k \geq 0$, есть решение уравнения (4). При этом $l_F^*(\Psi) = -\partial^k F / \partial x^k$, т. е. $S = -\partial^k / \partial x^k$. Таким образом, $l_{\Psi} + S^* = \partial^k / \partial x^k + (-1)^{k+1} \partial^k / \partial x^k$. Отсюда видно, что $l_{\Psi} + S^* = 0$,

если k четно, и $L_V + S^* = 2 \partial^k / \partial x^k$, если k нечетно. В последнем случае нужного нам представления в виде $T \circ l_F$, очевидно, не существует. Таким образом, $u_{(k)}$ есть производящая функция закона сохранения только при четном k .

4. Результаты, изложенные в предыдущем пункте, могут быть вполне оформлены алгоритмически и применены на практике для решения задачи о нахождении всех законов сохранения заданной определенной системы НДУ с регулярным символом. Обратим здесь внимание на следующие два важных обстоятельства. Во-первых, вопрос о том, тривиален ли заданный сохраняющийся ток, является весьма непростым. Он всегда явно или неявно встает при любых более или менее прямых методах построения сохраняющихся величин. В частности, имеются работы, в которых находятся сохраняющиеся токи, оказывающиеся тривиальными при более тщательном анализе. Описанный выше аппарат производящих функций снимает эту проблему, так как сохраняющийся ток \mathcal{L} тривиален только тогда, когда $\Psi'(\mathcal{L}) = 0$. Во-вторых, на основании результатов п. 3 можно ставить и эффективно решать вопрос о нахождении всех законов сохранения (см. ниже). Известные ранее общие методы (например, теорема Нётер) такой возможности не давали.

Для полноты картины следовало бы указать процедуру восстановления сохраняющегося тока \mathcal{L} по его производящей функции $\Psi'(\mathcal{L})$. Очевидно, $\Psi'(\mathcal{L})$ определяет \mathcal{L} лишь с точностью до тривиального слагаемого. Поскольку эта процедура не вполне проста и связана с рассмотрениями, использующими технику и факты гомологической алгебры, мы опустим ее описание. Полезно при этом подчеркнуть, что переход $\mathcal{L} \rightarrow \Psi'(\mathcal{L})$ аналогичен переходу «лагранжиан \rightarrow уравнение Эйлера—Лагранжа», однако является гораздо более сложным. Для уравнений эволюционного типа, т. е. имеющих вид

$$u_t = \Phi(x, u, u_x, u_{xx} \dots),$$

если $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_0, \dots, \mathcal{L}_n)$, то $\Psi'(\mathcal{L})$ представляет собой левую часть уравнений Эйлера—Лагранжа, отвечающих лагранжиану \mathcal{L}_0 , понимаемому как функция только независимых переменных x . В связи с этим задача восстановления \mathcal{L} по $\Psi'(\mathcal{L})$ в данном случае практически сводится к обратной задаче вариационного исчисления.

П р и м е р. Производящая функция одного из законов сохранения для уравнения КДВ, как показано выше, имеет вид $\Psi' = u^2/2 + u_{xx}$. Лагранжиан, вариационная производная которого совпадает с Ψ' , очевидно, равен $\mathcal{L}_0 = u^3/6 - u_x^2/2$. Для того чтобы найти \mathcal{L}_1 , используем то, что $\operatorname{div} \mathcal{L} = \partial \mathcal{L}_0 / \partial t + \partial \mathcal{L}_1 / \partial x = 0$ на КДВ. Но $\partial \mathcal{L}_0 / \partial t = -u_x u_{xt} + (u^2/2) u_t$, что в силу уравнения КВД равно

$$u_x (u_{xxx} + u_x^2 + uu_{xx}) - \frac{u^2}{2} (u_{xxx} + uu_x).$$

Поэтому, для того чтобы найти \mathcal{L}_1 , достаточно проинтегрировать последнее выражение по x .

В связи с этим отметим, что оставшийся «за кадром» математический аппарат, лежащий в основе излагаемой теории, позволяет решить и обратную задачу вариационного исчисления. Именно система НДУ $F_i = 0$, $i = 1, \dots, l$, проистекает из некоторого вариационного принципа только тогда, когда $l_F = l_F^*$, где $F = (F_1, \dots, F_l)$.

5. Приведем несколько конкретных результатов вычислений, полученных по схеме п. 3.

5.1. Возьмем уравнение типа уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx} + f(x, t, u, u_x)$. В этом случае из уравнения (4) мгновенно следует, что $\Psi' = \Psi'(x, t, u)$, причем

$$(D_t + D_x^2 - f_{u_x} D_x - D_x(f_{u_x}) + f_u) \Psi' = 0. \quad (5)$$

Например, если $f = 0$ (классическое уравнение теплопроводности), то Ψ' есть решение уравнения $\Psi'_t + \Psi'_{xx} = 0$, сопряженно с уравнением теплопроводности. Один из сохраняющихся токов, отвечающих такой производящей функции, равен $(u_x \Psi' - u \Psi'_x, -u \Psi')$.

Таким образом, эти сохраняющиеся токи исчерпывают с точностью до тривиальных все сохраняющиеся токи уравнения теплопроводности.

Простой анализ уравнения (5) показывает, что уравнение рассматриваемого типа обладает ненулевым законом сохранения при условии, что

$$f = A(x, t, u) u_x^2 + B(x, t, u) u_x + C(x, t, u).$$

Тогда $\Psi' = e^{\varphi}$ и

$$\varphi_u = A,$$

$$\varphi_t + \varphi_{xx} + \varphi_x^2 - B_{\varphi_x} + C_{\varphi_u} + B_x + C_u = 0.$$

5.2. Если \mathcal{U} — линейная система уравнений, то всякому решению сопряженной системы \mathcal{U}^* отвечает некоторый закон сохранения (ср. с разобранным выше случаем уравнения теплопроводности).

5.3. Рассмотрим многомерное уравнение типа уравнения теплопроводности, т. е. уравнение вида

$$u_t = \Delta_g(u) + f(x, t, u, u_x),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$; Δ_g — оператор Лапласа, отвечающий некоторой метрике g (не обязательно положительно определенной) в x -пространстве. Для такого уравнения, как и в п. 1, можно показать, что производящая функция Ψ' зависит только от x, u, t . Если, кроме того, $f = 0$, то Ψ' есть решение уравнения $\Psi'_t + \Delta_g(\Psi') = 0$ и этими решениями исчерпываются все законы сохранения.

5.4. Нелинейное уравнение Шредингера $i\Psi_t = \Delta\Psi + |\Psi|^2\Psi$ имеет две физически очевидные сохраняющиеся величины: «вероятность», равную $\int |\Psi|^2 dx$, и «энергию», равную $\int [1/2 |\nabla\Psi|^2 - 1/4 |\Psi|^4] dx$. Точнее, соответствующие токи \mathcal{L} равны

$$\mathcal{L}_1 = [|\Psi|^2, i(\Psi\nabla\Psi + \Psi\nabla\Psi)],$$

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ \frac{1}{2} |\nabla\Psi|^2, \frac{i}{2} [(\Delta\Psi + |\Psi|^2\Psi)\nabla\Psi - (\Delta\Psi + |\Psi|^2\Psi)\nabla\Psi] \right\}.$$

Производящие функции для них соответственно равны $2i\Psi$ и $i(\Delta\Psi + |\Psi|^2\Psi)$ при условии, что рассматриваемое уравнение записано в виде $F = 0$, $F = i\Psi_t - \Delta\Psi - |\Psi|^2\Psi$. Если число пространственных переменных $n = 1$, то, как известно, оно обладает бесконечной серией других законов сохранения. Напротив, при $n > 1$ нетрудно показать, опираясь на результаты п. 3, что других законов сохранения у этого нелинейного уравнения нет.

5.5. Уравнение КДВ $u_t = u_{xxx} + uu_x$ обладает хорошо известной бесконечной серией законов сохранения, которая строилась различными авторами разными способами. Описанными методами нетрудно эту серию построить и доказать, что других законов сохранения у уравнения КДВ нет.

5.6. Уравнения плоского напряженного состояния среды Мизеса имеют вид

$$\sigma_x = 2k(\theta_x \cos 2\theta + \theta_y \sin 2\theta),$$

$$\sigma_y = 2k(\theta_x \sin 2\theta - \theta_y \cos 2\theta),$$

где σ — давление; θ — угол между главным направлением тензора напряжений и осью OX ; k — постоянная пластичности. Это уравнение интересно тем, что допускает «дважды бесконечную» серию законов сохранения. Производящие функции первой ее бесконечной части зависят только от переменных x, y, σ, θ . Вторая бесконечная часть образована законами сохранения, производящие функции которых Ψ_{2S}^i ($0 \leq i \leq 2S, S \geq 0$) линейно зависят от производных порядка $2S$. Замечательно, что все эти законы получаются из Ψ_0^0 действием симметрий рассматриваемого уравнения.

5.7. Рассмотрим осесимметрическое уравнение Заболотской—Хохлова [1], описывающее распространение «узких пучков»:

$$uu_{xx} + u_x^2 - u_{xy} + zu_{zz} + u_z = 0.$$

Производящие функции законов сохранения для этого уравнения имеют один из следующих четырех видов:

$$\Psi = \begin{cases} x\alpha(y) \ln z + \alpha'(y)z(\ln z - 2), \\ x\beta(y) + \beta'(y)z, \\ \gamma(y) \ln z, \\ \delta(y), \end{cases}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — произвольные функции от y (Н. О. Шаромет).

В качестве иллюстрации укажем сохраняющийся ток, соответствующий $\Psi = \beta(y)$:

$$(\beta(y) u u_x + \beta'(y) u, -\beta(y) u_x, \beta(y) z u_z).$$

5.8. «Полное» уравнение Заболотской—Хохлова имеет вид (см. [1])

$$u u_{xx} + u_x^2 - u_{xy} + u_{zz} + u_{tt} = 0.$$

Производящие функции его законов сохранения выглядят так: $\Psi = xA(y, z, t) + B(y, z, t)$, где A и B — произвольные решения системы

$$A_{zz} + A_{tt} = 0, \quad B_{zz} + B_{tt} = A_y.$$

Таким образом, и здесь имеется мощная группа законов сохранения (Н. О. Шаромет).

5.9. Система Кадомцева—Погуде [2], описывающая некоторые нелинейные эффекты в высокотемпературной плазме, записывается так:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + [\nabla_{\perp} \varphi \times \nabla_{\perp} \psi]_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\perp} \varphi + [\nabla_{\perp} \varphi \times \nabla_{\perp} \Delta_{\perp} \varphi]_z = \frac{\partial}{\partial z} \Delta_{\perp} \psi + [\nabla_{\perp} \psi \times \nabla_{\perp} \Delta_{\perp} \psi]_z,$$

где $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; $\nabla_{\perp} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ и $[u \times v]_z = u_x v_y - u_y v_x$. Здесь x, y, z, t — стандартные пространственно-временные координаты; φ — потенциал скорости; ψ — потенциал поперечной составляющей магнитного поля.

Производящие функции законов сохранения этого уравнения, не зависящие от производных порядка больше единицы, исчерпываются следующими [3]:

$$\left\| \begin{array}{c} \alpha(x^2 + y^2) \\ 4\alpha \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{c} \beta(x^2 + y^2) \\ -4\beta \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{c} [ax + by + c]G \\ 0 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\|,$$

где $\alpha = \alpha(z + t)$, $\beta = \beta(z - t)$, $G = G(z, t)$ — произвольные функции своих аргументов; a, b, c — произвольные константы. В качестве примера укажем вид сохраняющегося тока, отвечающего первому типу производящих функций:

$$\begin{aligned} & \{ \alpha [2xg - yh - r^2 p - 4\psi\varphi_y] + \alpha' [2x(\varphi - \psi) - r^2(\varphi_x - \psi_x)], \\ & \alpha [4\psi\varphi_x + r^2 q - xh - 2yg] + \alpha' [2y(\varphi - \psi) - r^2(\varphi_y - \psi_y)], \\ & -\alpha(r^2 \Delta_{\perp} \psi + 4\varphi), \quad \alpha(r^2 \Delta_{\perp} \varphi + 4\psi) \}. \end{aligned}$$

Здесь $r^2 = x^2 + y^2$; $p = \varphi_y \Delta_{\perp} \varphi - \psi_y \Delta_{\perp} \psi$; $q = \varphi_x \Delta_{\perp} \varphi - \psi_x \Delta_{\perp} \psi$; $g = \varphi_x \varphi_y - \psi_x \psi_y$; $h = \varphi_x^2 - \varphi_y^2 - \psi_x^2 - \psi_y^2$.

6. Симметрии и законы сохранения. До сих пор довольно распространено мнение, что законы сохранения являются проявлениями тех или иных свойств симметрии рассматриваемой системы. По-видимому, его происхождение можно объяснить тем, что до

недавнего времени теорема Нётер была единственным общим механизмом конструирования сохраняющихся величин. Так как теорема Нётер справедлива лишь для систем НДУ, получаемых из вариационных принципов, и для таких систем согласно обратной теореме Нётер всякому закону сохранения соответствует некоторая симметрия, это мнение является обоснованным только для таких НДУ. Поскольку методы п. 3 позволяют вычислять законы сохранения и для произвольных систем НДУ, вопрос о соотношении концепций симметрии и закона сохранения можно подвергнуть экспериментальной проверке. Например, для уравнения Заболотской—Хохлова (см. пример 5.8) можно явно вычислить алгебру ее высших симметрий. Эта алгебра оказывается конечномерной, тогда как группа законов сохранения в этом случае бесконечномерна. По этой причине законы сохранения не могут в рассматриваемом случае соответствовать симметриям при посредстве того или иного механизма. Тем самым надо признать, что концепции закона сохранения и симметрии являются независимыми.

В связи с последним полезно дать точное определение понятия высшей симметрии системы НДУ, которое было упомянуто выше. Эволюционная система НДУ

$$u_t = f(x, u, u_x, u_{xx} \dots) \quad (6)$$

называется симметрией (высшей) системы $F(x, u, u_x, \dots) = 0$, которую обозначим \mathcal{U} , если всякое решение $u(x, t)$ системы (6), являющееся при $t = 0$ решением системы \mathcal{U} , будет ее решением и при любом другом значении t , когда выполнены некоторые «граничные» условия согласования. Классическая теория симметрий Ли, современное развитие и внедрение результатов которой в математическую физику было осуществлено Л. В. Овсянниковым и его школой [4, 5], вкладывается в указанную концепцию. Точнее, классическая теория (она обычно формулируется в других терминах) отвечает тому случаю, когда в системе (6) функция f зависит только от x, u, u_x и удовлетворяет еще некоторым другим ограничениям. Прилагательное «высшая» употреблено с целью подчеркнуть, что в системе (6) допускаются функции f , зависящие от производных сколь угодно высокого порядка.

Описанный в п. 3 оператор l_F имеет прямое отношение к проблеме нахождения симметрий системы $F = 0$. Именно система (6) является ее симметрией только тогда, когда

$$l_F(f) = 0 \text{ в силу } \mathcal{U}. \quad (7)$$

Последний факт указывает на двойственность концепций симметрии и закона сохранения, ввиду того что для нахождения тех и других приходится решать сопряженные системы уравнений (4) и (7).

Это замечание позволяет наглядно уяснить природу теоремы Нётер. Вспомним (см. п. 4), что система НДУ $F = 0$ локально простирается из вариационных принципов только тогда, когда

$l_F = l_F^*$. Поэтому в данном случае системы (4) и (7) совпадают, и, значит, всякому закону сохранения отвечает некоторая симметрия.

Можно показать, что построенное таким образом отображение законов сохранения в симметрии представляет собой обращение и усиление классической теоремы Нётер, которая, как известно, всякой симметрии лагранжиана сопоставляет закон сохранения соответствующего ему уравнения Эйлера—Лагранжа. Усиление здесь проистекает из-за того, что симметрии лагранжиана являются одновременно и симметриями соответствующего уравнения Эйлера—Лагранжа, но не наоборот.

Итак, теорема Нётер означает, что производящая функция всякой симметрии лагранжиана одновременно является производящей функцией некоторого закона сохранения уравнения Эйлера—Лагранжа. Подчеркнем, что производящая функция симметрии самого уравнения Эйлера—Лагранжа не обязана быть производящей функцией какого-либо его закона сохранения, так как не всякому решению системы (4) соответствует некоторый закон сохранения.

Из сказанного видно, что механизм превращения законов сохранения в симметрии типа обратной теоремы Нётер справедлив на самом деле для значительно более широкого класса уравнений, чем уравнения Эйлера—Лагранжа, а именно для таких уравнений $\mathcal{U} = \{F = 0\}$, для которых имеет место равенство $l_F^* = \lambda l_F$ в силу \mathcal{U} . Здесь $\lambda = \lambda(x, u, u_x \dots)$. Простейший пример такого рода — косо сопряженное уравнение $u_t - u_x = 0$. Для него $l_F^* = -l_F$.

Отметим также, что для допускающих гамильтонову форму систем НДУ всякому закону сохранения естественным образом соответствует некоторая симметрия.

7. Теперь, зная, что понятие закона сохранения является правильным перенесением понятия интеграла ОДУ на уравнения в частных производных, и умея находить все законы для заданной системы НДУ, можно вернуться к исходному вопросу, существуют ли вполне интегрируемые системы НДУ в существенно пространственно неоднмерном случае? В духе изложенного подхода поставленный вопрос означает, существуют ли НДУ с числом независимых переменных больше двух, обладающие полным набором законов сохранения? Набор мы считаем полным, если всякое решение рассматриваемой системы НДУ полностью определяется отвечающими ему значениями сохраняющихся величин. Просмотр примеров, приведенных в п. 5, показывает, что надежда найти содержательный пример такого рода является весьма маловероятной. Например, нелинейное уравнение Шредингера, вполне интегрируемое при $n = 1$, неинтегрируемо при $n > 1$ хотя бы потому, что обладает лишь конечным числом законов сохранения [6]. Уравнение Заболотской—Хохлова также не является вполне интегрируемым, хотя и обладает бесконечным запасом законов сохранения.

Системы с конечным числом степеней свободы, описываемые ОДУ, вполне интегрируемы «в малом» т. е. в достаточно малой окрестности фазового пространства, вблизи неособых точек. Все аспекты явления «неинтегрируемости» проявляются при изучении системы «в целом». Приведенные выше соображения, казалось бы, показывают, что для систем с бесконечным числом степеней свободы мы не вправе ожидать интегрируемости даже «в малом». Этот пессимистический вывод, несомненно, является вполне обоснованным, если понятию интегрируемости придать точный смысл так, как это было сделано выше. Однако сегодня у нас есть определенные основания для разумного оптимизма «в малом». Дело в том, что обсуждавшееся выше понятие закона сохранения является локальным. Это означает, что рассмотренные сохраняющиеся токи и их производящие функции зависели от неизвестных функций и их производных, т. е. представляли собой дифференциальные (локальные) операторы. Развитие геометрической теории НДУ в последнее время показало, что перенесение идей теории ОДУ на уравнения в частных производных требует привлечения нелокальных понятий, т. е. понятий, выражаемых операциями типа интегродифференциальных. Аккуратная математическая реализация нелокальности, как нам сейчас представляется, естественно получается при помощи накрытий НДУ [7]. В частности, имеется много оснований ожидать, что любое регулярное НДУ обладает набором нелокальных законов сохранения, достаточных по крайней мере для полной интегрируемости «в малом».

Рассмотрение обсуждавшихся здесь вопросов в более широком математическом контексте можно найти в [8, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
2. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. Нелинейные винтовые возмущения плазмы в токамаке // ЖЭТФ. 1973. Т. 65, № 2, С. 579—589.
3. Самохин А. В. Нелинейные МГД-уравнения: симметрии, решения и законы сохранения // ДАН СССР. 1985. Т. 285. № 5. С. 1101—1106.
4. Освянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
5. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
6. Zakharov V. E., Shulman E. J. Degenerative dispersion laws, motion invariants and kinetic equations // Physica D. 1980. Vol. 1, N 2. P. 192—202.
7. Krasilshchik I. S., Vinogradov A. M. Nonlocal symmetries and the theory of coverings // Acta Appl. Math. 1984. Vol. 2. P. 79—96.
8. Vinogradov A. M. Local symmetries and conservation laws // Ibid. P. 21—78.
9. Виноградов А. М. Геометрия пространств джетов, категория дифференциальных уравнений и вторичное дифференциальное исчисление // Изв. вузов. Математика. 1986. № 1. С. 13—21.

ОПИСАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО КАСКАДА В РАМКАХ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Е. Б. ГЛЕДЗЕР, А. М. ОБУХОВ

Введение

Гидродинамические характеристики турбулентных течений жидкостей и газов при достаточно больших числах Рейнольдса характеризуются макроскопическими флуктуациями, создаваемыми наличием в этих течениях многочисленных вихрей различных размеров. Благодаря этому говорят о «хаотичности» гидродинамических полей в турбулентном потоке. Представление о турбулентности как иерархии вихрей с существенно отличающимися масштабами лежит в основе каскадной модели, из которой исходил А. Н. Колмогоров при формулировке [1, 2] основных положений теории локальной структуры развитого турбулентного потока. Эта теория позволила подойти к расчету энергетических характеристик реально наблюдаемых турбулентных течений в атмосфере и океане. На основе спектрального описания турбулентности аналогичные результаты были получены А. М. Обуховым [3, 4].

Последовательность масштабов различных «ярусов» турбулентного каскада заключена между длиной L_0 , сравнимой с характерным масштабом системы, и внутренним масштабом турбулентности $\lambda_k = \sqrt[4]{\nu^3/\varepsilon}$, определяемым кинематической вязкостью ν и средней диссипацией энергии на единицу массы ε . Колмогоровский микромасштаб λ_k отвечает предельной частоте (в k -пространстве) $k_* = \sqrt[4]{\varepsilon/\nu^3}$.

Согласно механизму преобразования энергии в турбулентном потоке (в качественной форме представление о таком механизме было предложено Л. Ричардсоном еще в 1922 г.) имеет место каскадный процесс порождения мелких вихрей более крупными (благодаря их гидродинамической неустойчивости) [5].

Таким способом в гидродинамической системе при малой вязкости осуществляется перенос кинетической энергии по спектру масштабов движений в сторону мелких масштабов, вплоть до мельчайших «вихрей», где происходит диссипация.

Использование исходных уравнений гидродинамики для количественного изучения каскадного процесса передачи энергии в развитом турбулентном потоке приводит к огромным математическим трудностям. В связи с этим представляет интерес построение упрощенных динамических моделей для гидродинамических процессов, связанных с возникновением и развитием турбулентности. Теория локально-изотропной турбулентности является по существу статистической, а получить соответствующие закономерности на основе динамического рассмотрения пока не удается.

Попытка построения динамической дискретной модели турбулентности была предпринята одним из авторов на основе введенного им понятия систем гидродинамического типа [6—8].

Системой гидродинамического типа (СГТ) называется система обыкновенных квадратично-нелинейных дифференциальных уравнений, определенных в n -мерном линейном фазовом пространстве:

$$\dot{v}^i = \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i v^j v^k \quad (1)$$

допускающих положительно определенный интеграл энергии $E = \frac{1}{2} g_{ij} v^i v^j$, $dE/dt = 0$, и сохраняющих фазовый объем (условия Лиувилля $\partial \dot{v}^i / \partial v^i = 0$). Из этих условий следует, что, кроме очевидной симметрии по нижним индексам, динамический тензор удовлетворяет еще двум дополнительным ограничениям:

$$\gamma_k = \Gamma_{ik}^i = 0, \quad (2)$$

$$\Gamma_{i,jk} + \Gamma_{r,ij} + \Gamma_{j,ki} = 0, \quad \Gamma_{i,jl} = g_{il} \Gamma_{jl}^i, \quad (3)$$

выражающим соответственно условие регулярности — сохранение фазового объема и закон сохранения энергии.

1. Преобразование энергии в триплете

Простейшей нетривиальной СГТ является триплет — система, изоморфная классическому гироскопу Эйлера, уравнения движения которого удобно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= a_1 u_2 u_3, & \dot{u}_2 &= a_2 u_1 u_3, & \dot{u}_3 &= a_3 u_1 u_2, \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Напомним, что к этому виду приводятся уравнения движения идеальной жидкости внутри эллипсоидальной полости для случая, когда поле скорости является линейной функцией координат. Тогда u_i пропорциональны параметрам Пуанкаре, линейно связанным с компонентами вихря. Заметим, что в рамках трехмодового приближения могут быть описаны процессы потери устойчивости значительного класса гидродинамических течений [8—10].

Рассмотрим другое представление системы (4), полученное линейной заменой переменных

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 &= p(v_2^2 - v_1^2) - \lambda_0 v_0 + f, & \dot{v}_1 &= p v_0 v_1 - \lambda_0 v_1, \\ \dot{v}_2 &= -p v_0 v_2 - \lambda_0 v_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где введены дополнительные диссипативные слагаемые, пропорциональные вязкости, а также учтено действие внешних сил. Если фазовые координаты v_0, v_1, v_2 имеют размерность скоростей (энергия $E = \frac{1}{2}(v_0^2 + v_1^2 + v_2^2)$, отнесенная к единице массы, имеет размерность квадрата скорости), то коэффициент взаимодействия p имеет размерность волнового числа.

Как показывает простой анализ динамики системы (5), если число Рейнольдса $R = fp/\lambda_0^2$ по модулю меньше единицы: $|R| < 1$, то в системе устанавливается стационарный режим, в котором

$$v_0 = f/\lambda_0, \quad v_1 = v_2 = 0.$$

В случае, когда $|R| > 1$, сколь угодно малое возмущение переведет систему из этого (уже неустойчивого) состояния в новое, которое определяется как знаком f , так и знаком мод v_1 и v_2 : при $f > 0$ устойчивым будет стационарное решение

$$v_0 = p^{-1}\lambda_0, \quad v_1 = \pm \left(\frac{f}{p} - \frac{\lambda_0^2}{p^2} \right)^{1/2}, \quad v_2 = 0,$$

при $f < 0$

$$v_0 = -p^{-1}\lambda_0, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = \pm \left(\frac{|f|}{p} - \frac{\lambda_0^2}{p^2} \right)^{1/2}.$$

Отметим, что согласно уравнениям (5) величины v_1 и v_2 сохраняют знак начальных возмущений. Поэтому в зависимости от знака f возбуждаются моды v_1 и v_2 , знак которых определен начальными данными.

Итак, мы получили элементарный нелинейный «преобразователь» возмущений: подводимое к моде v_0 силой f возбуждение либо остается в v_0 , либо перераспределяется между v_0 и одной из связанных с ней мод v_1 или v_2 . Другими словами, происходит перенос кинетической энергии от моды v_0 к другим модам триплета.

В дальнейшем при описании сложных систем будем обозначать полученную «элементарную ячейку» каскада графом или треугольником (рис. 1).

2. Простейшая СГТ каскадного типа

Основой для дальнейшего использования рассмотренного нелинейного «преобразователя» энергии является следующий «принцип суперпозиции», связанный с общей структурой СГТ. Зафиксируем метрический тензор g_{ik} и рассмотрим сумму двух динамических тензоров: $\Gamma_{jk}^{(\alpha)i}$ и $\Gamma_{jk}^{(\beta)i}$. Очевидно, что в силу линейности условий (2), (3) сумма $\Gamma_{jk}^{(\alpha)i} + \Gamma_{jk}^{(\beta)i}$ удовлетворяет этим условиям, если им удовлетворяют тензоры $\Gamma_{jk}^{(\alpha)i}$ и $\Gamma_{jk}^{(\beta)i}$.

Таким образом, принцип суперпозиции позволяет строить сложные системы из более «простых блоков», поведение которых достаточно хорошо изучено.

В качестве этих блоков целесообразно взять рассмотренные выше простейшие системы (триплеты), определяемые единственным геометрическим параметром p . Обратную величину $l = 1/p$ естественно назвать динамическим масштабом соответствующего триплета.

На рис. 1 схематически с помощью введенного графа представлена простейшая дискретная модель нелинейного каскада [7, 8, 11—14], построенная по принципу суперпозиции из подобных

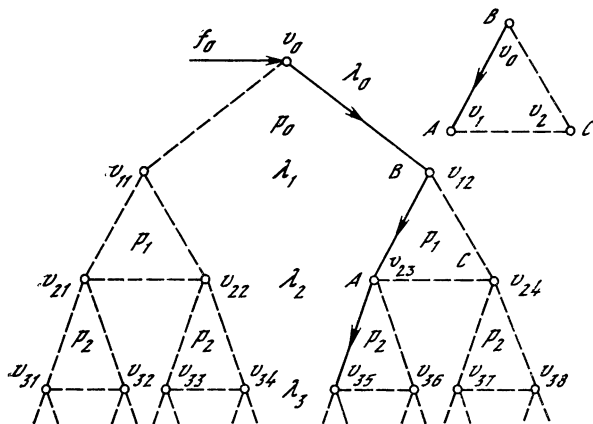


Рис. 1. Многоярусная модель нелинейного каскада и элементарный «преобразователь» возмущений (вверху справа)

элементов различных масштабов l_i . Элементы каскада сцеплены между собой следующим образом. Первый ярус каскада состоит из одного триплета, на моду v_0 которого действует сила f_0 . Моды v_{11} и v_{12} являются вершинами триплетов следующего яруса и могут отдавать энергию модам v_{21} , v_{22} , v_{23} и v_{24} и т. д. Соответствующие уравнения с помощью (5) и принципа суперпозиции записываются в следующей форме:

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_0 &= p_0 (v_{11}^2 - v_{12}^2) - \lambda_0 v_0 + f_0, \\
 \dot{v}_{11} &= -p_0 v_0 v_{11} + p_1 (v_{21}^2 - v_{22}^2) - \lambda_1 v_{11}, \\
 \dot{v}_{12} &= p_0 v_0 v_{12} + p_1 (v_{23}^2 - v_{24}^2) - \lambda_1 v_{12}, \\
 \dot{v}_{21} &= -p_1 v_{11} v_{21} + p_2 (v_{31}^2 - v_{32}^2) - \lambda_2 v_{21}, \\
 \dot{v}_{22} &= p_1 v_{11} v_{22} + p_2 (v_{33}^2 - v_{34}^2) - \lambda_2 v_{22}, \\
 \dot{v}_{23} &= -p_1 v_{12} v_{23} + p_2 (v_{35}^2 - v_{36}^2) - \lambda_2 v_{23}, \\
 \dot{v}_{24} &= p_1 v_{12} v_{24} + p_2 (v_{37}^2 - v_{38}^2) - \lambda_2 v_{24}, \\
 \dot{v}_{i,2^{i-1}} &= -p_i v_{i-1,2^{i-1}} v_{i,2^{i-1}} + p_i (v_{i+1,4^{i-3}}^2 - v_{i+1,4^{i-2}}^2) - \lambda_i v_{i,2^{i-1}}, \\
 \dot{v}_{i,2^k} &= p_{i-1} v_{i-1,2^k} v_{i,2^k} + p_i (v_{i+1,4^{i-1}}^2 - v_{i+1,4^k}^2) - \lambda_i v_{i,2^k}, \quad 1 \leq k \leq 2^{i-1}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

В динамических переменных v_{ij} первым индексом пронумерованы «ярусы», вторым индексом — компоненты триплетов, расположенные на заданном ярусе. Каждому триpletу типа (5), входящему в систему, отвечает свой масштаб $l_i = 1/p_i$. В уравнения включены диссипативные слагаемые с коэффициентами $\lambda_i = \alpha^2 \nu p_i^2$, α — множитель порядка единицы¹. Для всех уравнений данного яруса величины p_i и λ_i одинаковы.

¹ В спектральном представлении $\lambda = \nu k^2$, где k — волновое число. Из соображений подобия k и p_i , имеющие одинаковую размерность, приближенно считаются пропорциональными. Фактически α может быть существенно больше единицы. Для простоты можно формально положить $\alpha = 1$, понимая под ν некоторую «эффективную вязкость».

По построению при $\lambda_i = 0$ и $f_0 = 0$ система (6) сохраняет энергию $E = \frac{1}{2}v_{ij}^2$, а в общем случае имеет место уравнение баланса энергии

$$dE/dt = W_0 - \Phi,$$

где $W_0 = f_0 v_0$ — подводимая мощность; $\Phi = \sum \lambda_i v_{ij}^2$ — диссипация энергии.

Поскольку уравнения движения идеальной жидкости допускают группу подобных преобразований, можно предположить в соответствии с основной гипотезой Колмогорова об автомодельности каскада, что p_i образуют геометрическую прогрессию со знаменателем

$$q = p_{i+1}/p_i > 1. \quad (7)$$

Величину q можно назвать «коэффициентом измельчения» турбулентных возмущений.

3. Развитие возмущений в каскадной модели и закон Колмогорова—Обухова

Рассмотрим процесс возбуждения каскадной системы (6) при изменении внешней регулярной силы f_0 , являющейся амплитудой некоторого гладкого крупномасштабного с характерными размерами l_0 воздействия на жидкость. Пусть в начальный промежуток времени f_0 достаточно мала. Образующееся в результате прямого воздействия силы поле скорости характеризуется амплитудой v_0 и масштабом l_0 . Все возмущения с меньшими масштабами имеют величины, не выходящие за пределы термодинамических флуктуаций в рассматриваемом объеме жидкости.

При увеличении амплитуды силы f_0 происходит обострение градиентов поля скорости, которые могут превысить критические значения, определяемые диссипативными слагаемыми, в результате чего первоначально возникшее поле скорости становится неустойчивым. Благодаря начальным «затравкам» (тепловым флуктуациям) на фоне исходного течения возникает новое возмущение поля скорости, амплитуда которого в зависимости от знака v_0 имеет величину v_{11} или v_{12} , а его характерные размеры в среднем меньше (в трехмерном случае), чем в первоначальном течении².

Из первых уравнений системы (6), так же как и для системы (5), легко получить, что возбуждение амплитуд v_{11} (при $f_0 < 0$, $v_0 < 0$) или v_{12} (при $f_0 > 0$, $v_0 > 0$) происходит при $|f| > \lambda_0 \lambda_1 / p_0$. Знак возбужденных мод v_{11} или v_{12} зависит от малых начальных флуктуаций, т. е. случаен.

При дальнейшем увеличении f_0 растут и амплитуды мод v_{11} или v_{12} . Соответствующие возмущения поля скорости становятся неустойчивыми. При этом в зависимости от знаков мод v_{11} и v_{12} воз

² В двумерном случае представление системы суперпозицией триплетов типа (5) уже невозможно и наблюдается поток энергии в обратном направлении (от малых масштабов к крупным [15, 16]).

соответствующее «закону 2/3»:

$$v_i^0 = q^{2/3} W_0^{1/3} p_i^{-1/3}, \quad W_0 = f_0 v_0. \quad (9)$$

Определим теперь из условий обрыва цепочки на n -м уровне величину p_n — верхнюю границу спектра. Подставляя (9) в соотношение $p_{n-1} v_{n-1} \simeq \lambda_n$, получим, используя (7),

$$p_n \sim W_0^{1/4} v^{-3/4} q^{-1/3}, \quad v = \lambda_0 p_0^{-2}. \quad (10)$$

Эта оценка совпадает с внутренним масштабом турбулентности, определяемым по теории подобия с помощью кинематической вязкости и средней диссипации энергии на единицу массы ε (равной в стационарном режиме подводимой мощности W_0):

$$k_* = \lambda_i^{-1} = \varepsilon^{1/4} v^{-3/4}. \quad (11)$$

Стационарные решения цепочки (8) необходимо исследовать на устойчивость. В простейшем случае решения (9) это исследование облегчается при условии, когда на всех ярусах $i < n$ положим $\lambda_i = 0$, а на последнем ярусе системы примем $\lambda_n^* = p_{n-1} v_{n-1}^0$.

Тогда цепочка записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 &= f_0 - p_0 v_1^2, & \dot{v}_i &= p_{i-1} v_{i-1} v_i - p_i v_{i+1}^2, & 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{v}_n &= p_{n-1} v_{n-1} v_n - \lambda_n^* v_n \end{aligned} \quad (12)$$

и имеет точное стационарное решение (9). Как показано в работах [17—19], решение (9) системы (12) является неустойчивым при $n \geq 3$.

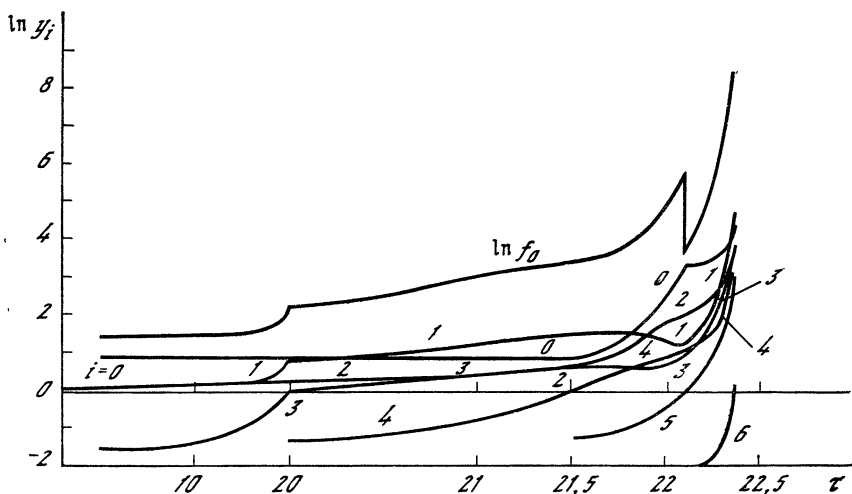


Рис. 2. Возбуждение последовательных ярусов в каскадной цепочке (8) ($y_i = q^{-i-2} v_i$, $\tau = p_0 t$, $q = 1,1$)

Цифры у кривых — номер моды i

Можно рассмотреть несколько иную параметризацию диссипации путем введения «квадратичного трения» на последнем ярусе системы (12):

$$\dot{v}_n = p_{n-1}v_{n-1}v_n - \mu v_n^2, \quad \mu = p_{n-1}v_{n-1}^0/v_n^0. \quad (13)$$

Оказывается, что цепочка (12) с таким уравнением на последнем ярусе устойчива при всех n при выполнении условия $q > \sqrt[3]{8}$ [19].

В заключение этого раздела приведем результаты численного расчета развития нескольких ярусов каскадной цепочки (8) (рис. 2).

4. Динамика развития возмущений в длинных цепочках

Рассмотрим более подробно вопросы устойчивости стационарных решений и развития возмущений в каскадной цепочке (8) с большим числом звеньев. Если при этом принять во внимание, что диссипация в цепочке начинает играть существенную роль при $n \gg 1$, то из условия равенства по порядку величин обратного внутреннего масштаба турбулентности $k_* = \lambda_i^{-1}$ (11) и полученного с помощью коэффициента дробления масштабов (7) волнового числа $p_n = p_0 q^n$ имеем

$$p_0 q^n \sim \lambda_i^{-1}. \quad (14)$$

Если $n \rightarrow \infty$, то из (14) следует $q \rightarrow 1$, т. е. для достаточно длинных цепочек (при фиксированных вязкости и питающей мощности) коэффициент дробления близок к единице. Это условие позволяет более детально исследовать систему (8) путем перехода к континуальному аналогу рассматриваемой системы.

Заметим, что такой переход от дискретных систем к непрерывным осуществляется неоднозначно. Легко убедиться, что общее стационарное решение системы (12) имеет вид

$$v_i = q^{2/3} W_0^{1/3} p_i^{-1/3} C^{(-1/2)^i},$$

где C — произвольная положительная постоянная. Отсюда следует, что особенностью цепочки (12) является отличие в поведении мод с четными и нечетными номерами.

Проведем разделение мод с различной четностью в уравнениях (8), которые удобно записать в безразмерном виде

$$v_i = q^{2/3} W_0^{1/3} p_i^{-1/3} x_0^{-1/3} x_i, \quad \tau = t v p_0^2 R, \quad R^2 = f (v^2 p_0^3 q^{2/3})^{-1}, \quad (15)$$

$$\dot{x}_0 = -\frac{x_0}{R} - x_1^2 + 1, \quad \dot{x}_i = -\frac{\sigma^3}{R} x_i + \sigma^i (x_{i-1} x_i - x_{i+1}^2),$$

$$i \geq 1, \quad \sigma = q^{2/3},$$

где точка означает дифференцирование по безразмерному времени τ , а R — аналог числа Рейнольдса, определяемого по напору.

Введем обозначения для мод с четными и нечетными индексами и в невязком пределе ($R \rightarrow \infty$) из (15) получим

$$\begin{aligned} x_{2m} &= u_m, & x_{2m+1} &= v_m, & m &= 0, 1, \dots, \\ \dot{u}_m &= \sigma^{2m}(v_{m-1}u_m - v_m^2), & \dot{v}_m &= \sigma^{2m+1}(u_mv_m - u_{m+1}^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Функции u_m и v_m представим в виде

$$u_m = u(m\Delta), \quad v_m = v(m\Delta), \quad \Delta = \ln q, \quad q > 1.$$

Переход [20] к континуальному аналогу системы (16) осуществляется при $q \rightarrow 1$, $\Delta \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$, $\xi = m\Delta$:

$$v_{m-1} = v(\xi - \Delta) = v(\xi) - \Delta v_\xi, \quad v_\xi = \partial v / \partial \xi,$$

$$u_{m+1} = u(\xi + \Delta) = u(\xi) + \Delta u_\xi.$$

С точностью до слагаемых порядка Δ^2 из (16) получим следующую нелинейную систему уравнений с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} u_\tau &= a \left[v(u - v) - \Delta uv_\xi - \frac{\Delta^2}{2} uv_{\xi\xi} \right], & a &= e^{\frac{4}{3}\xi}, \\ v_\tau &= \alpha a \left[u(v - u) - 2\Delta uu_\xi - \frac{\Delta^2}{2} (uu_{\xi\xi} + u_\xi^2) \right], & \alpha &= e^{\frac{2}{3}\Delta}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для выяснения типа полученных уравнений следует рассмотреть линеаризацию системы (17) вблизи стационарного решения $u^0 = v^0 = 1$, $u = 1 + u'$, $v = 1 + v'$, отвечающего согласно (15) равновесному режиму турбулентности («закону 2/3» для поля скорости). Тогда, исключая из системы u' , с точностью до Δ^2 имеем телеграфное уравнение общего типа

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - m^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) v' &= b \frac{\partial v'}{\partial \tau} + d \frac{\partial v'}{\partial \xi}, \\ m^2 &= \frac{7}{2} \Delta^2 \alpha a^2, & b &= a(1 + \alpha), & d &= \Delta 3 \alpha a^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Пользуясь квазиклассическим приближением, справедливым, как легко показать, при $\tau \ll \Delta^{-1}$, получаем следующие элементарные решения уравнения (18):

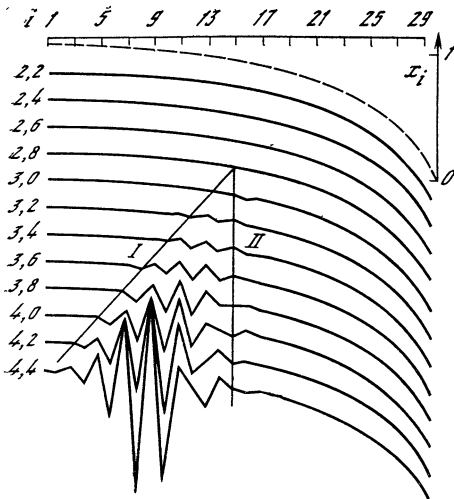
$$\begin{aligned} v' &= \varepsilon_1 \exp[\lambda_1 \tau + ik(\xi + c\tau)] + \text{к. с.}, \\ u' &= -\varepsilon_1 \exp[\lambda_1 \tau + ik(\xi + c\tau)] + \text{к. с.}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} v' &= \varepsilon_2 \exp[\lambda_2 \tau + ik(\xi - c\tau)] + \text{к. с.}, \\ u' &= \varepsilon_2 \exp[\lambda_2 \tau + ik(\xi - c\tau)] + \text{к. с.}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\lambda_1 = a(1 + \alpha) - \Delta^2 k^2 \frac{7}{2} \frac{a\alpha}{1 + \alpha}, \quad \lambda_2 = \Delta^2 k^2 \frac{7}{2} \frac{a\alpha}{1 + \alpha},$$

$$c = \Delta \frac{3}{2} \frac{2a\alpha}{1 + \alpha}, \quad \alpha = e^{\frac{2}{3}\Delta}.$$

Рис. 3. Динамика мод различной четности в каскадной системе (15)



Согласно (19) растущие во времени решения описывают возмущения, передвигающиеся в сторону увеличения масштабов. Второй тип решений (20) отвечает невозрастающим возмущениям (если пренебречь слагаемыми порядка Δ^2), распространяющимся в сторону уменьшения масштабов. Таким образом, в системе при потере устойчивости стационарного решения возникают и растут только распространяющиеся в сторону малых волновых чисел возмущения.

В начальный период такого распространения, когда справедливо (19), для среднего квадрата амплитуд двух соседних уровней имеем с точностью до ε_1

$$\frac{x_i^2 + x_{i+1}^2}{2} = \frac{u^2 + v^2}{2} = \frac{(1+u')^2 + (1+v')^2}{2} \simeq 1$$

($i = 2m$, $\xi = m\Delta$), что следует из (19) в силу противофазности u' и v' . Это означает, что в начальный период разрушения решения (9) «закон 2/3» имеет место для значений энергии, осредненных по смежным модам.

Полученные на основе континуальной аппроксимации оценки сопоставлялись с результатами численного счета системы (15) с учетом диссипативных слагаемых $-x_i\sigma^{3i}/R$ на каждом уровне. На рис. 3 приведены результаты счета при $q = 1,1, 0 \leq i \leq 29$. Условие $x_{29}^0 = 0$ определяет величину $R \simeq 114,6662$. При этом $x_0^0 = 1 - 1/2\sigma^2 R$. Начальное состояние задается близким к стационарному решению x_i^0 системы (15), отмеченному на рис. 3 штриховой кривой. Цифры у кривых показывают, к какому моменту времени относятся величины x_i . На рис. 3 римскими цифрами указаны также характеристики системы (17), вычисленные с точностью до членов первой степени по Δ .

Как следует из формул (19), инкремент, пропорциональный $a = e^{4/\xi}$, увеличивается с ростом ξ , т. е. с номером моды цепочки. Поэтому если уровень начальных отклонений от стационарного решения одинаков для всех мод системы, то неустойчивость начинается при больших ξ , т. е. в мелкомасштабной области каскада. Практически для цепочки с трением на всех модах (15) интервал начала разрушения стационарного решения определяется балансом между инкрементом и усиливающейся с увеличе-

нием номеров системы диссипаций. Поэтому для системы (15) (см. рис. 3) развитие возмущений начинается уже в области диссипации, а для величины соответствующего безразмерного «волнового числа» $\xi_0 = 1/2 \ln p/p_0$ можно из (15), (16) получить выражение

$$\xi_0 = \frac{3}{8} \ln \frac{2R}{3(2C_1 + 1)}, \quad C_1 = (2\sigma^2 - 1 - \sigma^{-2})^{-1},$$

которое согласуется с результатами численного счета на рис. 3.

Проведенное изучение неустойчивости стационарных решений рассматриваемой системы показывает, что достаточно длинные каскадные цепочки, являясь ветвью общей многоуровневой модели (6), выступают как усилитель отклонений от колмогоровского режима, возникающих в мелкомасштабной части спектра. При этом система ведет себя так, что в спектре интенсивность движений некоторой последовательности масштабов начинает увеличиваться (четные моды u) с одновременным уменьшением возмущений с масштабами, находящимися в промежутках между ними (нечетные моды v). Как только интенсивность движений некоторого масштаба, ранее соответствовавшая равновесному режиму, перейдет через нуль, согласно предлагаемой общей каскадной модели (6) начинает развиваться другая ветвь системы (6), связанная с меняющейся знак компонентой v_{ij} .

Действительно, согласно уравнениям если мода $v_{i-1, j}$ меняет знак с положительного на отрицательный, то вместо развившейся ранее моды $v_{i, 2j}$ начинает возбуждаться переменная $v_{i, 2j-1}$. При этом участок ветви действовавшей ранее цепочки лишается притока энергии и будет загухать. Этот период перестройки системы характеризуется тем, что ряд степеней свободы ее уже отмирает, а новые степени еще не развились, т. е. в течение некоторого времени в системе работает только некоторое количество верхних ярусов, но мелкомасштабные движения развиты еще достаточно слабо. В этом процессе «переброса» решающую роль играет эффект усиления высокочастотного шума (в частности, тепловых флуктуаций) длинными цепочками, которые отвечают равновесному режиму.

Следует отметить, что системы гидродинамического типа с учетом диссипации и внешнего возбуждения уже при небольшом числе степеней свободы допускают решения типа странных аттракторов [21]. Однако при исследовании энергетики сложных систем учет таких решений не является необходимым, что связано с рассмотрением осредненных характеристик.

5. Феноменологическое описание усеченных цепочек

Для приложений к задачам техники и геофизики особое значение приобретает феноменологическое описание турбулентности, использующее приближенные формулы для определения напряжений Рейнольдса. При этом обычно вводится понятие «турбулентной вязкости». То, что в таких теориях называется «осреднен-

ными полями», целесообразно заменить представлением о сглаженных полях, отвечающих некоторому масштабу сглаживания, который много больше колмогоровского масштаба λ_k , $l_m \gg \lambda_k$, но который в некоторых задачах может быть существенно меньше внешнего масштаба турбулентности L_0 .

Покажем теперь, что исследование каскадных моделей может быть полезным и для феноменологического описания турбулентных потоков при заданном масштабе сглаживания, соответствующем предельному волновому числу $k_m = \pi/l_m$.

В рамках многоярусных каскадных моделей такому описанию отвечают уравнения, замкнутые на некотором ярусе $m < n$, где n — полное число уровней, определяемое диссипацией (см. разд. 4). Естественно, обрыв системы на m -м уравнении должен сопровождаться введением некоторых дополнительных величин, описывающих эффект влияния отбрасываемых ярусов на динамику сглаженных полей (моды с $k < k_m$).

В последнее время в ряде работ (современное состояние вопроса изложено в [22]) рассмотрено влияние релаксации касательных рейнольдсовых напряжений в расчетах турбулентных пограничных слоев. В работе [23] на основе указанной А. М. Обухова аналогии с динамикой разреженных газов для определения $\langle u_1 v_1 \rangle$ (u_1, v_1 — пульсации поля скорости) используется релаксационное уравнение максвелловского типа

$$S_t \frac{\partial \langle u_1 v_1 \rangle}{\partial t} + \langle u_1 v_1 \rangle = -v_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}, \quad (21)$$

где $\langle u \rangle$ — средняя скорость потока.

Уравнение (21) отличается от известного выражения для напряжений Рейнольдса лишь первым слагаемым левой части, в котором S_t является временем релаксации напряжений Рейнольдса в турбулентном движении. Необходимость учета релаксационных эффектов в расчетах турбулентных течений обусловлена существованием у вихрей различного масштаба «памяти» о предыдущем периоде развития возмущений.

Естественно, что определение коэффициентов S_t и v_t , которые могут зависеть от пространственных и временных переменных, представляет собой сложную задачу. Но для рассмотренной каскадной цепочки (8) она может быть решена [24]. При этом аналогом соотношения (21) будет уравнение

$$S_m \frac{dr_m}{dt} + r_m = F(v_m), \quad r_m = -p_m v_{m+1}^2, \quad (22)$$

где в правой части введена в общем случае нелинейная функция $F(v_m)$, зависящая от скорости m -го уровня. В частности, можно положить

$$F(v_m) = -A_m v_m - B_m v_m^2. \quad (23)$$

Наряду с (22) для определения r_m можно использовать соотношение, представляющее собой первые члены разложения r_m по

степеням нестационарности

$$r_m = F(v_m) + \mu_m dv_m/dt, \quad (24)$$

из которого следует, что r_m зависит от сдвига фаз между модой v_m и ее производной по времени. Подставляя (24) в m -е уравнение ($m < n$) цепочки (8), перепишем его так:

$$(1 - \mu_m) \frac{dv_m}{dt} = p_{m-1} v_{m-1} v_m + F(v_m) - \lambda_m v_m.$$

Видно, что μ_m аналогичен коэффициенту присоединенной массы на m -м уровне каскадной цепочки.

Рассматривая поведение системы вблизи стационарного решения (9), для S_m , μ_m и $F(v_m)$, входящих в (22), (24), можно получить [24] следующие выражения, если ограничиться введенным выше квадратичным трением на последнем ярусе каскадной цепочки:

$$S_m = \mu_m \sigma^{-m}/2, \quad \mu_m = (1 + \sigma/2)^{-1}, \quad F(v_m) = p_m q^{-2/3} v_m^2. \quad (25)$$

Отсюда следует, что времена релаксации S_m последовательности ярусов каскада с ростом номера цепочки уменьшаются. Это отражает факт более продолжительной «памяти» у крупных вихрей, что отмечалось в [22].

Таким образом, приближенное исследование каскадных систем, моделирующих турбулентность, дает возможность определять коэффициенты эффективной вязкости и релаксации, отвечающие конечному числу звеньев цепочек, которые описывают сглаженные гидродинамические поля в развитом турбулентном потоке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30, № 4. С. 299—303.
2. Колмогоров А. Н. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // Там же. Т. 32, № 1. С. 19—21.
3. Обухов А. М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока // Там же. С. 22—24.
4. Обухов А. М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1941. Т. 5, № 4/5. С. 452—466.
5. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1967. Ч. 2. 720 с.
6. Обухов А. М. Об интегральных характеристиках в системах гидродинамического типа // ДАН СССР. 1969. Т. 184, № 2. С. 309—312.
7. Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А. Нелинейные системы гидродинамического типа. М.: Наука, 1974. 160 с.
8. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 366 с.
9. Обухов А. М. Трехмодовое взаимодействие в несжимаемой жидкости // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19, № 5/6. С. 864—871.
10. Довженко В. А., Должанский Ф. В. Генерация вихрей в сдвиговых течениях. Теория и эксперимент // Наст. кн.
11. Обухов А. М. О некоторых общих характеристиках уравнений динамики

- атмосферы // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1971. Т. 7, № 7. С. 695—704.
12. *Oboukhov A. M.* On problem of nonlinear interactions in fluid dynamics // *Gerlands Beitr. Geophys.* 1973. Bd. 82. N 4. S. 282—290.
 13. *Oboukhov A. M., Dolzhansky F. V.* On simple models for simulation of nonlinear processes in convection and turbulence // *Geophys. Fluid Dyn.* 1975. Vol. 6. P. 195—209.
 14. *Обухов А. М.* Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование // УМН. 1983. Т. 38, № 4. С. 101—111.
 15. *Kraichnan R. H.* Inertial ranges in two-dimensional turbulence // *Phys. Fluids.* 1967. Vol. 10, N 7. P. 1417—1428.
 16. *Гледзер Е. Б., Макаров А. Л.* О построении каскадной модели двумерной турбулентности // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15, № 9. С. 899—906.
 17. *Глуховский А. Б.* Об устойчивости нелинейных систем типа цепочек, моделирующих каскадные процессы передачи энергии // Там же. 1975. Т. 11, № 8. С. 779—785.
 18. *Глуховский А. Б.* О влиянии величины коэффициента дробления масштабов на устойчивость нелинейных систем типа цепочек // Там же. № 12. С. 1323—1326.
 19. *Глуховский А. Б.* Эффект квадратичного трения в многоярусных нелинейных системах // Там же. 1977. Т. 13, № 9. С. 917—925.
 20. *Гледзер Е. Б.* Об асимптотическом описании каскадных процессов в нелинейных цепочках с большим числом звеньев // Там же. 1984. Т. 20, № 9. С. 795—801.
 21. *Глуховский А. Б.* Нелинейные системы, являющиеся суперпозициями гиростатов // ДАН СССР. 1982. Т. 266, № 4. С. 816—820.
 22. *Лойцянский Л. Г.* Наследственные явления в турбулентных движениях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 2. С. 5—19.
 23. *Чусов М. А.* Релаксационные процессы в развитом турбулентном потоке // Турбулентные течения. М.: Наука, 1974. С. 100—110.
 24. *Гледзер Е. Б., Макаров А. Л.* Определение эффективной вязкости в конечномерных каскадных моделях турбулентности // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. Т. 21, № 9. С. 899—906.



УДК 532.59 : 532.516

ТОНКАЯ СТРУКТУРА СИЛЬНЫХ ГРАВИТАЦИОННО- КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН

К. Д. РУВИНСКИЙ, Г. И. ФРЕЙДМАН

1. Ветровое волнение и исследование гравитационно-капиллярных волн

Процессы возбуждения, распространения и взаимодействия волн на водной поверхности изучаются уже многие десятки лет. Тем не менее имеется ряд не выясненных до последнего времени вопросов, существенных для понимания и количественного описания возникающих при этом явлений. Это связано как с большим диапазоном масштабов волновых движений (от десятков и сотен метров до миллиметров), участвующих в процессах, определяющих эти явления, так и с их сложным характером.

Настоящая работа посвящена исследованиям довольно узкого диапазона — диапазона гравитационно-капиллярных волн (ГКВ) (с длиной волны от 30—20 до нескольких сантиметров) и возникающей на их гребнях капиллярно-гравитационной ряби (КГР) с характерным масштабом в несколько миллиметров [1—7].

Даже при умеренном ветре ГКВ вносят скромную долю в энергию ветрового волнения. Однако именно они в значительной мере определяют мелкомасштабную структуру водной поверхности (рис. 1)¹, знание свойств которой необходимо для разработки дистанционных методов исследования поверхности океана и таких, например, явлений, как внутренние волны. Кроме того, в некоторых случаях может оказаться существенным связанный с нелинейным характером затухания ГКВ [5—7] механизм обмена энергией между ними и более длинными поверхностными волнами [8—11]. От мелкомасштабной структуры водной поверхности могут также существенно зависеть характеристики воздушного потока над этой поверхностью и взаимодействие с ней этого потока.

Прежде чем переходить к обсуждению особенностей процессов в диапазоне ГКВ и возникающих при их исследовании задач, остановимся коротко на некоторых, связанных с ветровым волнением вопросах, сведения о которых полезны для понимания основного содержания статьи².

В первую очередь следует отметить вопросы, возникающие при исследовании взаимодействия волн с турбулентным воздушным потоком. Сравнительно недавно (см., например, [16]) было показано, что за счет турбулентных пульсаций может существенно увеличиться инкремент на линейном этапе возбуждения поверхностных волн ветром. Однако влияние турбулентности на нелинейные процессы в слое совпадения скорости воздушного потока с фазовой скоростью волны практически не исследовано. В ламинарном воздушном потоке эти явления, как известно [17], приводят к стабилизации роста волн при чрезвычайно малой их крутизне: $\Theta = \pi \Delta\eta / \Lambda$. (Здесь и ниже Λ или λ — длина волны, а $\Delta\eta$ — разница уровней подошвы и вершины волны, для слабых волн равная удвоенной амплитуде A колебаний ее поверхности.) Турбулентность существенно уменьшает стабилизирующее действие нелинейных процессов в слое совпадений. Поэтому в некотором приближении, которым в дальнейшем и ограничимся, можно считать, что ветровой инкремент не зависит от амплитуды поверхностных волн. Следует, однако, иметь в виду, что это весьма грубое приближение и задача исследования взаимодействия волн с ветром далека от завершения.

¹ Фотографию, приведенную на рис. 1, авторам любезно предоставил А. Р. Панченко.

² Следует извиниться перед читателями за неизбежную краткость и поверхностность данного ниже весьма неполного обзора. Заинтересованным в более детальном ознакомлении с проблемой можно рекомендовать, например, монографии [12, 13] и обзоры [14, 15] с обширной библиографией.

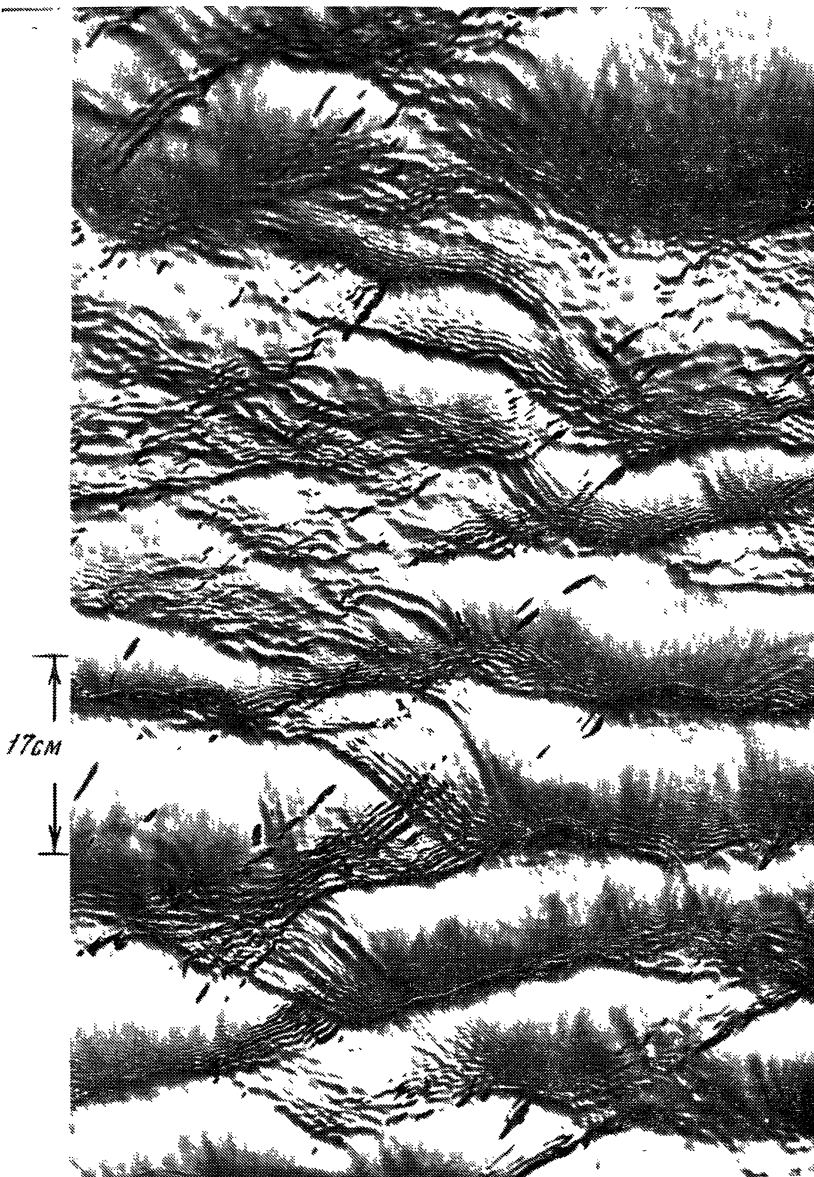


Рис. 1. Фотография морской поверхности при скорости ветра $U_{10} = 6$ м/с

Строгое и детальное описание ветрового волнения затрудняет также то обстоятельство, что поверхностные волны становятся сильно нелинейными при сравнительно малой амплитуде. Так, еще на заре их исследования было показано (см., например, [18—20; 21, с. 26—34; 22; 23]), что стационарные гравитационные волны

на поверхности глубокой жидкости (только волны на глубокой жидкости мы и будем ниже рассматривать) могут существовать с крутизной, не превышающей предельного значения $\Theta_{\text{пр}} = 0,142\pi$, а их форма при близкой к предельной крутизне существенно отличается от синусоидальной. Развитие численных методов исследования нелинейных задач позволило выяснить, что еще до достижения предельной крутизны стационарные гравитационные волны с крутизной, превышающей некоторую критическую величину $\Theta_{\text{кр}} \simeq 0,132\pi$, неустойчивы относительно мелкомасштабных возмущений, развитие которых приводит, по-видимому, к опрокидыванию волн, что проявляется в возникновении барашков на их гребнях (см., например, [24]). Для пространственно-периодических гравитационных волн явление опрокидывания удается довольно детально исследовать численными методами [25, 26]. Однако описание реального волнения со сложной пространственно-временной структурой удается провести при возникновении барашков, лишь ограничиваясь, по сути дела, феноменологическим учетом явлений, возникающих при близкой к предельной крутизне волн (см., например, [9, 10, 27, 28]).

При умеренной скорости ветра (верхней границей этой области можно считать скорость $U_{10} = 5 \div 6$ м/с), когда образование барашков несущественно, а также при рассмотрении длинноволновой части ветрового волнения в области энергонесущих составляющих можно в широком диапазоне параметров пользоваться слабо нелинейным приближением. В этом приближении поверхностное волнение представляется в виде суперпозиции парциальных волн. Изменение амплитуд квазипериодических волн определяется укороченными уравнениями (нелинейным уравнением Шредингера, а в более высоком приближении — уравнением Дайста [29, 30]). Развитие ветровое волнение описывается кинетическими уравнениями для плотности квазичастиц парциальных волн, в которых учитывается их рассеяние друг на друге (см., например, [31—33]). При этом для объяснения ряда эффектов необходимо учитывать, что парциальные волны могут отличаться от чисто гармонических, например, существенным весом 2-й гармоники в подъеме и наклоне поверхности [34]. Взаимодействие волн с ветром в рамках этих уравнений учитывается введением инкремента волн, который в обычно используемом приближении зависит только от скорости ветра, масштаба и направления распространения волны.

Слабо нелинейная теория даже при слабом ветре ($U_{10} \simeq 3$ м/с) неприменима для описания ГКВ. Дело в том, что сказанное о критерии сильной нелинейности стационарных волн и условиях ее проявления в природных условиях относится лишь к чисто гравитационным волнам, которыми следует считать волны с длиной, большей 25—30 см. Интервал от этой границы до длины волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0 = 1,73$ см ($k_0 = \sqrt{g\rho/\alpha}$, α — коэффициент поверхностного натяжения), при которой фазовая скорость волн на поверхности воды минимальна (рис. 2), соответствует ГКВ. Волны с меньшей, чем λ_0 , длиной волны λ_p будем называть капиллярно-гра-

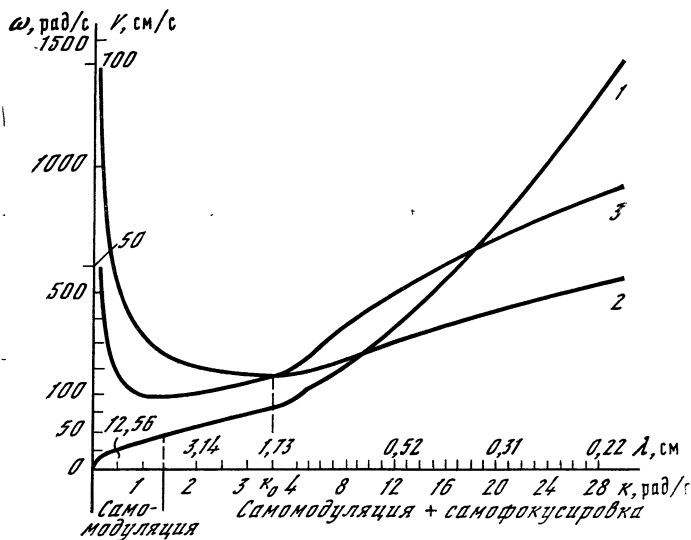


Рис. 2. Зависимости частоты (1), фазовой (2) и групповой (3) скоростей линейных гравитационно-капиллярных волн на спокойной жидкости от их волнового числа

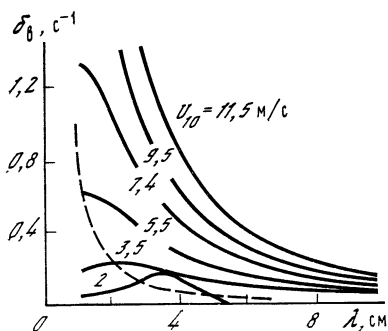


Рис. 3. Ветровой инкремент (сплошные кривые) по вычислениям Майлса [35] при различных скоростях ветра U_{10}

Штриховая кривая — коэффициент затухания $\delta_v = 2\nu k^2$; полная скорость роста волн на чистой поверхности жидкости равна $\gamma_B - \delta_v$

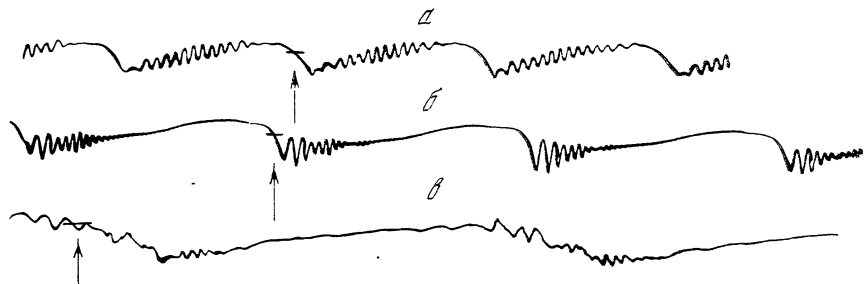


Рис. 4. Осциллограммы наклона свободной поверхности в интенсивных ГКВ [4]

$a - f = 5,9$ Гц ($\Lambda_0 = 5$ см), $2A/\Lambda_0 = 0,05$; $б - f = 4$ Гц ($\Lambda_0 = 10$ см), $2A/\Lambda_0 = 0,07$; $в - f = 2,5$ Гц ($\Lambda_0 = 25$ см), $2A/\Lambda_0 = 0,04$. Стрелками отмечена вершина ГКВ; горизонтальные метки — нулевые уровни наклона

витационными волнами (ГКВ) или капиллярно-гравитационной рябью. При $\lambda_p < 5 \div 3$ мм волны можно считать чисто капиллярными.

Особенности процессов, связанных с гравитационно-капиллярными участками спектра, возникают в основном в связи с двумя обстоятельствами. Во-первых, ГКВ возбуждаются при минимальной скорости ветра [35, 36, с. 167—174] (рис. 3). Во-вторых, как уже упоминалось, эффекты сильной нелинейности при их распространении начинают проявляться при гораздо меньшей, чем для гравитационных волн, крутизне. Поэтому ГКВ становятся сильно нелинейными (см. рис. 1), как только скорость ветра превышает пороговую $U_{\text{пор}} \simeq 1,3$ м/с и начинает работать механизм Майлса [35] возбуждения их ветром. Именно эффекты сильной нелинейности играют определяющую роль в стабилизации амплитуды ГКВ, в то время как для чисто гравитационных волн, по крайней мере до возникновения барашков, т. е. в области умеренных скоростей ветра, ограничение амплитуды происходит в основном за счет слабо нелинейных процессов их рассеяния с возбуждением более длинноволновых составляющих [31—33].

Как было показано еще в первых экспериментах [1,2] (рис. 4), эффекты сильной нелинейности при распространении ГКВ проявляются в генерации на их гребнях ряби, распространяющейся вперед по склону и для ГКВ с $\Lambda \gtrsim 5$ см затухающей, не доходя до следующего гребня (рис. 4). Качественно это явление можно объяснить совпадением фазовой скорости ГКВ с фазовой скоростью ее высших гармоник (см. рис. 2), которые попадают в диапазон КГР и возбуждаются вследствие нелинейных процессов эффективнее несинхронных низших.

Особенности структуры стационарных волн, связанные с таким фазовым синхронизмом ГКВ и КГР, теоретически начали исследоваться еще в начале века [37]. Цикл аналогичных исследований был проведен сравнительно недавно с использованием численных методов [38—41]. Применение ЭВМ позволило показать возможность существования весьма сложных профилей стационарных волн — «гибридов» гравитационных и мелкомасштабных капиллярных (рис. 5) волн — и возможность неоднозначности их структуры при больших амплитудах. Однако ценность этих исследований для анализа реальных процессов на водной поверхности даже в наиболее простых ситуациях (см. рис. 4) невелика, поскольку в них не учитываются диссипативные процессы, существенным образом влияющие на структуру сильно нелинейных ГКВ и их распространение. С учетом диссипации исследование явлений, к которым приводит совпадение фазовой скорости высших гармоник с фазовой скоростью основной волны, проведено в работе [42] с помощью модельного одномерного уравнения, дисперсионная зависимость линейных собственных волн которого близка к дисперсионной зависимости поверхностных волн. Однако нелинейность процессов в ГКВ является, как увидим ниже, весьма специфической. Поэтому полученные для простейшей

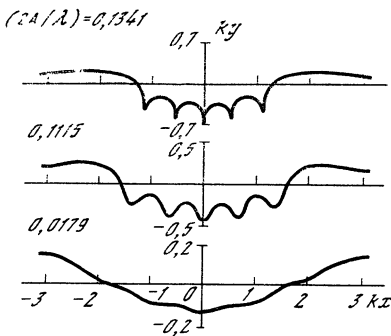


Рис. 5. Профили стационарных гравитационно-капиллярных волн при $\tilde{\alpha} = 4\pi\alpha/g\lambda^2 = 0,19$ по вычислениям Чена и Саффмана [40, 41]

нелинейности результаты [42] лишь сугубо качественно отражают черты явления генерации КГР.

Лонге-Хиггинсом [5] был предложен подход, позволивший, хотя и приближенно, учесть влияние вязкости на структуру и распространение сильных ГКВ. Он заключается в разделении волнового движения на крупномасштабное (собственно ГКВ) и мелкомасштабное (рябь). Коэффициенты уравнений для мелкомасштабного движения зависят от характеристик крупномасштабного движения. Процессы умножения и сложения частот учитываются введением в эти уравнения некоторых сторонних источников — силы, которая тоже определяется характеристиками крупномасштабного движения. Обратное воздействие ряби на крупномасштабное движение в слабо нелинейном (по крутизне ряби) приближении можно учесть (см. разд. 4) известными слагаемыми типа «усредненной силы» (см., например, [29, 30]). С помощью этого метода в работах [5, 6] было найдено распределение амплитуды чисто капиллярной ряби по поверхности ГКВ. В статье [7] было показано, что учет капиллярно-гравитационной природы ряби может привести к характерному «групповому» резонансу.

Приведем полученные в рамках такого подхода простые соотношения [7, 4], полезные для анализа экспериментальных результатов и проведения простейших оценок. Считая, что рябь описывается линейными по ее амплитуде уравнениями, а структура собственно ГКВ известна, можно в том или ином приближении, учитывающем медленность изменения скорости течения U и наклона поверхности собственно ГКВ, найти, например, зависимость максимальной крутизны ряби $\Theta_p = 1/2 \Delta\eta_p k_p$ от амплитуды сторонней силы и скорости течения U_B в области возбуждения, а также определить зависимость от U_B длины волны λ_p возбуждаемой ряби, ее изменение вдоль ГКВ и соответствующее изменение амплитуды ряби [4–7]. Для случая сравнительно длинных ГКВ ($\Lambda > 5$ см), которые фактически и рассматривались в указанных выше работах, стороннюю силу можно считать локализованной в окрестности вершины ГКВ (см. разд. 4), вследствие чего выражения для Θ_p и λ_p получаются наиболее простыми. С учетом капиллярно-гравитационной природы ряби и малого ее затухания в области возбуждения эти выражения могут быть записаны в виде

$$\Theta_p = F_{\lambda_p} \left[\left(\frac{U_B}{V_0} \right)^4 - 1 \right]^{-1/2}, \quad \lambda_p = \lambda_0 / \left\{ \left(\frac{U_B}{V_0} \right)^2 + \left[\left(\frac{U_B}{V_0} \right)^4 - 1 \right]^{1/2} \right\}. \quad (4)$$

Здесь F_{λ_p} — фурье-компонента спектра «источника» в области его локализации, соответствующая длине волны λ_p ; $U_v = C - U_{\text{орб}}$ — скорость течения жидкости на вершине ГКВ в системе отсчета, бегущей с ее фазовой скоростью C ; $V_0 = (4g\alpha/\rho)^{1/4}$ — групповая скорость волн с $\lambda = \lambda_0$ на неподвижной жидкости. Из (1), в частности, видно, что Θ_p зависит не только от амплитуды сторонней силы F_{λ_p} , но и от близости к нулю групповой скорости ряби $V_p \sim \sim [(U_v/V_0)^4 - 1]^{1/2}$ в системе координат, связанной с ГКВ.

Основываясь на представлении о генерации ряби за счет энергии крупномасштабного движения, можно считать, что на его периоде Λ «мощность» диссипации равна примерно потоку энергии ряби на вершине ($E_p V_p$), и исходя из этого получить простую формулу для оценки³ нелинейного пространственного декремента амплитуды ГКВ $\beta = \delta^*/V$ вследствие генерации ряби:

$$\beta \simeq \frac{1}{2} \frac{E_p V_p}{E_r \Lambda V} \simeq \frac{3}{2\pi^2} \frac{\lambda_0^2}{\Lambda^3} \left(\frac{\Lambda \Theta_p}{2A} \right)^2, \quad (2)$$

где δ^* — временной декремент ГКВ; $E_p \simeq \alpha \Theta_p^2/2$ и $E_r \simeq \simeq \rho g A^2/2$ — плотность энергии ряби и ГКВ; V — групповая скорость ГКВ; A — амплитуда подъема ее поверхности.

Приведенные соотношения носят довольно общий характер. Однако для конкретных расчетов, например зависимостей Θ_p и λ_p от крутизны ГКВ, необходимо в том или ином приближении знать структуру крупномасштабного движения и связь возбуждающей ряби силы с его параметрами. В указанных выше работах крупномасштабное движение определялось без учета поверхностного натяжения в приближении, найденном Дэвисом [43], а возбуждающая сила считалась пропорциональной кривизне найденного в этом приближении профиля волны. Как показали проведенные в последнее время эксперименты [4], результаты которых изложены ниже, такая аппроксимация собственно ГКВ неадекватна реальным процессам даже на пороге возбуждения ряби и для определения структуры собственно ГКВ необходимо учитывать поверхностное натяжение.

Последовательное исследование квазистационарных ГКВ с учетом вязкости удастся провести (см. ниже) с помощью предложенного авторами метода [44—46], основанного на применении приближенных и модельных граничных условий, а также определенного из кинематического граничного условия интеграла, позволяющего найти в неявном виде профиль волны при заданных амплитудах гармоник потенциала скорости. Применение этого метода дает возможность последовательно определить возбуждающий ряби источник через параметры крупномасштабного движения и достаточно

³ В этой формуле не учитывается адиабатическое изменение энергии ряби при ее распространении по ГКВ. При известной зависимости от координат крутизны и длины волны ряби для определения β можно пользоваться более точной формулой [7].

точно определить это движение с учетом поверхностного натяжения. Кроме того, применение метода позволяет получить простые алгоритмы численного решения самосогласованной задачи о квазистационарных и стационарных ГКВ при приближенном или модельном учете диссипации. Первые результаты проведенных таким образом расчетов оказываются в хорошем согласии с экспериментальными результатами. Это дает возможность в широком интервале параметров построить нужные для анализа ряда процессов зависимости, например зависимости Θ_p и нелинейного декремента от крутизны ГКВ и ее волнового числа.

Таким образом, проведенные теоретические исследования позволяют в значительной мере объяснить и количественно описать явление генерации КГР на гребне ГКВ в наиболее простых случаях стационарных и квазистационарных периодических в пространстве и фактически аналогичных им затухающих в пространстве стационарных волн, а также влияние этого явления на изменения их амплитуды. Успехи достигнуты также в исследовании периодических в пространстве потенциальных ГКВ при быстром изменении их профиля. С помощью разработанных для анализа потенциальных волн численных методов [25, 26, 47] удалось исследовать начальную стадию возбуждения ряби [47]. Применение этих методов, по-видимому, даст возможность в ближайшее время проследить за процессом установления квазистационарной волны и исследовать ее устойчивость относительно мелкомасштабных возмущений.

На основе полученных при исследовании квазистационарных ГКВ зависимостей можно определить некоторые параметры укороченных уравнений для амплитуд и фаз квазипериодических волн с учетом их нелинейного затухания из-за генерации КГР. Это позволяет, по крайней мере в рамках модельных задач, проанализировать влияние нелинейного затухания на такие, например, процессы, как устойчивость возбуждаемых ветром стационарных ГКВ [48, 49], их модуляцию внутренними волнами [49], взаимодействие ГКВ со звуком [50—52] и с длинноволновой частью ветрового волнения [41]. Следует, однако, сразу отметить, что учет нелинейного затухания ГКВ и его дисперсии удалось достаточно последовательно провести лишь в приближении, аналогичном приближению геометрической оптики. В то же время для полного исследования ряда процессов, например процессов самомодуляции, необходим учет дисперсии нелинейного затухания в более высоком, чем геометрикооптическое, приближении.

В природных условиях ГКВ, строго говоря, нельзя рассматривать даже как волны с медленно меняющейся амплитудой (см. рис. 1). Более адекватно такое сложное сильно нелинейное движение описывается кинетическими уравнениями. Такие уравнения удастся написать только феноменологически. На основе проведенных исследований можно сделать некоторые качественные выводы о структуре этих уравнений и их простейших решениях, а также оценить величину некоторых их коэффициентов [45].

2. Экспериментальные исследования генерации ряби на гребнях стационарных периодических ГКВ

Для исследования крутых ГКВ, на гребнях которых возбуждается рябь, необходимо регистрировать колебания водной поверхности и ее наклона в большом диапазоне как пространственно-временных масштабов, так и амплитуд движения. Трудности достаточно точного одновременного измерения проходящих с разной скоростью и масштабом изменений в значительной мере определяют весьма скромную экспериментальную информацию о количественных характеристиках параметров ГКВ при возбуждении ряби. До последнего времени имелись в основном лишь качественные наблюдения генерации ряби крутыми ГКВ в лабораторных [2, 3] и натуральных [1, 36] условиях. Результаты более подробных исследований, позволившие выявить некоторые качественные и количественные закономерности, приведены в работе [4], на кратком изложении результатов которой мы остановимся.

Количественные закономерности процесса генерации ряби сильными ГКВ исследовались в оказавшемся наиболее оптимальном для измерений диапазоне $4 < \Lambda_0 < 17$ см (Λ_0 — длина ГКВ в линейном приближении) при изменении их крутизны от 0,01л до 0,1л. Верхняя граница этих интервалов измерения определялась возрастанием поперечной модуляции; нижняя граница диапазона длин волн определялась уменьшением точности определения амплитуды ГКВ из-за трудности разделения различных масштабов движения.

Полученные из измерений зависимости крутизны Θ_p и длины волны λ_p КГР на гребне ГКВ от их крутизны приведены на рис. 6 при нескольких значениях Λ_0 . Измерения показали также, что соответственно имеющимся представлениям, о которых говорилось во введении, отношение фазовой скорости ГКВ и КГР близко к единице. Кроме того, при $\Lambda_0 = 10$ см ($f = 4$ Гц) была построена зависимость амплитуды ГКВ от расстояния S до волнопродуктора. Из этой зависимости следует, что в области $S > 60$ см, где структура ГКВ близка к стационарной, декремент ее затухания β превышает декремент β_0 для слабых волн ($\beta_0 = 8 \cdot 10^{-4}$ см $^{-1}$) примерно на порядок ($\beta \simeq 5 \cdot 10^{-3}$ см $^{-1}$ при $2 A/\Lambda_0 \simeq (6 \div 8) \cdot 10^{-2}$).

Измеренная величина β близка как к вычисленной по приведенной в разд. 1 формуле (2) величине β_v , если в нее подставить измеренное (см. рис. 6) значение Θ_p крутизны КГР на вершине ГКВ ($\beta_v = (3 \div 5) \cdot 10^{-3}$ см $^{-1}$), так и к теоретически вычисленной (см. ниже) величине β_T (рис. 7). Это показывает, что затухание ГКВ достаточно большой крутизны связано главным образом с генерацией ряби на их вершине.

Существенным является то, что рост измеренной крутизны Θ_p ряби происходит при практически постоянной длине ее волны λ_p на вершине ГКВ. Это значит, как следует из соотношений (1), что в условиях эксперимента увеличение Θ_p вызвано в основном ростом величины возбуждающей ряби «силы», а не приближением

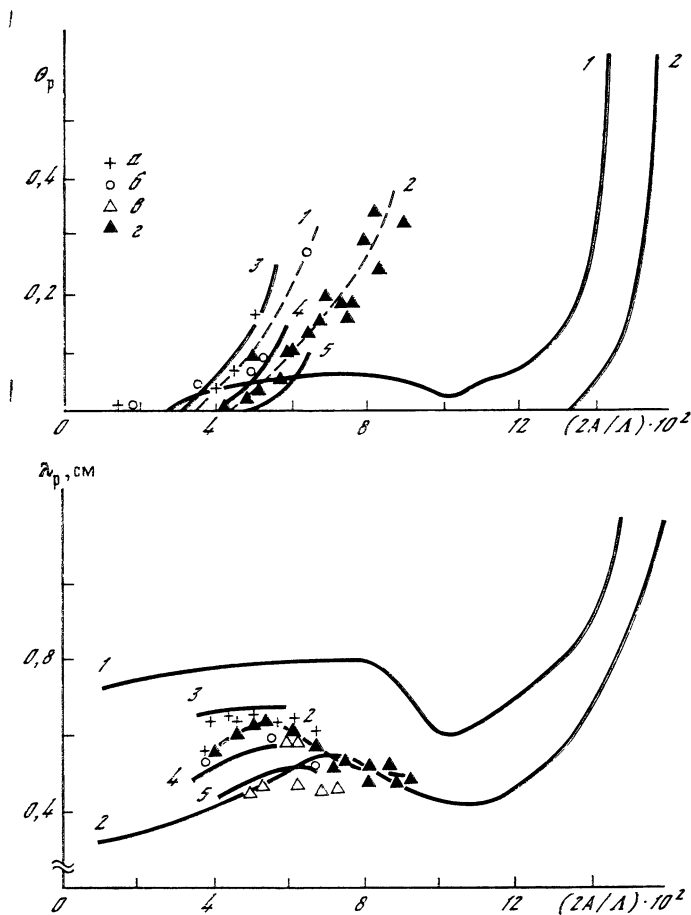


Рис. 6. Зависимости крутизны θ_p и длины волны λ_p яри на вершинах ГКВ от крутизны последних

Сплошные кривые — теоретические графики (1, 2 — по вычислениям [7], 3—5 — согласно [45, 46]); штриховые — усредненные экспериментальные данные [4]; экспериментальные точки соответствуют следующим частотам ГКВ: а — $f = 7$ Гц ($\Lambda_0 = 3,9$ см); б — $5,9$ Гц (5 см); е — $4,8$ Гц (7 см); з — 4 Гц (10 см).
 1 — $f = 5,9$ Гц ($\Lambda_0 = 5$ см); 2 — 4 Гц (10 см); 3 — 4 см; 4 — 5 см; 5 — 6 см

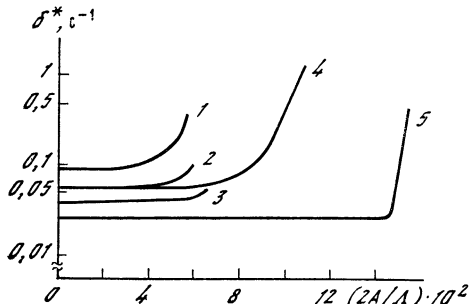


Рис. 7. Зависимость нелинейного декремента ГКВ из-за генерации яри от их крутизны ($\beta = \delta^*/V$)
 1—3 — по вычислениям [45, 46]; 4, 5 — согласно [7]; 1 — $\Lambda = 4$ см; 2, 4 — 5 см; 3 — 6 см; 5 — 10 см

ее относительной групповой скорости на вершине ГКВ к нулю. В то же время, если в соотношениях (1) для определения интенсивности источника и относительной групповой скорости ряби использовать примененное в работах [5—7] приближение для крупномасштабного движения и величины возбуждающей ряби силы, то рост крутизны Θ_p оказывается связанным с изменением λ_p , т. е. с заметным уменьшением относительной групповой скорости. Таким образом, проведенные эксперименты показали необходимость более точного, чем это было сделано ранее в работах [5—7], определения характеристик крупномасштабного движения в ГКВ и связанного с ним «источника» ряби. Ниже показано, что предложенный в работах [44—46] метод исследования квазистационарных ГКВ позволяет достаточно точно определить их характеристики (см. рис. 6).

3. Граничные условия для квазипотенциальных поверхностных волн

Как отмечено в предыдущих разделах, при теоретическом исследовании процессов генерации ряби на гребнях ГКВ необходимо учитывать диссипативные процессы, которые приводят к затуханию КГР и существенно влияют на структуру всей волны и изменение ее амплитуды. Необходимость учета вязкости значительно усложняет задачу исследования поверхностных волн, так как течение становится при этом непотенциальным. Точных методов решения таких задач не существует, и даже развитие вычислительной техники не дает надежд на какое-то продвижение в этом направлении в ближайшем будущем. Поэтому можно надеяться только на приближенный или модельный учет вязкости.

В задачах о затухании линейных поверхностных волн существует, как известно [53], малый параметр — отношение глубины проникновения $m^{-1} = 2(\nu/\Omega)^{1/2}$ вихревой компоненты скорости \mathbf{U} к глубине проникновения $k^{-1} = \lambda/2\pi$ потенциальной компоненты $\mathbf{V} = \nabla\varphi$ (ν — кинематическая вязкость, Ω — частота волны на неподвижной жидкости; для воды $k/m \simeq 10^{-2}$). При этом нормальная к поверхности составляющая U_n вихревой компоненты скорости оказывается много меньше тангенциальной составляющей U_s : $U_s \sim (k/m) |\mathbf{V}|$; $U_n \sim (k^2/m^2) |\mathbf{V}|$. Это дает возможность рассматривать граничное условие для тангенциальной составляющей тензора напряжений: $\nu(\partial U_s/\partial n + \partial U_n/\partial s) = -2\nu\partial^2\varphi/\partial n\partial s$, как соотношение, определяющее поверхностный источник для завихренности $\Omega = y_0\Omega \approx -(\partial U_s/\partial n)y_0$, а нормальную составляющую U_n найти из уравнения непрерывности. В таком приближении для нормальной составляющей вихревой компоненты $U_n(s, t)$, которую необходимо учитывать в кинематическом граничном условии, получаем уравнение

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} = 2\nu \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2 \partial n} \right|_{n=0}. \quad (3)$$

В граничном условии для нормальной к поверхности составляющей

щей тензора напряжений (динамическом граничном условии) можно не учитывать вихревую компоненту скорости и с учетом вязкости записать его в виде

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho} K + 2\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}. \quad (4)$$

Здесь p_0 — давление снаружи жидкости; K — кривизна ее поверхности. Соотношения (3) и (4) использовались при рассмотрении задачи о возбуждении линейной КГР заданными источниками [7].

Нелинейные по амплитуде колебаний слагаемые в уравнениях приводят к появлению, кроме быстропеременных, медленно меняющейся составляющей U_0 вихревой компоненты скорости. Это связано с передачей импульса затухающего волнового движения вихревому течению, энергия которого непрерывно уменьшается, а импульс (до взаимодействия со стенками) сохраняется. Скорость такого течения зависит от предыстории, конфигурации объема, содержащего жидкость, характеристик границ этого объема (стенок и дна) [54, 55]. Величина скорости U_0 может быть не очень мала. Например, как легко показать из закона сохранения импульса, при затухании однородной в пространстве волны с начальной колебательной скоростью v_0 возбуждается течение U_0 , скорость которого ($U_0 \simeq v_0^2/C$) после затухания волны для сильных волн ($v_0 \simeq C$) может быть близка к их фазовой скорости C . Течение при этом оказывается локализованным в слое глубиной $h_0 = k^{-1}$, который затем расширяется ($h \sim \sqrt{vt}$).

Существование сдвигового течения с перепадом скорости в области локализации потенциального волнового движения порядка фазовой скорости волны может, как известно (см., например, [56]), привести к существенным эффектам вследствие появления слоя совпадения. Это, однако, может иметь место лишь для волн с близкой к предельной крутизной, так как только для них $v_0 \sim C$. В интересующей же нас области параметров $v_0 \ll C$, хотя величина U_0 и может быть сравнима с фазовой скоростью волны, перепад U_0 на глубине k^{-1} много меньше C . Поэтому при определении формы волны и ее параметров сдвиговое течение можно либо не учитывать, либо считать заданным, однородным по глубине течением.

Быстропеременные нелинейные слагаемые в уравнениях движения, возникающие вследствие появления вихревой компоненты скорости, пропорциональны произведению двух малых параметров (отношения k/m и крутизны волн) и при $k/m \ll 1$ не могут, по-видимому, приводить к заметным эффектам. Таким образом, в первом приближении влияние вязкости на форму и изменение амплитуды квазипотенциальных поверхностных волн можно учесть введением дополнительных функционалов потенциала в динамическое и кинематическое граничные условия для потенциала φ : при $z =$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - \frac{\alpha}{\rho} K + g\eta - 2\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = 0, \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\nabla \varphi)_s \frac{\partial \eta}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} + U_n. \quad (56)$$

Здесь использован интеграл Бернулли, U_n определяется уравнением (3) и учтено, что $\partial^2 \varphi / \partial n^2 \simeq -\partial^2 \varphi / \partial s^2$.

Для исследования структуры и распространения ГКВ с учетом диссипации можно также применить более простые, чем (5), модельные граничные условия, которые получаются из (5), если в них положить $U_n = 0$, а в динамическом граничном условии заменить коэффициент 2ν на 4ν . Оправданием применения таких модельных граничных условий является совпадение точно найденного и полученного с их помощью затухания линейных волн. Кроме того, рассмотрение решений уравнений (5) для квазистационарных волн, аналогичное приведенному ниже, показывает, что в пределах точности уравнений (5) окончательные результаты, полученные с их помощью, совпадают с полученными из модельных граничных условий. Поскольку вычисления с использованием модельных граничных условий менее громоздки, ниже ограничимся только их применением.

4. Исследование пространственно-периодических волн

Возможность оставаться при исследовании характеристик ГКВ с учетом влияния на них вязкости в рамках потенциального приближения позволяет существенно продвинуться в исследовании одного из наиболее простых их типов — пространственно-периодических волн.

В случае потенциальных и квазипотенциальных пространственно-периодических волн можно применять численные методы точного решения задачи, аналогичные разработанным для чисто гравитационных волн такого типа [25, 26]. С помощью численных методов удалось исследовать процесс зарождения КГР [47]. К сожалению, их применение для построения представляющих интерес количественных зависимостей и определения такой важной для анализа экспериментов и проведения оценок величины, как нелинейный декремент, наталкивается на существенные трудности, связанные с ограниченными возможностями ЭВМ. Гораздо проще многие, представляющие интерес зависимости и величины удается определить при исследовании характеристик стационарных и квазистационарных волн. На полученных в последнее время результатах такого исследования [44—46] остановимся более подробно.

Подъем поверхности и потенциал скоростей волн представим в виде суммы слагаемых $\tilde{\eta} = (A_p \exp i\psi_p + \text{к. с.})$ и $\tilde{\varphi} = (B_p \exp i\psi_p + \text{к. с.})$, определяющих мелкомасштабное движение (КГР), и слагаемых η^* и φ^* , соответствующих крупномасштабному движению (собственно ГКВ). При рассмотрении обоих движений в рамках одних уравнений будем считать, что $\tilde{\eta} \equiv 0$ и $\tilde{\varphi} \equiv 0$.

Считая крутизну КГР $\Theta_p = A_p k_p$ ($k_p = \partial \psi_p / \partial x$) малой, можно (аналогично тому, как это сделано, например, в работе [29]) получить, что ее воздействие на ГКВ определяется дополнительным

(порядка Θ_p^2) слагаемым в кинематическом граничном условии для η^* и φ^* :

$$\partial\eta^*/\partial t + \nabla_{\perp}\varphi^*\nabla_{\perp}\eta^* - \varphi_z^* = (\nabla_{\perp}\nabla\psi_p)(A_p B_p^* - A_p^* B_p) \quad (6)$$

при $z = \eta^*$.

Динамическое граничное условие для η^* и φ^* при этом совпадает по виду с (5а) с точностью по крайней мере до величин порядка Θ_p^3 . Изменение величин $\tilde{\eta}$ и $\tilde{\varphi}$ определяется уравнениями, отличающимися от приведенных в работе [7] или аналогичных им укороченных уравнений (см., например, [6]) выражением для сторонней силы в динамическом граничном условии, которое будет получено ниже.

В случае квазистационарных пространственно-периодических ГКВ величины η^* и φ^* являются периодическими функциями фазы

$\xi = k \left(x - \int_0^t c(t) dt \right)$ ($k = 2\pi/\Lambda$), амплитуды которых медленно ме-

няются во времени пропорционально $\exp\left(-\int_0^t \delta^* dt\right)$. При этом

удобно ввести следующие безразмерные переменные и параметры⁴: $t = kct_{ст}$, $z = kz_{ст}$, $\eta^*k = \varepsilon\eta$, $k\varphi^* = \varepsilon\varphi$, $C^2 = c^2/c_0^2$, $T = (k/k_0)^2$, $v_1 = vkc/c_0^2$, $\delta_1 = \delta^*/kc$. Здесь $c_0 = (g/k)^{1/2}$ — фазовая скорость линейных гравитационных волн; ε — малый параметр; параметры T и v_1 можно назвать безразмерными коэффициентами поверхностного натяжения и вязкости.

Потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому его можно представить в виде суммы гармоник фазы, амплитуды которых экспоненциально зависят от вертикальной координаты z , и линейного по t слагаемого:

$$\varphi = \varphi_0 t + \exp\left[-\int_0^t \delta_1 dt\right] \sum_{n=1} \varphi_n \exp(nz) \sin(n\xi + \theta_n), \quad (7)$$

где $\varphi_1 = 1$; $\theta_1 = 0$; φ_0 , φ_n — медленные функции времени, пропорциональные $\exp\left[-\int_0^t (\delta_n - \delta_1) dt\right]$; θ_n тоже медленно зависят от времени.

Кинематическое граничное условие (6) является при заданном потенциале уравнением первого порядка относительно η . В представляющем основной интерес случае медленного изменения амплитуд (безразмерный декремент $\delta_1 \ll 1$) его удобно записать в интегральном виде, из которого приближенные по δ_1 решения можно

⁴ Мы надеемся, что применение одинаковых обозначений для некоторых размерных и безразмерных величин не приведет к недоразумениям.

найти методом итераций:

$$\eta(\xi, t) = \eta_0(\xi, \eta, t) + \delta_1 \left[\frac{1}{\delta_1} \int_0^{\xi} \frac{\partial \eta}{\partial t} d\xi - \frac{\bar{\eta}_1}{2\pi} \right], \quad (8a)$$

$$\eta_0 = \exp \left[- \int_0^t \delta_1 dt \right] \sum_{n=1}^N \varphi_n \exp(\varepsilon n \eta) \cos(n\xi + \theta_n) - \frac{\bar{\eta}_0}{2\pi} + \\ + i \frac{k k_p}{c\varepsilon} (A_p B_p^* - A_p^* B_p). \quad (8б)$$

Постоянные $\bar{\eta}_0$ и $\bar{\eta}_1$ находятся из условий

$$\int_{-\pi}^{\pi} \eta_0 d\xi = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \eta d\xi = 0. \quad (8в)$$

Соотношения (8) являются обобщением на нестационарный случай соотношения, примененного Рэлеем [57—59] (см. также монографии [22, 23]) для анализа стационарных гравитационных волн. Он получил его, исходя из того, что для стационарных волн линия тока совпадает с поверхностью волны, т. е. функция тока $\Psi = cz - \sum_{n=1}^N \Psi_n e^{nz} \cos(n\xi + \theta_n)$ на этой поверхности постоянна.

Соотношения (8) позволяют определить отклонение поверхности волны от мгновенной формы линии тока.

Подход, примененный Рэлеем, и рассмотренное ниже его обобщение на нестационарный случай с помощью соотношений (8) можно назвать улучшенным первым методом Стокса. В обычно применяемых формулировках первого метода Стокса используется независимое на первых этапах разложение по гармоникам двух величин — подъема поверхности и потенциала скорости, что затрудняет вычисление высших приближений и применение численных способов решения задач, в которых необходимо учитывать большое количество гармоник. Соотношения (8) дают возможность приближенно определить (при $\delta_1 \ll 1$), хотя и в неявном виде, форму поверхности при заданных гармониках потенциала, что позволяет получить уравнения для определения этих гармоник и облегчает вычисление высших приближений и применение численных методов исследования.

При проведении конкретных расчетов с помощью аналога соотношений (8) Рэлей приближенно находил форму поверхности в явном виде (используя разложения по гармоникам фазы). При этом были не замечены некоторые интересные следствия из полученного им соотношения, на которых следует коротко остановиться.

Легко видеть, что определяемая соотношениями (8) при $\delta_1 = 0$ функция $\eta_0(\xi)$ имеет особенность при некотором значении параметра ε , близком к определяемому равенством $\varepsilon \exp(\varepsilon) = 1$. Рассмотрим характер этой особенности в наиболее простом, представляющем самостоятельный интерес случае.

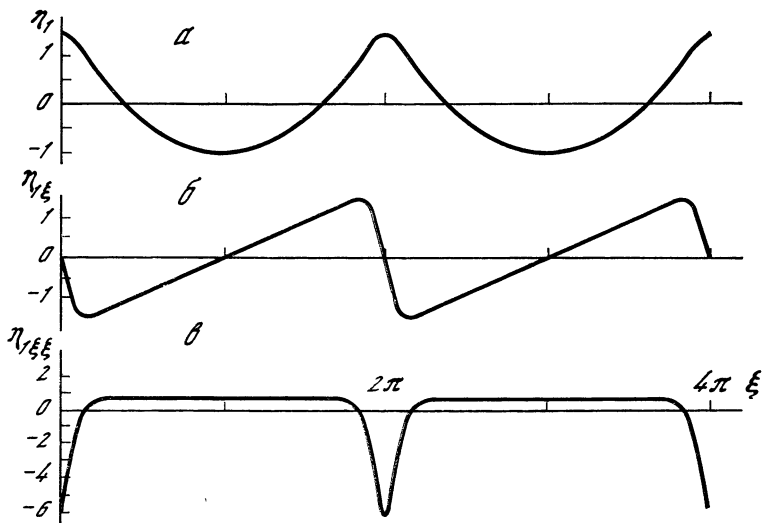


Рис. 8. Форма свободной поверхности ГКВ в нулевом приближении (а), а также ее первой (б) и второй (в) производных при $2A/\Lambda \simeq 0,17$ [44—46]

Для чисто гравитационных волн, как показал еще Рэлей, $\varphi_2 \sim \varepsilon^3 \varphi_1$. Это значит, что поверхность, определяемая соотношением

$$\eta_1(\xi) = e^{\varepsilon \eta_1} \cos \xi - \bar{\eta}_{10}/2\pi, \quad (9)$$

отличается от точной формы профиля волны на величину порядка ε^4 . С помощью ЭВМ не представляет труда построить и исследовать определяемую интегральным уравнением (9) функцию $\eta_1(\xi)$. Такое исследование показало, что при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_{\text{пр}} = 0,41$ кривизна $K \sim \eta_{\xi\xi}(0) \rightarrow -\infty$, а $\eta_{\xi}(\pm 0) \rightarrow \pm 1,76$, т. е. функция η_1 стремится к предельной форме с близким к 120° заострением на вершине и плоским основанием (рис. 8). При этом $\Delta\eta_1 = \eta_1(0) - \eta_1(\pi) \simeq 2,5$, т. е. для предельной волны первого приближения $\eta_1(\xi)$ при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_{\text{пр}}$ величина $(\Delta\eta_1/\Lambda)_{\text{пр}} \simeq 0,17$, что мало отличается от точного [20, 23] значения $(\Delta\eta/\Lambda)_{\text{пр}} = 0,142$.

С помощью ЭВМ можно легко построить и другие получаемые из соотношений (8) функции, если известны гармоники потенциала φ_n . Таким образом, задача состоит в нахождении этих гармоник в данный момент времени. Уравнения для определения гармоник потенциала получаются, если соотношения (8) подставить в динамическое граничное условие. Пренебрегая слагаемыми порядка δ_1^2 , $\delta_1 \varepsilon$ и $d^2(A_p B_p)/d\xi^2$, а также обозначая несущественные для дальнейшего слагаемые, связанные с φ_0 и $\bar{\eta}$, через $\bar{\varphi}_0$, получим

$$\exp \left[- \int_0^t \delta_1 dt \right] \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \exp(\varepsilon n \eta) \left\{ [1 - nC^2 + Tn^2] \cos(n\xi + \theta_n) + \left[4vn^2 - \delta_n \left(\alpha + \frac{1}{n} + Tn \right) \right] \sin(n\xi + \theta_n) \right\} + \frac{\varepsilon C^2}{2} (\nabla \varphi)_{z=\varepsilon \eta}^2 -$$

$$\begin{aligned}
& - T \left[\frac{\eta_{i\xi}}{(1 + \varepsilon^2 \eta_i^2)^{3/2}} + \sum_{n=1}^N \varphi_n n^2 \exp(\varepsilon n \eta) \cos(n\xi + \theta_n) \right] = \\
& = \frac{kk_p}{\varepsilon} \operatorname{Im}(A_p B_p^*) + \tilde{\varphi}_0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь последние слагаемые левой части пропорциональны ε в степени не ниже 1; $\delta_n \simeq -\partial \ln \varphi_n / \partial t$ — логарифмические скорости изменения амплитуд гармоник потенциала. Скоростью изменения фаз θ_n для уменьшения громоздкости выражений пренебрежем, поскольку это является одним из условий квазистационарного приближения, которым в дальнейшем и ограничимся.

Рассмотрим вначале движения разных масштабов в рамках одних уравнений, т. е. положим $A_p = B_p = 0$, а N возьмем достаточно большим. Умножая (10) на $\cos n\xi$ или $\sin n\xi$ и интегрируя по периоду волны, из выражения (10) можно получить дифференциальные уравнения для амплитуды гармоник потенциала $a_n = \varphi_n \cos \theta_n$ и $b_n = \varphi_n \sin \theta_n$ (в общем случае для этого надо, конечно, учесть слагаемые $\sim \partial \theta_n / \partial t$). Однако решение большого числа таких уравнений даже с помощью современных ЭВМ является, как уже говорилось, довольно трудоемкой задачей.

Задача упрощается для квазистационарных волн, изменение амплитуды которых происходит достаточно медленно. До тех пор пока скорость изменения высших резонансных гармоник, возбуждаемых низшими, меньше скорости их собственного затухания, т. е. $\delta_n \simeq (\delta_1 \varepsilon / \varphi_n) (\partial \varphi_n / \partial \varepsilon) \ll 2\nu n^2$, величины δ_n при $n > 1$ в (10) можно считать равными нулю, поскольку для нерезонансных гармоник пренебрежение δ_n справедливо из-за большой величины частотной расстройки $[1 - nC^2 + Tn^2]$. В таком приближении высшие гармоники определяются через первую (при заданной фазовой скорости C и декременте δ_1) нелинейными трансцендентными уравнениями. Решив эти уравнения при $t = 0$, можно затем определить C и декремент δ_1 как функцию ε из уравнения для амплитуды первой гармоники, учитывая, что $\varphi_1 = 1$. Другими словами, определение C и δ_1 сводится к нахождению собственных значений системы нелинейных уравнений. Применяя ЭВМ, эту задачу можно также решать, определяя [45, 46] минимум нормы левой части (10).

В рамках такого подхода можно также приближенно учесть влияние нестационарности генерации КГР, если считать, что δ_n и $\partial \theta_n / \partial t$ выражаются через δ_1 соотношениями

$$\delta_n = \delta_1 \frac{\varepsilon}{\varphi_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial \theta_n}{\partial t} = -\varepsilon \delta_1 \frac{\partial \theta_n}{\partial \varepsilon}. \tag{11}$$

Это приближение можно назвать квазистационарным приближением 2-го порядка. Для пространственно-периодических волн такое уточнение не приводит, видимо, к существенным эффектам, и не будем на нем останавливаться. Однако при анализе распространения квазипериодических ГКВ аналогичное уточнение может оказаться полезным для исследования процессов самомодуляции ГКВ.

При большой крутизне, как показали проведенные расчеты [45, 46], условия квазистационарности для резонансных гармоник могут нарушаться. Однако найденные указанным выше путем форма волны, ее фазовая скорость и величина декремента δ^* и в этом случае имеют определенный физический смысл. Действительно, если предположить, что влияние ветра можно учесть введением инкремента γ_v для первой гармоники потенциала, то с учетом вязкости может существовать нелинейное стационарное решение, которое определяется такими же уравнениями для φ_n , как и квазистационарное, при $\delta^* = \gamma_v$.

Полученная (подробности см. в [46]) указанным выше путем форма волны (рис. 9) и зависимости Θ_p и λ_p от амплитуды ГКВ (см. рис. 6) находятся в хорошем соответствии с результатами экспериментальных исследований. Немонотонность в изменении крутизны КГР вдоль склона ГКВ, наблюдаемая в некоторых экспериментальных реализациях, связана, видимо, с имевшей место поперечной модуляцией. Проведенные вычисления позволили также определить в некотором интервале параметров зависимость декремента (см. рис. 7) и фазовой скорости ГКВ от ее амплитуды и длины волны [45, 46]. Совершенствование алгоритма счета и применение более мощных ЭВМ позволят провести аналогичные расчеты в более широком интервале значений параметров.

Следует иметь в виду, что рассмотренный метод неприменим при возбуждении сильно нелинейной КГР, когда подъем ее поверхности становится неоднозначной функцией горизонтальной координаты (см. рис. 5). При исследовании таких «сверхсильных» ГКВ необходимо в качестве независимых переменных рассматривать величины, зависимость подъема поверхности от которых однозначна, например потенциал и функцию тока, как это делается при использовании второго метода Стокса [24, 40, 41]. Отклонение поверхности волн от линии тока ($\Psi = \text{const}$) можно приближенно определить из соотношений (8), учитывая, что в нулевом приближении (по скорости изменения амплитуды) функция $\eta_0(t, \varphi)$ в (8a) определяется уравнением $\Psi = \Psi_0(t)$. Вследствие быстрого увеличения нелинейного декремента ГКВ с ростом амплитуды возбуждаемой на их гребнях КГР образования «сверхсильных» квазистационарных ГКВ в природе, по-видимому, не происходит. Однако их исследование с учетом затухания представляет интересную с принципиальной точки зрения не решенную пока задачу.

В некоторых случаях, например в области верхней границы диапазона длин ГКВ, когда необходимость учета большого количества гармоник может привести к непреодолимым вычислительным трудностям при рассмотренном выше «лобовом» решении задачи, целесообразно отдельно рассматривать крупномасштабное и мелкомасштабное движения. Для этого, как уже говорилось, надо последовательно определить «вынуждающую силу» со стороны низших гармоник потенциала, возбуждающую КГР. Не вдаваясь в подробности [45, 46], отметим только, что основной вклад в вынуждающую силу дает, как и предполагалось в работах [5—7], слагае-

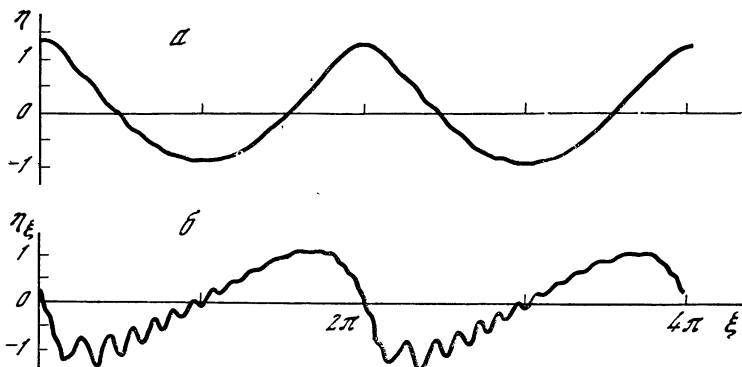


Рис. 9. Форма свободной поверхности ГКВ (а) и ее первой производной (б) при $\Lambda = 6$ см, $2A/\Lambda = 0,066$ [45, 46]

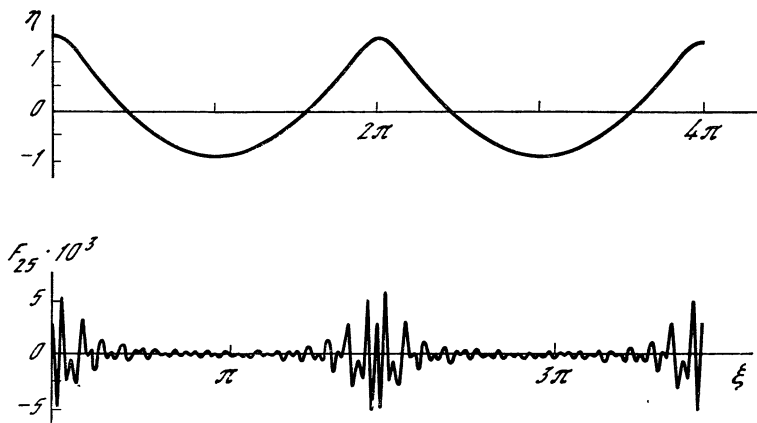


Рис. 10. Поднятие свободной поверхности и амплитуда квазигармоники вынуждающей силы при $\Lambda = 10$ см, $2A/\Lambda = 0,1$, $n = 25$, $\Delta x = 2$ ($2\pi/n$), $N_0 = 6$ [45, 46]

мое, связанное с поверхностным натяжением, т. е. пропорциональное кривизне K . Однако, как показали проведенные вычисления [45, 46], для достаточно точного определения величины представляющих интерес высших гармоник этой силы необходимо учитывать конечное число нерезонансных гармоник потенциала, при нахождении которых существенно также учитывать поверхностное натяжение. Как и следовало ожидать, при достаточно большой длине ГКВ ($\Lambda > 5$ см) амплитуда квазигармоники сторонней силы $F_n(\xi) = \int_{\xi-\Delta x}^{\xi+\Delta x} dx F(x) \cos nx$, где n — номер резонансной гармоники, $\Delta x > 2\pi/n$, локализована в окрестности вершины ГКВ (рис. 10).

Заключение

Приведенные в настоящей статье результаты свидетельствуют о том, что генерация ряби у вершин ГКВ проявляется при сравнительно малой их крутизне (более чем в 4 раза меньшей, чем предельная крутизна гравитационных волн) и поэтому является легко наблюдаемой. На сегодняшний день представляются выясненными основные черты этого процесса в случае стационарных и квазистационарных двумерных ГКВ. Однако теория трехмерных ГКВ пока не создана. В частности, не решенной до сих пор задачей является последовательный вывод укороченных уравнений для амплитуды и фазы ГКВ с учетом дисперсии нелинейного затухания и исследование на их основе устойчивости стационарных ГКВ. Поскольку движения, происходящие в диапазоне ГКВ в естественных условиях, чрезвычайно сложны (см. рис. 1) и их описание в настоящее время возможно лишь феноменологическими кинетическими уравнениями [45], то особую важность приобретает эксперимент (как натурный, так и лабораторный). С его помощью, в частности, можно надеяться определить коэффициенты этих уравнений. Важной экспериментальной задачей также является выяснение вопроса о том, когда в природных условиях преобладает возбуждение ряби ГКВ у их вершин, а когда непосредственно ветром.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Munk W. H.* High-frequency spectrum of ocean waves // *J. Mar. Res.* 1955. Vol. 14. P. 302—314.
2. *Cox Z.* Measurements of slopes of high-frequency wind waves // *Ibid.* 1958. Vol. 16, N 3. P. 199—225.
3. *Chang J. H., Wagner R. N., Henry C. Y.* Measurements of high frequency capillary waves on steep gravity waves // *J. Fluid Mech.* 1978. Vol. 83, N 3. P. 401—415.
4. *Ермаков С. А., Рувицкий К. Д., Салашин С. Г., Фрейдман Г. И.* Экспериментальное исследование генерации капиллярно-гравитационной ряби сильно нелинейными волнами на поверхности глубокой жидкости: Препр. ИПФ АН СССР № 124. Горький, 1985. 25 с.
5. *Longuet-Higgins M. S.* The generation of capillary waves by steep gravity waves // *J. Fluid Mech.* 1963. Vol. 16, N 1. P. 138—159.
6. *Crapper G. D.* Non-linear capillary waves generated by steep gravity waves // *Ibid.* 1970. Vol. 40, N 1. P. 149—159.
7. *Рувицкий К. Д., Фрейдман Г. И.* О генерации капиллярно-гравитационных волн крупными гравитационными волнами // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1981. Т. 17, № 7. С. 746—753.
8. *Phillips O. M.* On the attenuation of long gravity waves by short breaking waves // *J. Fluid Mech.* 1963. Vol. 16. P. 321—322.
9. *Longuet-Higgins M. S.* A nonlinear mechanism for the generation of sea waves // *Proc. Roy. Soc. London.* 1969. Vol. 311. P. 371—389.
10. *Hasselmann K.* On the mass and momentum transfer between short gravity waves and large-scale motions // *J. Fluid Mech.* 1971. Vol. 50, N 1. P. 189—205.
11. *Рувицкий К. Д.* Влияние нелинейного затухания коротких ветровых волн на их взаимодействие с длинными поверхностными волнами // *Тез. докл. IX Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн.* 28—30 ноябр. 1985. Тбилиси, 1985. Т. 2. С. 22—25.
12. *Монин А. С., Красицкий В. П.* Явления на поверхности океана. Л.: Гидрометеиздат, 1985. 375 с.

13. *Давидан И. Н., Лопатухин Л. И., Рожков В. А.* Ветровое волнение в Мировом океане. Л.: Гидрометеиздат, 1985. 256 с.
14. *Крацов Ю. А., Эткин В. С.* Ветровое волнение как автоколебательный процесс // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1983. Т. 19, № 11. С. 1123—1139.
15. *Schwartz L. W., Fenton J. D.* Strongly nonlinear waves // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1982. Vol. 14. P. 39—60.
16. *Николаева Ю. И., Цимринг Л. Ш.* Кинетическая модель генерации ветровых волн турбулентным ветром: Препр. ИПФ АН СССР № 114. Горький, 1984. 19 с.
17. *Реутов В. П.* Плазменно-гидродинамическая аналогия и нелинейная стадия неустойчивости ветровых волн // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т. 16, № 12. С. 1266—1275.
18. *Stokes G. G.* On the theory of oscillatory waves // *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 1847. Vol. 8. P. 441—445.
19. *Stokes G. G.* Supplement to a paper on the theory of oscillatory waves // *Math. and Phys. Pap.* 1880. Vol. 1. P. 197—229.
20. *Michell J. H.* The highest waves in water // *Philos. Mag.* 1893. Vol. 36, N 5. P. 430—437.
21. *Некрасов А. И.* О волнах Стокса // *Собр. соч. М.: Физматгиз*, 1961. Т. 1. 252 с.
22. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1947. 540 с.
23. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
24. *Longuet-Higgins M. S.* The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water. I. II // *Proc. Roy. Soc.* 1978. Vol. A360, N 1703. P. 471—488; P. 489—505.
25. *Longuet-Higgins M. S., Cokelet E. D.* The deformation of steep surface waves on water. I. A numerical method of computation // *Proc. Roy. Soc. London A.* 1976. Vol. 350. P. 1—26.
26. *Longuet-Higgins M. S., Cokelet E. D.* The deformation of steep surface waves on water. II. Growth of normal-mode instabilities // *Ibid.* 1978. Vol. 364. 1716. P. 1—28.
27. *West B. J., Thompson J. A., Watson K. M.* Statistical mechanism of ocean waves // *J. Hydronaut.* 1975. Vol. 9, N 1. P. 25—31.
28. *Басович А. Я., Базанов В. В., Таланов В. И.* Влияние интенсивных внутренних волн на ветровое волнение // Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность / Под ред. Е. Н. Пелиновского. Горький: ИПФ АН СССР, 1982. С. 8—30.
29. *Dysthe K. B.* Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves // *Proc. Roy. Soc. London A.* 1979. Vol. 369. P. 105—114.
30. *Djordjevic V. D., Redekopp L. G.* On two-dimensional packets of capillary-gravity waves // *J. Fluid Mech.* 1977. Vol. 79, N 4. P. 703—714.
31. *Заславский М. М., Захаров В. Е.* К теории прогноза ветровых волн // *ДАН СССР.* 1982. Т. 265, № 3. С. 567—571.
32. *Захаров В. Е., Заславский М. М.* Кинетическое уравнение и колмогоровские спектры в слаботурбулентной теории ветровых волн // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1982. Т. 18, № 9. С. 970—979.
33. *Захаров В. Е., Заславский М. М.* Интервалы накачки и диссипации в кинетическом уравнении слаботурбулентной теории ветровых волн // Там же. 1982. Т. 18, № 10. С. 1066—1076.
34. *Lake B. H., Yuen H. C.* A new model for nonlinear wind waves. Pt. 1. Physical model and experimental evidence // *J. Fluid Mech.* 1978. Vol. 88. P. 33—63.
35. *Miles J. W.* On the generation of surface waves by shear flows. Pt. 4 // *Ibid.* 1962. Vol. 13. P. 433—448.
36. *Филлипс О. М.* Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 320 с.
37. *Wilton J. R.* On ripples // *Philos. Mag.* 1915. Vol. 29, N 6. P. 688—700.
38. *Schwartz L. W., Vanden-Broeck J.-M.* Numerical solution of the exact

- equations for capillary-gravity waves // *J. Fluid Mech.* 1979. Vol. 95, N 1 P. 119—139.
39. *Rottman J. W., Olfe D. B.* Numerical calculation of steady gravity-capillary waves using an integrodifferential formulation // *Ibid.* 1979. Vol. 94, N 4. P. 777—793.
 40. *Chen B., Saffman P. G.* Steady gravity-capillary waves on deep water. I. Weakly nonlinear waves // *Stud. Appl. Math.* 1979. Vol. 60. P. 183—210.
 41. *Chen B., Saffman P. G.* Steady gravity-capillary waves on deep water. II. Numerical results for finite amplitude // *Ibid.* 1980. Vol. 62. P. 95—111.
 42. *Ferguson W., Saffman P., Yuen H.* A model equation to study the effects of nonlinearity, surface tension and viscosity in water waves // *Ibid.* 1978. Vol. 58, N 2. P. 165—185.
 43. *Davis T. V.* The theory of symmetrical gravity waves of finite amplitude. I // *Proc. Roy. Soc. London A.* 1951. Vol. 208. P. 475—486. Рус. пер.: Теория поверхностных волн/Под ред. М. А. Красносельского, Н. Н. Моисеева. М.: Изд-во иностр. лит. 1959. С. 310—324.
 44. *Рувицкий К. Д., Фрейдман Г. И.* Улучшение первого метода Стокса для исследования потенциальных гравитационно-капиллярных волн конечной амплитуды // Тез. докл. IX Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. 28—30 нояб. 1985 г. Тбилиси, 1985. Т. 2. С. 26—29.
 45. *Рувицкий К. Д., Фрейдман Г. И.* Генерация ряби на гребнях гравитационно-капиллярных волн и влияние этого процесса на их распространение; Препр. ИПФ АН СССР № 132. Горький, 1985. 48 с.
 46. *Рувицкий К. Д., Фельдштейн Ф. И., Фрейдман Г. И.* Численное моделирование квазистационарной стадии генерации капиллярной ряби крутыми гравитационно-капиллярными волнами // Тез. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теоретической и прикладной механике. 24—30 сент. 1986 г. Ташкент, 1986.
 47. *Коган В. Р., Чурилов Ю. А.* Генерация капиллярной ряби крутыми гравитационными волнами // Тез. докл. IV Всесоюз. симпоз. по физике акустогидродинамических явлений. 24—26 сент. 1985 г. Ашхабад, 1985. С. 25.
 48. *Рувицкий К. Д., Фрейдман Г. И.* Об устойчивости ветровых волн при слабом ветре // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1983. Т. 19, № 8. С. 855—858.
 49. *Рувицкий К. Д., Фельдштейн Ф. И., Фрейдман Г. И.* Влияние нелинейного затухания, связанного с генерацией капиллярно-гравитационной ряби на устойчивость коротких ветровых волн и их модуляцию цугом внутренних волн // Там же. 1986. Т. 22, № 3. С. 292—300.
 50. *Рувицкий К. Д., Фрейдман Г. И.* Параметрическая трансформация капиллярно-гравитационных волн звуком на неоднородных течениях // Там же. 1982. Т. 18, № 7. С. 772—775.
 51. *Рувицкий К. Д., Фрейдман Г. И.* О параметрическом воздействии звука на крутые гравитационные волны при слабом ветре // Там же. 1983. Т. 19, № 1. С. 82—85.
 52. *Варавин В. Ю., Наугольных К. А., Рыбак С. А.* О механизме возбуждения капиллярной волны на заднем склоне гравитационной волны // Там же. 1980. Т. 16, № 7. С. 779—782.
 53. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехтеориздат, 1953. 111 с.
 54. *Dore B. D.* On wave-induced surface drift // *Wave Motion.* 1985. Vol. 7, N 2. P. 123—128.
 55. *Craik A. D. D.* The drift velocity of water waves // *J. Fluid Mech.* 1982. Vol. 116. P. 187—206.
 6. *Линь Цзя-Цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит. 1958. 350 с.
 57. *Rayleigh (J. W. Strutt).* On waves // *Philos. Mag.* 1876. Vol. 1, N 5. P. 257—279.
 58. *Rayleigh (J. W. Strutt).* Hydrodynamical notes // *Ibid.* 1911. Vol. 21, N 6. P. 177—195.
 59. *Rayleigh (J. W. Strutt).* On periodic irrotational waves at the surface of deep water // *Ibid.* 1917. Vol. 33, N 6. P. 381—389.

КОЛЛЕКТИВНАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ И САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ЗВУКА В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

Ю. А. КОБЕЛЕВ, Л. А. ОСТРОВСКИЙ

Введение

Существуют среды и системы, играющие (или сыгравшие) уникальную роль в исследованиях нелинейных волн. В акустике к таким средам можно с полным правом отнести жидкость с пузырьками газа — среду, которая обладает разнообразными нелинейными и дисперсионными характеристиками, вполне сопоставимыми по сложности, скажем, с электродинамическими характеристиками плазмы.

Пузырек, т. е. сферическая полость в жидкости, заполненная газом, обладает резонансными свойствами, что приводит к сильной дисперсии или резонансному (типа затухания Ландау) поглощению звуковых волн [1]. Кроме того, с пузырьком связана сильная акустическая нелинейность, поскольку он обладает высокой («газовой») сжимаемостью под действием большого акустического давления, характерного для окружающей жидкости. В работе [2] уже обсуждались вопросы нелинейной акустики газожидкостной смеси, в первую очередь эффекты резонансного преобразования частоты применительно к параметрическим излучателям звука и задачам диагностики пузырьков. За прошедшие после этого несколько лет был сделан существенный шаг вперед в теории и эксперименте. Это относится в первую очередь к эффектам «индуцированного» типа, связанным не с квадратичной, а с кубичной нелинейностью среды. Были рассмотрены эффекты обращения волнового фронта [3], звукового эха [4] и др. Была реализована и самофокусировка (или скорее проявлена тенденция к ней) звука на основе кавитационного механизма [5], теоретически обсуждавшаяся уже сравнительно давно [6—10]. Здесь широко используются аналогии с нелинейной оптикой.

Это направление исследований основано на использовании кубичной, обычно весьма малой, нелинейности. По этой причине возможности экспериментального исследования эффектов самовоздействия и индуцированного рассеяния звука существенно ограничены. Вместе с тем есть и другие механизмы нелинейности, связанные с коллективным поведением пузырьков, а именно с изменением их концентрации в пространстве и функции их распределения по радиусам за счет их движения под действием радиационного давления и взаимодействия из-за осредненных гидродинамических сил (сил Бьеркнеса). Эти механизмы несколько сродни механизмам «концентрационной» нелинейности в плазме, но имеют и много существенных отличий. Такой механизм приводит к весьма

сильной и к тому же инерционной нелинейности. Его действие уже наблюдалось в эксперименте по «просветлению» для звуковых волн [11].

Здесь мы будем рассматривать эффекты именно такого рода. В разд. 1 обсуждается осредненное движение одного и двух пузырьков в звуковом поле — задачи, решение которых необходимо для дальнейшего, но представляющие и самостоятельный физический интерес. Затем рассматриваются уравнения акустики газожидкостной смеси с учетом кинетики пузырьков, задаваемых функцией их распределения по размерам, и на основании этих уравнений обсуждается ряд эффектов нелинейного самовоздействия звука. В заключение кратко обсуждаются аналогии и различия с соответствующими плазменными задачами.

1. О поведении газового пузырька в звуковом поле

Уравнения монополярных и дипольных колебаний пузырька. Свойства волновых движений в газожидкостной смеси определяются как колебаниями отдельного пузырька, так и их коллективным движением. В общем случае описание колебаний пузырька представляет собой очень сложную задачу: эти колебания могут быть многомодовыми, и при этом нелинейными. Однако в большинстве волновых задач можно ограничиться двумя типами движений: симметричными (монополярными) и поступательными (дипольными) колебаниями. Условием этого является малость радиуса пузырька R по сравнению с характерной длиной звуковой волны λ , т. е. $R \ll \lambda$. В этом случае монополярные колебания описываются хорошо известным уравнением Рэлея

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \rho_0^{-1}(P_\Gamma - P), \quad (1)$$

где $R = R(t)$ — радиус пузырька; ρ_0 — плотность жидкости; P_Γ, P — давление соответственно в газе (оно предполагается однородным) и в жидкости в отсутствие пузырька. Сюда необходимо добавить уравнение состояния газа в пузырьке, которое в простейшем случае адиабатических колебаний и в пренебрежении поверхностным натяжением записывается в форме

$$P_\Gamma R^{3\gamma} = P_0 R_0^{3\gamma}; \quad (2)$$

здесь P_0 и R_0 — невозмущенные давление газа в пузырьке и его радиус; γ — показатель адиабаты. В линейном приближении из (1) и (2) имеем уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{h} + \alpha\dot{h} + \omega_0^2 h = -\frac{1}{3}\omega_0^2 \rho, \quad \omega_0 = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{3 \cdot P_0}{\rho_0}}, \quad (3)$$

где $h = \Delta R/R_0$ — относительное изменение радиуса пузырька; $\rho = (P - P_0)/P_0$; ω_0 — собственная частота колебаний пузырька. В уравнение (3) добавлено феноменологическое слагаемое $\alpha\dot{h}$, определяющее диссипацию энергии. Здесь мы не будем обсуждать

подробно механизмы диссипации, отметим только, что основных каналов три: потери из-за излучения звука пузырьком, вязкости жидкости и теплообмена между газом и жидкостью (последние два доминируют в широкой области частот от единиц до сотен килогерц). Из (3) следует, что монополярные колебания пузырька имеют резонансный характер, и это обстоятельство очень существенно (хотя добротности реальных микропузырьков часто невелики — скажем, порядка 10).

Как будет видно из дальнейшего, в линейном приближении монополярные колебания пузырьков оказывают определяющее влияние на поведение акустических волн в газожидкостной смеси. Через них идет обмен энергией между волной и пузырьками, с ними связаны дисперсионные свойства среды. Нелинейные свойства отдельного пузырька тоже зависят главным образом от монополярных колебаний и описываются уравнениями (1), (2); именно такая нелинейность и учитывается в большинстве работ. Однако для реальной газожидкостной среды эти механизмы нелинейности не единственны и даже могут быть не главными. Дело в том, что дипольные движения вместе с монополярными приводят к усредненному движению пузырьков и, как следствие, к нелинейным эффектам.

Итак, перейдем к рассмотрению дипольных колебаний, связанных с движением пузырька как целого. Колебания малой сферической частицы произвольной плотности, в том числе пузырька, в заданном акустическом поле также хорошо изучены (см., например, [12]). Поскольку плотность газа пренебрежимо мала, основную роль при движении играет присоединенная масса $M_{пр} = \rho_0 V_{п}/2 = 2\pi\rho_0 R^3/3$, связанная с дипольным движением жидкости вокруг пузырька, поэтому при постоянном объеме $V_{п}$ уравнение движения пузырька имеет вид

$$M_{пр} \frac{d}{dt} (\mathbf{U} - \mathbf{v}_в) = -\nabla P_в V_{п}, \quad (4)$$

где \mathbf{U} — скорость колебаний пузырька; $\mathbf{v}_в$ — скорость движения частиц окружающей жидкости в звуковом поле в отсутствие пузырька (так что $\mathbf{U} - \mathbf{v}_в$ — это скорость движения пузырька относительно жидкости); $P_в$ — акустическое давление. Поскольку в линейном приближении $\nabla P_в = -\rho_0 \mathbf{v}_t$, то отсюда получаем известный результат: $(1/2) (\mathbf{U} - \mathbf{v}_в)_t = \mathbf{v}_{vt}$ или $\mathbf{U} = 3\mathbf{v}_в$, т. е. пузырек колеблется втрое сильнее частиц жидкости. Тем не менее, как нетрудно показать, амплитуда рассеянного на дипольных колебаниях звукового поля практически всегда много меньше амплитуды поля, рассеянного на монополярных колебаниях. Это обусловлено двумя причинами: малой величиной силы, действующей со стороны звукового поля (в (4) сила пропорциональна $\nabla P_в$ в отличие от уравнения (1), где она пропорциональна $P_в$), и нерезонансным характером этих колебаний. Поэтому прямой вклад дипольных колебаний в рассеянные пузырьками поля обычно пренебрежимо мал.

Пусть теперь пузырек совершает одновременно и монополярные пульсации, и дипольные колебания. Если пренебречь «собственной» нелинейностью тех и других колебаний, то нелинейность связана только с их взаимодействием, точнее, с тем, что в уравнении (4) поступательного движения объем пузырька V_{Π} (входящий и в $M_{\Pi p}$) переменный. Отсюда получаем [13]

$$\frac{d}{dt} [V_{\Pi} (3v_{\text{в}} - U)] = 2v_{\text{в}} \frac{dV_{\Pi}}{dt}. \quad (5)$$

В этом уравнении жидкость считается несжимаемой (что справедливо при $R \ll \lambda$) и идеальной; последнее предположение требует выполнения дополнительного условия $\sqrt{\nu/\omega} \ll R$, т. е. малости длины вязкой волны по сравнению с радиусом пузырька [12] (ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости, ω — частота звукового поля). С помощью (5) можно решать задачи о нелинейном рассеянии звуковых волн и ряд других. Здесь же мы будем рассматривать только движения пузырьков, осредненные по периоду звука.

Движение пузырька в поле осредненных сил. Пусть на пузырек действует осциллирующее звуковое поле с потенциалом $\varphi = (1/2) [\Psi(\mathbf{r}) e^{i\omega t} + \text{к. с.}]$, тогда для скорости изменения относительного радиуса пузырька dh/dt из (3) имеем

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\Psi(\mathbf{r}) e^{i\omega t}}{R_0^3 (S^2 - 1 + i\delta)} + \text{к. с.} \right], \quad (6)$$

где $S = \omega_0/\omega$; δ — коэффициент затухания монополярных колебаний пузырька ($\delta = \alpha/\omega$, см. (3)). Представим скорость поступательного движения пузырьков \mathbf{U} в виде суммы $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{\text{л}} + \langle \mathbf{U} \rangle$, где $\langle \mathbf{U} \rangle$ — осредненная по периоду звука составляющая скорости; $\mathbf{U}_{\text{л}}$ — остаточное слагаемое. Для величины $\langle \mathbf{U} \rangle$ из (5) следует уравнение

$$\frac{d\langle \mathbf{U} \rangle}{dt} + 6 \left\langle \frac{dh}{dt} \mathbf{v}_{\text{в}} \right\rangle = -2\mathbf{g} - \frac{9\nu}{R_0^2} \langle \mathbf{U} \rangle, \quad (7)$$

где \mathbf{g} — ускорение свободного падения. В уравнение (7) добавлены силы Стокса и Архимеда, которые для осредненных движений могут играть существенную роль. Второй член в левой части (7) определяет силу давления на пузырек со стороны звукового поля. С помощью (6) ее значение можно записать в виде [13]

$$\left\langle \frac{dh}{dt} \mathbf{v}_{\text{в}} \right\rangle = [(1 - S^2) \nabla |\Psi|^2 - i\delta (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)] / 4R_0^3 [(1 - S^2)^2 + \delta^2]. \quad (8)$$

Правая часть (8) описывает как силу радиационного давления звука (второе слагаемое), так и силу, связанную с неоднородностью поля (первое слагаемое). Если Ψ — это амплитуда поля, рассеянного другим пузырьком, то (8) дает и величину силы взаимодействия между пузырьками (силу Бьеркнеса $F = \rho_0 \langle \dot{v}_{\Pi 1} \dot{v}_{\Pi 2} \rangle / 4\pi r_{12}^2$, где r_{12} — расстояние между пузырьками; $\dot{v}_{\Pi 1}, \dot{v}_{\Pi 2}$ — скорости изменения объемов пузырьков). В приближении несжимаемой жид-

кости эти силы аналогичны кулоновским силам взаимодействия точечных зарядов, «знак» которых зависит от относительной фазы колебаний пузырьков: пузырьки, колеблющиеся в фазе, притягиваются, а в противофазе — отталкиваются¹. Если учесть сжимаемость жидкости, то силы Бьеркнеса обладают рядом своеобразных свойств, рассмотренных недавно Немцовым [14]. Так, силы, действующие на пузырьки с разных сторон, могут быть не равны и иметь одинаковое направление, что является следствием незамкнутости системы из двух пузырьков, находящихся в звуковом поле.

Первый член в уравнении (7) дает вклад в движение пузырька присоединенной массы жидкости. Далее мы везде будем пренебрегать этим членом, т. е. считать скорость пузырька близкой к скорости установившегося движения (это почти всегда соответствует действительности).

С помощью уравнения (7) можно решать задачи о движении пузырька в поле бегущей и стоячей волн, взаимодействие пузырьков и т. д. Рассмотрим два физически интересных примера.

1. Пусть пузырек находится в неоднородном аксиально-симметричном звуковом пучке, амплитуду потенциала которого в переменных r и θ сферической системы координат запишем как

$$\Psi = A(\theta) \exp(iKr)/r. \quad (9)$$

Тогда из уравнений (7) и (8) имеем для скорости пузырька выражение

$$\langle \mathbf{U} \rangle = \langle U_r \rangle \mathbf{n}_r + \langle U_\theta \rangle \mathbf{n}_\theta = \left[K\delta A^2 \mathbf{n}_r - \frac{1-S^2}{2r} \frac{dA^2}{d\theta} \mathbf{n}_\theta \right] / 3v[(1-S^2)^2 + \delta^2] r^2, \quad (10)$$

где $K = \omega/c$; \mathbf{n}_r и \mathbf{n}_θ — единичные векторы переменных r и θ . Выражение (10) получено для значений $r \gg 1/K$.

Из (10) видно, что если $dA^2/d\theta < 0$, то при $\omega < \omega_0$ ($S > 1$) величина $\langle U_\theta \rangle < 0$, т. е. появляется сила, которая втягивает «маленький» пузырек в звуковой пучок. Если же $\omega > \omega_0$, то $\langle U_\theta \rangle > 0$ и «большой» пузырек «выталкивается» из звукового пучка. Для резонансных пузырьков ($\omega = \omega_0$) получаем $\langle U_\theta \rangle = 0$. Рассмотренный эффект может быть причиной самофокусировки звука в жидкости с пузырьками газа, так как увеличение концентрации «маленьких» пузырьков ($\omega_0 > \omega$) в области максимальной интенсивности звука приводит к уменьшению скорости звуковой волны, а увеличение концентрации «больших» пузырьков ($\omega_0 < \omega$) в области минимальной интенсивности — к увеличению ее.

2. Второй важный пример — движение двух взаимодействующих пузырьков. Под действием перечисленных выше сил пузырек перемещается в пространстве и может сталкиваться с другими. Но поскольку поступательное движение пузырьков практически не связано с переносом энергии (его энергия пропорциональна $|\Psi|^4$, т. е. является малой величиной относительно энергии мо-

¹ Любопытно напомнить, что с помощью этих сил отец и сын Бьеркнесы пытались объяснить природу электрического заряда.

нопольных колебаний, пропорциональных $|\Psi|^2$, то и отклонения траекторий пузырьков от первоначальных при столкновениях друг с другом не могут влиять на макроскопические свойства среды из пузырьков, и в частности несущественны для рассматриваемых ниже волновых задач. С другой стороны, если пузырьки при столкновении «сливаются» (коагулируют), то это приводит к существенному перераспределению энергии, поскольку новый пузырек имеет другую резонансную частоту и, следовательно, другую амплитуду монопольных колебаний.

Вычислим сечение и вероятность столкновений, приводящих к коагуляции двух пузырьков. Для этого необходимо решить уравнение (7) с учетом рассеянных на пузырьках полей. Связь потенциала рассеянного пузырьком поля с изменением его объема дается формулой [12]

$$\varphi = -\dot{V}_{\Pi} (t - r/c)/4\pi r, \quad (11)$$

где $r = |\mathbf{r}|$; $\mathbf{r} = 0$ соответствует центру пузырька. С помощью выражений (6) и (11) амплитуду поля Ψ_j , действующего на j -й пузырек, запишем так:

$$\Psi_j = \Psi_{Bj} + R_{0l} \Psi_{1l} \exp(iKr_{jl}) / (S_l^2 - 1 + i\delta_l) r_{jl} \quad (12)$$

Здесь $j, l = 1, 2$; $r_{jl} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|$ — расстояние между пузырьками. Первый член в (12) — амплитуда звукового поля в точке r_j , второй член дает амплитуду поля, рассеянного l -м пузырьком. Подставив Ψ_j в (8) вместо Ψ , при условии, что $Kr_{jl} \ll 1$, т. е. $\Psi_{B1} \simeq \Psi_{B2} = \Psi_B$, $\exp(iKr_{jl}) \simeq 1$ (приближение несжимаемой жидкости), получим [13]

$$\left\langle \frac{dh}{dt} \mathbf{v}_j \right\rangle = \frac{1}{4R_{0j}^2} \left\{ \frac{2R_{0l} [(S_l^2 - 1)(S_j^2 - 1) + \delta_l \delta_j] |\Psi_B|^2 r_{jl}}{[(S_l^2 - 1)^2 + \delta_l^2] [(S_j^2 - 1)^2 + \delta_j^2] r_{jl}^3} + \left[\frac{(1 - S_j^2 + i\delta_j) \Psi_B \nabla \Psi_B^*}{(S_j^2 - 1)^2 + \delta_j^2} + \text{к. с.} \right] \right\}. \quad (13)$$

Первое слагаемое в правой части (13) описывает силу взаимодействия между частицами, а второе — силу радиационного давления. Здесь мы пренебрегаем влиянием линейного взаимодействия пузырьков на их монопольные колебания, что справедливо при условии $r_{12} \gg R_{01}, R_{02}$. Подставив выражение (13) в уравнение (7), получим

$$d\mathbf{r}_{12}/dt = \mathbf{U}_0 - \kappa \mathbf{r}_{12}/r_{12}^3, \quad (14)$$

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_{10} - \mathbf{U}_{20}, \quad \mathbf{U}_{j0} = \frac{2R_{0j}^2 \mathbf{g}}{9\nu} - \frac{1}{6\nu} \left[\frac{1 - S_j^2 + i\delta_j}{(S_j^2 - 1)^2 + \delta_j^2} \Psi^* \nabla \Psi + \text{к. с.} \right], \quad (15)$$

$$\kappa = \frac{(R_{01} + R_{02}) [(S_1^2 - 1)(S_2^2 - 1) + \delta_1 \delta_2] |\Psi|^2}{3\nu [(S_1^2 - 1) + \delta_1^2] [(S_2^2 - 1) + \delta_2^2]}. \quad (16)$$

Уравнение (14) описывает относительное движение двух взаимодействующих частиц под действием сил радиационного давления в вязкой жидкости. При этом предполагается, что масштаб изменения поля Ψ велик по сравнению с характерным масштабом данной задачи, т. е. величины U_0 и κ не зависят от r_{12} .

Выберем ось x параллельной U_0 , тогда для начальных условий $t \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow b$ решение (14) имеет вид

$$U_0 (b^2 - y^2)/2 - \kappa (1 + x/\sqrt{x^2 + y^2}) = 0. \quad (17)$$

При $t \rightarrow \infty$ $x \rightarrow \infty$, $y^2 \rightarrow y_0^2 = b^2 - 4\kappa/U_0$. Отрицательной величине y_0^2 соответствует нестационарное связанное состояние, следствием которого может быть коагуляция пузырьков. Значение $b = b_0$, которое удовлетворяет условию $y_0 = 0$, является максимальным прицельным параметром для этого процесса. Таким образом, сечение столкновения $\sigma = \pi b_0^2$ можно записать в форме

$$\sigma = \begin{cases} 4\pi\kappa/|U_0|, & \kappa \geq 0, \\ 0, & \kappa < 0. \end{cases} \quad (18)$$

Для пузырьков одинакового размера $U_0 = 0$ и сечение столкновения становится бесконечно большим, поскольку разность сил радиационного давления, которая препятствует сближению пузырьков, равна нулю, а их притяжение остается. Для устранения этой расходимости достаточно учесть пространственную неоднородность сил радиационного давления; правда, в этом случае не удается найти аналитического решения. Но при исследовании кинетических процессов основную роль играет не сечение столкновения, а вероятность столкновений двух пузырьков в единицу времени, т. е. величина $\sigma |U_0|$, имеющая везде конечные значения

$$\sigma |U_0| = \begin{cases} 4\pi\kappa, & \kappa \geq 0, \\ 0, & \kappa < 0. \end{cases} \quad (19)$$

На этом мы закончим обсуждение поведения одиночного пузырька в звуковом поле и перейдем к рассмотрению звуковых волн в пузырьковой среде.

2. Звуковые волны в газожидкостной смеси

Уравнения звуковых волн. В настоящее время можно выделить два подхода к описанию поведения звуковых волн в газожидкостной смеси. Наиболее распространены континуальный (квазигомогенный) подход, в основе которого лежит описание процессов через средние (макроскопические) поля скорости v_c , плотности ρ_c и давления P_c . Объем осреднения выбирается таким, что он содержит достаточно много пузырьков газа, но его характерный размер много меньше масштаба неоднородности звукового поля. Из законов сохранения массы и импульса можно получить уравнения Эйлера и неразрывности. Для замыкания полученных уравнений к ним добавляют уравнение состояния $\rho_c = \rho_c(P_c, V)$, где V — газосодержание, и уравнение монополярных колеба-

ний пузырька. При этом предполагается, что давление P_c равно давлению P , которое входит в уравнение монопольных колебаний (1). Основные положения этой теории были сформулированы в работах [15—17].

Для обоснования такого «макроскопического» подхода и нахождения некогерентной составляющей поля параллельно развивается «микроскопический» метод многократного рассеяния, основанный на суммировании полей, рассеянных на монопольных колебаниях пузырьков [18]. Оба эти метода в пренебрежении нелинейностью жидкости дают для потенциала макроскопического поля φ_c уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (20)$$

Здесь и далее индекс «с» у φ опускается; $V = \int_0^\infty V_{пN}(R_0, r, t) dR_0$ — объемное газосодержание; $N(R_0, r, t)$ — функция распределения пузырьков по радиусам; c — скорость звука в чистой жидкости. Уравнение (20) является основным при решении большинства задач как линейной, так и нелинейной акустики пузырьков сред. Совместно с уравнениями (1) и (2) мы имеем замкнутую систему, но при этом учитывается влияние только монопольных колебаний.

Влияние дипольных колебаний через рассеянные на них поля, как уже отмечалось выше, мало. Гораздо более существенно обратное влияние звукового поля на концентрацию пузырьков через их поступательное движение. Этот процесс происходит медленно по сравнению с периодом звукового поля, что существенно упрощает решение конкретных задач. Здесь мы рассмотрим простейший случай, когда звуковое поле изменяется во времени по квазигармоническому закону

$$\varphi = (1/2) [\Psi(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} + \text{к. с.}].$$

Уравнение для концентрации пузырьков N можно получить из условия баланса частиц в элементе фазового объема $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta R_0$ с учетом их коагуляции; оно имеет вид ²

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \text{div}(NU) = & -N(R_0) \int_0^\infty N(R'_0) \sigma(R_0, R'_0) |U(R_0) - \\ & - U(R'_0)| dR'_0 + \frac{1}{2} \int_0^{R_0} N(R''_0) N(R'_0) \sigma(R''_0, R'_0) |U(R''_0) - \\ & - U(R'_0)| \frac{R_0^2}{(R'_0)^2} dR'_0. \end{aligned} \quad (21)$$

² В наших работах [19—21] при записи второго члена в правой части уравнения (21) пропущен множитель $R_0^2/2R_0'^2$. Мы благодарны А. О. Максимо-ву, указавшему на эту ошибку в своей работе [22], в которой на основании уравнения (21) определена стационарная функция распределения пузырьков по радиусам.

Правая часть (21) имеет смысл интеграла столкновений, учитывающего изменение спектра пузырьков при коагуляции; первый член дает «уход» пузырьков из окрестности R_0 , а второй — «приход» пузырьков, вновь образовавшихся из более маленьких. Радиусы пузырьков R'_0 и R''_0 определяются из закона сохранения массы газа в них. Скорость движения пузырька U — это средняя скорость движения под действием макроскопического поля. Выражение для нее можно получить из (7) с учетом (8) (где снова отбрасывается инерционный член):

$$U = U_0 - (q/24\pi R_0 v) \nabla \Phi + (i\gamma_1/24\pi R_0 v) (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*). \quad (22)$$

Здесь U_0 — скорость движения пузырька в отсутствие звука (например, из-за всплытия); $\Phi = |\Psi|^2$ — интенсивность звука; $q = 4\pi R_0 (1 - S^2) [(1 - S^2)^2 + \delta^2]^{-1}$; $\gamma_1 = 4\pi R_0 \delta [(1 - S^2)^2 + \delta^2]^{-1}$. В данной модели предполагается, что на пузырек действуют силы радиационного давления, обусловленные макроскопическим полем, т. е. внешним звуковым полем и суммарным полем, рассеянным другими пузырьками. Влияние же поля ближайших пузырьков учитывается через их парные столкновения, поэтому величина $\sigma |U_1 - U_2|$ в уравнении (21) именно та, для которой получено выражение (19). Наконец, из уравнения (20), используя линейное уравнение монопольных колебаний (3), получаем для амплитуды Ψ

$$\Delta \Psi + \left[K^2 - \int_0^\infty (q + i\gamma_1) N dR_0 \right] \Psi = 0, \quad (23)$$

где $K = \omega/c$.

Самовоздействие звука в жидкости с пузырьками. Перейдем теперь к изучению нелинейных волновых процессов в пузырьковой среде, связанных с осредненным воздействием акустического поля на пузырьки. Всеми «индивидуальными» нелинейностями пузырька будем пренебрегать, учитывая только коллективные эффекты, которые описываются уравнениями (21)—(23). Силы радиационного давления и взаимодействия пузырьков приводят к их перераспределению в пространстве и в результате к «самовоздействию» звука. Ввиду сложности общего случая, примем здесь несколько упрощающих предположений: а) в начальный момент пузырьки имеют одинаковый радиус, а образовавшиеся при слиянии не влияют непосредственно на звуковое поле; тогда второй интеграл в правой части (21) равен нулю, а первый легко берется; б) пузырьки имеют резонансный по отношению к звуковой волне радиус. Заметим, что второе предположение в значительной мере оправдывает первое — пузырьки при слиянии выходят из резонанса (хотя «а» сохраняет смысл и без «б», например, для пузырьков с радиусами больше резонансного; в работах [20, 21] обсуждается более общий, чем здесь, случай). Наконец, будем в основном рассматривать одномерные модулированные волны, хотя в конце обсудим и пространственные эффекты.

В результате для бегущей волны уравнения (21)–(23) нетрудно привести к виду

$$\partial I / \partial z + nI = 0, \quad (24)$$

$$\partial n / \partial \tau + (W_0 + I/2) \partial n / \partial z + n^2 I / 2 = 0, \quad (25)$$

где I , n — безразмерные интенсивность звука и концентрация: $I = \Phi / \Phi_0$, $\Phi = |\Psi|^2$, $\Psi = \Psi_0(x, t) e^{-iKx}$, $n = N / N_0$; Φ_0 — интенсивность звука в чистой жидкости; N_0 — концентрация пузырьков в отсутствие звука; $z = x / L_0$; $L_0 = K / \gamma_1 N_0$ — длина затухания звука согласно линейной теории; $\tau = t / T_0$; $T_0 = 3\delta v / 2\gamma_1 N_0 \Phi_0$ — характерное время изменения концентрации пузырьков за счет коагуляции в звуковом поле интенсивности Φ_0 ; $W_0 = 3\delta v U_0 / 2K\Phi_0$ — скорость свободного движения пузырьков, нормированная на скорость движения под действием силы радиационного давления.

Система уравнений (24), (25) допускает несколько сравнительно простых, но физически интересных аналитических решений.

1. Рассмотрим сначала стационарную задачу о проникновении волны в полупространство, заполненное пузырьками. Пусть при $z = 0$ имеется источник звука, который не препятствует общему движению жидкости с пузырьками вдоль оси z со скоростью U_0 . Отыскивая не зависящее от времени решение (24), (25) с граничными условиями $n(0) = I(0) = 1$, получим

$$n = W_0 \left[W_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp \left(- \frac{2W_0 z}{2W_0 + 1} \right) \right]^{-1}, \quad (26)$$

$$I = W_0 \left[\left(W_0 + \frac{1}{2} \right) \exp \left(\frac{2W_0 z}{2W_0 + 1} \right) - \frac{1}{2} \right]^{-1}.$$

Эти формулы описывают своеобразную «борьбу за выживание»: наличие пузырьков приводит к затуханию поля, а поле — к уменьшению концентрации резонансных пузырьков за счет их слияния. Если $U_0 > 0$, то при $z \rightarrow \infty$ звук затухает, а концентрация пузырьков стремится к конечной величине $n_\infty = 2W_0 / (2W_0 + 1)$ («побеждают пузырьки»); если же $U_0 < 0$, но $W_0 + 1/2 > 0$, то на бесконечности $n \rightarrow 0$, а I стремится к конечному значению: $I_\infty = -2W_0$ («побеждает звук»). Если $W_0 + 1/2 < 0$, то n и I экспоненциально стремятся к нулю при $z \rightarrow \infty$ (пузырьки и звук «уничтожают» друг друга). То же самое получается и при $U_0 = 0$, когда формулы (26) преобразуются в более простые: $n = I = (1 + z)^{-1}$.

2. Для безграничной пузырьковой среды исходные уравнения (24), (25) имеют решение в виде бегущего перепада — ударной волны огибающей:

$$n = (1/2) (1 + \text{th } \zeta/2), \quad I = (1/2) (1 - \text{th } \zeta/2), \quad (27)$$

где $\zeta = z - v_s \tau$; v_s — безразмерная скорость волны, которую в размерных переменных можно записать в форме

$$U_s = U_0 + 2K\Phi_0 / 3\delta v. \quad (28)$$

Из (27) видно, что ударная волна имеет асимптотики

$$n \rightarrow 1, I \rightarrow 0 \text{ при } \zeta \rightarrow \infty,$$

$$n \rightarrow 0, I \rightarrow 1 \text{ при } \zeta \rightarrow -\infty,$$

т. е. в данном случае поле «истребляет» все пузырьки. Скорость же ударной волны складывается из скорости свободного движения пузырьков U_0 и скорости U_R их движения под действием силы радиационного давления. Любопытно отметить, что при $U_0 = -U_R$ имеем $U_s = 0$, т. е. ударный перепад неподвижен. Оценим величину U_R , используя данные эксперимента, описанного ниже: амплитуда звукового давления $A_0 = 2,7 \cdot 10^3$ Па, частота звукового поля $f = 1,3 \cdot 10^5$ Гц, $\delta = 0,07$, $\nu = 10^{-2}$ см²/с. Тогда $U_R \simeq 10$ см/с, т. е. более чем на четыре порядка меньше скорости звука.

3. Для модели, представленной системой уравнений (24), (25), можно найти также решения, описывающие переходный процесс, приводящий к формированию ударной волны.

Пусть при $\tau = 0$ пузырьки заполняют полупространство $z > 0$, т. е.

$$n(\tau = 0, z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z \geq 0. \end{cases} \quad (29)$$

На границу слоя падает звуковая волна интенсивности I_0 , которая, вообще говоря, может зависеть от времени:

$$I(\tau, z \leq z^*(\tau)) = I_0(\tau). \quad (30)$$

В граничном условии (30) учтено движение границы пузырькового слоя под действием силы радиационного давления ($z^*(\tau)$ — ее положение в произвольный момент времени). Перейдем в уравнениях (24), (25) к переменным Лагранжа, связанным с поступательным движением пузырьков, с помощью преобразования

$$\tau = \tau, \quad z = \zeta + \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^\tau I(\zeta, \tau') d\tau', \quad (31)$$

после чего получим

$$\frac{\partial I}{\partial \zeta} + \left[1 + \frac{1}{2} \int_0^\tau \frac{\partial I}{\partial \zeta} d\tau'\right] nI = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} + \frac{1}{2} n^2 I = 0. \quad (33)$$

Введение новой функции $m = n^{-1}$ переводит уравнения (32), (33) в более простые:

$$I = 2\partial m / \partial \tau, \quad (34)$$

$$(1 + \partial m / \partial \zeta) m = C(\zeta), \quad (35)$$

где $C(\zeta)$ — произвольная функция, возникающая в результате промежуточного интегрирования по τ . Так как при $\tau = 0$, $m = 1$, а $\partial m / \partial \zeta = 0$, то $C(\zeta) = 1$. Решение (34), (35) с граничными и начальными условиями (29), (30) (в переменных τ , ζ положение границы соответствует точке $\zeta = 0$, $z^* = (1/2) \int_0^\tau I_0 d\tau'$) имеет вид

$$m + \ln [(m - 1)/J] = J + 1 - m, \quad (36)$$

$$I = I_0 (m - 1) (1 + J^{-1})/m. \quad (37)$$

Здесь $J = \frac{1}{2} \int_0^\tau I_0(\tau') d\tau'$. Из (31) следует

$$z = \zeta + m - 1. \quad (38)$$

Исключая из (36)—(38) переменную ζ , окончательно получим

$$n = [1 + J \exp(z - J)]^{-1}, \quad (39)$$

$$I = I_0 (1 + J) \exp(J - z) [1 + J \exp(J - z)]^{-1} \text{ при } z \geq J \quad (40)$$

и

$$n = 0, I = I_0(\tau) \text{ при } z < J.$$

Если I_0 не зависит от τ , т. е. $I_0 = 1$, то выражения (39), (40) переходят в более простые:

$$n = [1 + (1/2) \tau \exp(\tau/2 - z)]^{-1}, \quad (41)$$

$$I = (1 + \tau/2) \exp(\tau/2 - z) [1 - (\tau/2) \exp(\tau/2 - z)]^{-1}. \quad (42)$$

На рис. 1 показаны зависимости n и I от z для разных значений τ . При $\tau \rightarrow \infty$ формируется ударная волна; практически это происходит на расстоянии $z \simeq 16$ (кривая 5).

4. Рассмотрим задачу о прохождении звука через пузырьковый слой конечной толщины H_0 , которая может служить простейшей моделью эффекта просветления газожидкостной смеси для звуковых волн. Начальные и граничные условия аналогичны (29), (30). Качественный ход процесса показан на рис. 2. Обе границы слоя смещаются под действием радиационного давления, причем скорость движения второй границы ($z = H(\tau)$) увеличивается по мере роста интенсивности прошедшего через слой звука. Из (38) для величины H следует уравнение

$$H = H_0 + (\tau/2) \exp(\tau/2 - H), \quad (43)$$

а из (41), (42) получаем выражения для концентрации на границе и интенсивности звука, прошедшего через слой:

$$n = (1 + H - H_0)^{-1}, \quad (44)$$

$$I = 2 (1 + \tau/2) (H - H_0)/\tau (1 + H - H_0). \quad (45)$$

На рис. 3 показано изменение n , I в зависимости от τ для различных значений H_0 . Имеет место ослабление затухания звука из-за уменьшения концентрации пузырьков.

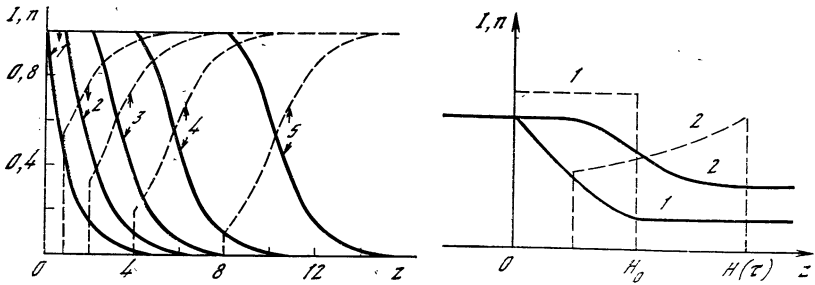


Рис. 1. Формирование ударной волны в полубесконечном однородном слое пузырьков

Сплошные линии — интенсивность звука I ; штриховые — концентрация пузырьков n ; 1 — $\tau = 0$; 2 — 1,7; 3 — 4; 4 — 8; 5 — 32

Рис. 2. Пространственные распределения интенсивности звука (сплошные линии) и концентрации пузырьков (штриховые) при $\tau = 0$ (1) и в произвольный момент времени τ (2)

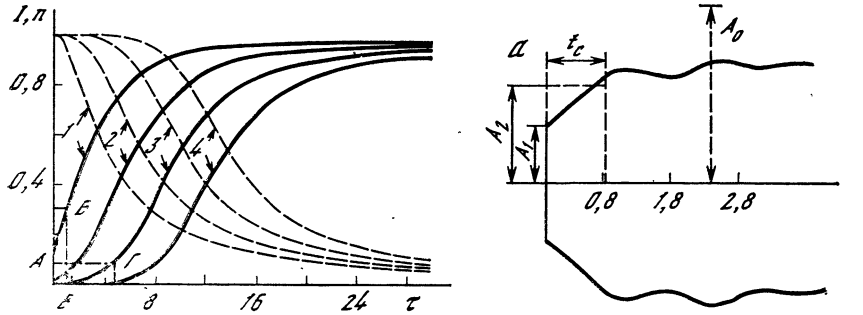


Рис. 3. Зависимости интенсивности звука I , прошедшего через слой пузырьков (сплошные линии), и концентрации пузырьков n на границе слоя (штриховые) от времени τ для разных значений H_0
1 — $H_0 = 2$; 2 — 4; 3 — 6; 4 — 8

Рис. 4. Временные осциллограммы амплитуды звука, прошедшего через слой пузырьков ($A_0 = 2,7 \cdot 10^3$ Па)
а — $L_0 = 5$ см; б — 2 см; в — 1 см

Хотя обсуждаемая модель сильно идеализирована, полезно сравнить ее результаты с экспериментальными данными, представленными в работах [11, 21], где исследовалось прохождение звука через слой пузырьков толщиной около 10 см. Пузырьки создавались на дне ванны путем электролиза воды. Всплывая, они пересекали звуковой пучок, падающий нормально на границу жидкость — газожидкостная смесь. После включения звука устанавливались стационарные распределения звукового поля и concentra-

ции пузырьков, что является следствием баланса числа пузырьков, входящих в звуковой пучок, выходящих из него и коагулирующих. Полученные же выражения (44), (45) нестационарны и в асимптотике $\tau \rightarrow \infty$ дают полное «просветление» для звука. Поэтому сравнение теоретических и экспериментальных результатов возможно только для ограниченных интервалов времени, меньших времени прохождения поперечного сечения звукового пучка всплывающими пузырьками. На рис. 4 представлены результаты измерения зависимости интенсивности звука, прошедшего через слой пузырьков, от времени. Время нарастания интенсивности звука I (здесь $I = A_1^2/A_0^2$, где A_1 — амплитуда звука, прошедшего через слой пузырьков, A_0 — амплитуда звука в чистой жидкости) от 0,1 до 0,3 составляет 0,6 с для случая, показанного на рис. 4, а. При этом $L_0 = 5$ см, и для слоя пузырьков толщиной 10 см получаем $H_0 = 2$. Выражение для T_0 можно представить в виде $T_0 = 3\pi\nu\delta\lambda\rho_0^2 L_0 f^2 A_0^{-2}$. При $\nu = 10^{-2}$ см²/с, $\lambda = 1,1$ см (длина волны звука), $\delta = 0,07$, $f = 1,3 \cdot 10^5$ Гц (f — частота звука) и $A_0 = 2,7 \cdot 10^3$ Па получаем $T_0 = 0,9$ с. На рис. 3 рассматриваемой ситуации соответствует кривая I , а безразмерное время τ^* перехода из точки A в точку B равно 0,9. Следовательно, увеличение интенсивности звука от величины 0,1 до 0,3 происходит за время $t^* = T_0\tau^* = 0,8$ с, что хорошо согласуется с экспериментально измеренным значением. К сожалению, это единственный подходящий пример из представленных на рис. 4 измерений; для других же случаев, которые соответствуют большей концентрации пузырьков, теория дает время t^* , значительно большее, чем полученное в эксперименте. Например, нарастание интенсивности от величины 0,003 до 0,08 на рис. 4, б происходит за время 0,7 с, а теория дает для него величину, равную 10 с (кривая Z на рис. 3, переход в точку Γ).

Основной причиной такого расхождения является тот факт, что в теории пузырьки предполагаются имеющими одинаковые размеры, а в эксперименте они распределены по радиусам. Интересно, что в некоторых реализациях количество пузырьков, приходящих при коагуляции в резонансную область значений радиусов, компенсируется уходящими из нее, т. е. интегралы столкновений в уравнении (24) равны по величине. При этом количество резонансных пузырьков и коэффициент затухания звука не изменяются, в подтверждение сказанного на рис. 4, в представлено измерение, в котором интенсивность звука оставалась постоянной в течение времени $\Delta t \simeq 0,5$ с.

В рассмотренной выше модели мы учитывали коагуляцию только одинаковых пузырьков, поэтому интеграл столкновений в уравнении (24) пропорционален N^2 , что привело, в свою очередь, к зависимости длительности переходного процесса от концентрации пузырьков ($T_0 \sim N^{-1}$). Экспериментальные же результаты показывают, что это время практически не зависит от концентрации, т. е. процесс коагуляции должен описываться членом, пропорциональным не N^2 , а N (действительно, при этом уравнение (21) было

бы линейно по N). Это наводит на мысль, что при построении более точной теоретической модели возможен подход, аналогичный используемому при выводе уравнения Фоккера—Планка (диффузионное приближение) [23], где предполагается малость изменения импульса частиц при рассеянии. В нашем случае это соответствует коагуляции «больших» пузырьков с «маленькими».

Таким образом, эксперимент качественно соответствует теории, а для малых концентраций налицо и количественное совпадение.

Неустойчивость однородной концентрации пузырьков в поле бегущей звуковой волны. В 1961 г. Л. П. Горьковым [24] впервые было указано на возможность группировки пузырьков в поле стоячей звуковой волны. Оказывается, что этот эффект может иметь место и в случае бегущей волны, поскольку состояние среды с однородной концентрацией пузырьков в этом случае неустойчиво. Физический смысл этой неустойчивости заключается в следующем: случайные неоднородности распределения в пространстве пузырьков одинакового радиуса, отличного от резонансного ($q \neq 0$), дают рассеянное в обратном направлении звуковое поле, что приводит к появлению в звуковой волне стоячей компоненты и росту неоднородности концентрации с пространственным масштабом π/K , усиливающей, в свою очередь, рассеянное поле, и т. д. Очевидно, что эта неустойчивость приводит к обращению волнового фронта. С другой стороны, если амплитуда волны неоднородна, то появляется сила, втягивающая маленькие пузырьки ($q < 0$) в область более сильного поля и выталкивающая оттуда большие ($q > 0$) (см. формулу (10)), что приводит к уменьшению скорости звука, а значит, к увеличению его амплитуды. С этой неустойчивостью связана самофокусировка звука.

Рассмотрим вкратце указанные выше неустойчивости (в основном для случая пузырьков одинакового размера). Более подробно этот вопрос изложен в работах [20, 21].

Вернемся к системе уравнений (21)—(23). Будем искать ее решение в форме

$$N = N_0 + n(\mathbf{r}, t), \quad (46)$$

$$\Psi = [\Psi_0 + \Psi_1(\mathbf{r}, t)] \exp(-i\eta x), \quad (47)$$

$$\eta^2 = K^2 - (q + i\gamma_1) N_0. \quad (48)$$

Предположим, что n/N_0 , $|\Psi_1|/|\Psi_0| \ll 1$, и пренебрежем интегралами столкновений в (21), тогда для величин $E = \Psi_1/\Psi_0$ и n подстановкой (46)—(48) в (21)—(23) получим уравнения

$$\Delta E - 2i\eta \partial E / \partial x - qn = 0, \quad (49)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{N_0 \Phi_0 (1 - S^2)}{6\nu [(1 - S^2)^2 + \delta^2]} (\Delta E + \text{к. с.}) = 0. \quad (50)$$

Для величин n , $\text{Re} E$, $\text{Im} E$ ищем решение (49), (50) в форме

$$n, \text{Re} E, \text{Im} E = (1/2) [n_0, (\text{Re} E)_0, (\text{Im} E)_0 \exp(\sigma t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) + \text{к. с.}]; \quad (51)$$

тогда из (49), (50) получаем дисперсионное уравнение, связывающее величину σ с k :

$$\sigma = 2\beta \frac{1 + i(\cos \theta)/L_0 K}{[1 - (4K^2/k^2) \cos^2 \theta]^2 + (4/L_0^2 k^2) \cos^2 \theta}, \quad (52)$$

где $\beta = \Phi_0 N_0 q^2 / 24\pi R_0 v$; $\cos \theta = k_{\parallel} / k$; $k = |k|$; k_{\parallel} — составляющая вектора k в направлении падения звуковой волны (координаты x). Для инкремента $\text{Re } \sigma$ из (52) следует

$$\text{Re } \sigma = 2\beta \frac{1 - (4K^2/k^2) \cos^2 \theta}{[1 - (4K^2/k^2) \cos^2 \theta]^2 + (4/L_0^2 k^2) \cos^2 \theta}. \quad (53)$$

Из выражения (53) нетрудно увидеть, что для возмущений (51) с волновыми векторами k , удовлетворяющими условию

$$k > 2K |\cos \theta|,$$

$\text{Re } \sigma > 0$, т. е. эти возмущения экспоненциально растут (однородная концентрация пузырьков в поле бегущей звуковой волны действительно неустойчива). Максимальное значение

$$(\text{Re } \sigma)_{\max} = \beta L_0 K = (1 - S^2)^2 K^2 \Phi_0 / [(1 - S^2)^2 + \delta^2] 6\delta v$$

реализуется, когда k и θ удовлетворяют условию

$$k = 2K (1 + 1/2L_0 K) \cos \theta = 2K (1 + 1/2L_0 K) k_{\parallel} / k. \quad (54)$$

Интересно отметить, что максимальное значение инкремента постоянно на всей замкнутой экстремальной кривой (54) в пространстве волновых векторов возмущений. Вместе с тем разные участки кривой качественно соответствуют различным типам неустойчивостей, о которых уже упоминалось в начале этого раздела. Во-первых, квазипродольные возмущения с $k \simeq 2K$ ($k_{\parallel} \simeq k$) соответствуют рассеянному в обратном направлении полю, для которого имеет место обращение волнового фронта. Во-вторых, рост возмущений с поперечными волновыми векторами, когда $k \simeq K_{\perp}$ (K_{\perp}^{-1} — масштаб неоднородности волнового фронта на качки), дает «самоканализацию» волны, ее разбиение на нити; при изменении амплитуды вдоль x это, по-видимому, дает самофокусировку. Наконец, в промежуточной области возмущения концентрации локализуются в «ячейках», что, возможно, и приводит к образованию групп пузырьков, которые наблюдались экспериментально [11]. Отметим, что, хотя все типы неустойчивостей могут развиваться одновременно, время установления на нелинейной стадии, видимо, минимально для продольной неустойчивости, где минимальный пространственный масштаб возмущений.

Особенность рассмотренных неустойчивостей (в отличие от известных, скажем, в оптике [25]), состоит, в частности, в отсутствии порога по интенсивности при заданном масштабе возмущений. Причина этого связана с релаксационным характером нелинейности (напомним, что и в оптике релаксирующих сред порог тоже,

строго говоря, исчезает [26]) и с отсутствием сил, препятствующих группировке пузырьков в поле.

Для пузырьков, распределенных по размерам (эта задача рассматривалась в [20, 21]), ситуация существенно изменяется. Здесь основную роль играют пузырьки, близкие к резонансным, причем пузырьки, размеры которых лежат выше и ниже резонансного, ведут себя по-разному: во-первых, как это было показано выше, они группируются в различных областях пучка и, во-вторых, фазы рассеянных на них звуковых полей различны. При этом инкремент неустойчивости, связанной с самофокусировкой, сохраняется, поскольку процесс перегруппировки пузырьков в неоднородном поле идет даже эффективнее, чем для пузырьков одинакового радиуса. Что касается продольной неустойчивости, связанной с обращением волнового фронта, то, если не учитывать конвективного сноса пузырьков под действием сил радиационного давления, в поле образуются как бы две одномерные «решетки» возмущений концентрации пузырьков (соответственно из «больших» и «малых» пузырьков), имеющие период $\lambda/2$ и сдвинутые одна относительно другой на $\lambda/4$. В этом случае неустойчивость остается, так как поля, рассеянные от этих решеток в обратном направлении, складываются в фазе. Однако если учесть указанный конвективный снос (третье слагаемое в уравнении (22)), то, поскольку его скорость зависит от радиуса, вместо двух «решеток» образуется их непрерывное множество, распределенное таким образом, что рассеянные в обратном направлении поля компенсируют друг друга и неустойчивость исчезает.

Заключение

Из сказанного выше видно, что свойства газожидкостной смеси как нелинейной диспергирующей среды во многом сходны со свойствами, в частности, плазмы. Такие процессы, как солитоны, ударные волны, эффекты эха, самофокусировки и др., хорошо известные в физике плазмы и нелинейной оптике, сейчас изучены теоретически, а в ряде случаев реализованы экспериментально в акустике пузырьковых сред. Вместе с тем механизм взаимодействия поля с «элементарной частицей» — пузырьком — имеет и существенные особенности, что приводит к своеобразию волновых процессов. Прежде всего необходимо помнить, что обмен энергией между полем и пузырьком происходит главным образом через монопольные колебания, к тому же, возможно, резонансным образом, и в этом смысле связь поля с частицами оказывается значительно более сильной, чем в плазме, где взаимодействие имеет дипольный характер, а отдельная частица не обладает резонансными свойствами; так, важнейшая характеристика плазмы — ленгмюровская частота — определяется совокупным движением заряженных частиц и зависит от их концентрации. Если же говорить об осредненных движениях, то необходимо отметить, что, хотя сила взаимодействия двух пузырьков имеет кулоновский харак-

тер, эффективный заряд частицы не фиксирован, а зависит от амплитуды и фазы монополярных колебаний. Наконец, изменение концентрации частиц в пузырьковой среде происходит не только из-за эффектов их движения под действием поля, но и вследствие их слияния, причем в этом случае тепловые эффекты, стремящиеся восстановить равновесную функцию распределения, как правило, незначительны. Все это приводит к разнообразным возможностям «борьбы за выживание» между полем и пузырьками, рассмотренными выше, к существенно иным условиям неустойчивости гармонических волн и другим эффектам.

Вообще до сих пор при изучении нелинейных волновых процессов в жидкости с пузырьками основное внимание уделялось изучению эффектов, уже известных для других сред и описываемых аналогичными уравнениями. Специфика газожидкостной смеси как нелинейной диспергирующей среды заслуживает, на наш взгляд, дальнейшего изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рюттов Д. Д. Аналог затухания Ландау в жидкости с пузырьками газа // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 22, № 9. С. 46—48.
2. Наугольных К. А., Островский Л. А., Сутин А. М. Нелинейная акустика // Нелинейные волны. М.: Наука, 1981. С. 166—185.
3. Бункин Ф. В., Власов Д. В., Кравцов Ю. А. Обращение волнового фронта в акустике: нелинейные механизмы и возможные применения: Препр. ФИАН СССР № 90. М., 1982. 78 с.
4. Лопатников С. Л. Акустическое фазовое эхо в жидкости с пузырьками газа // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 6, № 10. С. 623—626.
5. Iernetti G., Sagoo M. S. Self-focusing of acoustic waves during cavitation // Acustica. 1978. Vol. 41. P. 32—36.
6. Аскарьян Г. А. Самофокусировка мощного звука при рождении пузырьков // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13, № 7. С. 395—396.
7. Воробьев Е. М., Заболотская Е. А. Самовоздействие звуковых волн в среде с пузырьками воздуха // Акуст. журн. 1974. Т. 20, № 4. С. 623—624.
8. Соболев В. В. Распространение и самофокусировка звука в неоднородной газожидкостной среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. Т. 1, № 6. С. 177—180.
9. Заболотская Е. А. Два механизма самовоздействия звуковых волн, распространяющихся в газожидкостной смеси // Акуст. журн. 1977. Т. 23, № 4. С. 591—595.
10. Giuti P., Iernetti G., Sagoo M. S. Optical visualization of non-linear acoustic propagation in cavitating liquids // Ultrasonics. 1980. Vol. 18, N 3. P. 111—114.
11. Кобелев Ю. А., Островский Л. А., Сутин А. М. Эффект самопросветления для акустических волн в жидкости с пузырьками газа // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30, № 7. С. 423—425.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Гостехтеориздат, 1954. 795 с.
13. Кобелев Ю. А. Нелинейные дипольные колебания сферической частицы в звуковом поле // Акуст. журн. 1983. Т. 29, № 6. С. 783—789.
14. Немцов Б. Е. Эффекты радиационного взаимодействия пузырьков в жидкости // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 8, № 14. С. 858—861.
15. Иорданский С. В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ЖПМТФ. 1960, № 3. С. 102—110.
16. Козарко Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости // ДАН СССР. 1961. Т. 137, № 6. С. 1331—1333.

17. Крайко А. Н., Низматуллин Р. И., Старков В. К., Стернин Л. Е. Механика многофазных сред // Гидромеханика. М.: Наука, 1972. Т. 6. 180 с. (Итоги науки и техники).
18. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики / Пер. с англ. под ред. С. П. Амилюева и др. М.: Изд-во иностр. лит. 1960. Т. 2. 886 с.
19. Кобелев Ю. А., Островский Л. А. Коллективное самовоздействие звука в жидкости с пузырьками газа // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 37, № 1. С. 5—8.
20. Горшков К. А., Кобелев Ю. А. Влияние коллективного механизма самовоздействия звука на распространение акустических волн в жидкости с пузырьками газа: Препр. ИПФ АН СССР № 84. Горький, 1983. 26 с.
21. Кобелев Ю. А. Когерентные эффекты в нелинейной акустике жидкости с пузырьками газа: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.06. Горький: ИПФ АН СССР, 1984. 136 с.
22. Максимов А. О. Распределение пузырьков, коагулирующих в звуковом поле // Акуст. журн. 1985. Т. 31, № 4. С. 548—549.
23. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
24. Горьков Л. П. О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости // ДАН СССР. 1961. Т. 140, № 1. С. 88—91.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Наука, 1982. 620 с.
26. Островский Л. А. Ударные волны огибающих // ЖЭТФ. 1968. Т. 54, № 4. С. 1235—1243.



УДК 532.59 : 551.46

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСФОРМАЦИИ СПЕКТРОВ ВЕТРОВОГО ВОЛНЕНИЯ ВНУТРЕННИМИ ВОЛНАМИ

А. Я. БАСОВИЧ, В. В. БАХАНОВ, В. И. ТАЛАНОВ

Введение

Взаимодействие поверхностных и внутренних волн в океане — один из наиболее интересных примеров взаимодействия волн существенно различных пространственных и временных масштабов [1]. Исследование его наряду с научным имеет важное практическое значение, поскольку благодаря воздействию внутренних волн (ВВ)¹ на характеристики ветрового волнения удастся «заглянуть» в глубины океана и получить дополнительную информацию о происходящих там движениях водных масс. Проявление ВВ

¹ Внутренние волны — волны в стратифицированной по плотности жидкости (плотность меняется с глубиной). В океане стратификация связана с изменением с глубиной температуры и солености. Внутренние волны в океане имеют характерные периоды от минут до часов, длины — от сотен метров до десятков километров, скорости — от одного-двух дециметров до двух метров в секунду.

на поверхности позволяет регистрировать их дистанционными методами с самолетов и спутников и получать данные о ВВ одновременно на больших акваториях, что недоступно традиционным контактными методами океанологии. Внутренние волны проявляются на поверхности в виде гладких и взволнованных полос (называемых соответственно сликами и сулоями). Видимый контраст полос обусловлен изменением отражательной способности морской поверхности при перестройке спектра ветрового волнения. В большинстве случаев проявления ВВ на поверхности хорошо заметны при достаточной их интенсивности и относительно слабом ветре (до 5 м/с).¹

Обсуждаются в основном три механизма данного явления: модуляция коэффициента затухания поверхностных волн вследствие перераспределения под действием ВВ пленок поверхностно-активных веществ [2], влияние на характеристики ветрового волнения изменения турбулентности в приповерхностном слое в присутствии ВВ [3], трансформация поверхностных волн на переменном течении, создаваемом ВВ. Первые два из указанных механизмов относятся к самой высокочастотной части спектра ветрового волнения — практически к ряби, и их эффективность существенно зависит от концентрации пленок и характеристик турбулентности у поверхности. Третий механизм, обсуждаемый в настоящей работе, описывает изменение дециметровой и метровой частей спектра поверхностных волн и связан с непосредственным влиянием течения, индуцированного на поверхности ВВ, на распространение поверхностных волн. Соответствующая ему модель названа кинематической, поскольку основные эффекты, возникающие в рамках этой модели, обусловлены именно изменением кинематических характеристик пакетов поверхностных волн под действием ВВ.

В основе кинематической модели лежит развитая в [1] аналогия распространения пакетов высокочастотных волн в присутствии длинной низкочастотной волны с движением заряженных частиц в поле электромагнитной волны. Рассматриваемый механизм наиболее эффективен для поверхностных волн с групповой скоростью, близкой к фазовой скорости ВВ, т. е. при групповом синхронизме. Однако в случае интенсивных ВВ заметный эффект возможен и вдали от такого синхронизма. При выполнении условий группового синхронизма наряду с простой модуляцией параметров поверхностных волн могут возникать эффекты их блокировки и захвата полем ВВ. Эффект блокировки поверхностных волн, заключающийся в остановке и отражении волнового пакета на переменном течении, исследовался впервые в работах [4, 5]. В [6, 7] он использовался для объяснения явления воздействия ВВ на поверхностные волны. Однако в указанных работах был отмечен лишь факт остановки волновых пакетов течением и не учитывалось отражение поверхностных волн при блокировке, приводящее к значительному изменению их волнового числа. Полное описание эффекта блокировки было дано в [8—10]. На

базе этих работ проводилась разработка кинематической модели в [11—15].

В данной работе в рамках кинематической модели рассматривается ряд не исследованных ранее особенностей воздействия коротких цугов ВВ на характеристики ветровых волн. Проводится сопоставление результатов теоретического исследования трансформации спектров ветрового волнения цугами ВВ с экспериментальными данными.

1. Уравнения кинематической модели.

Постановка задачи

Для описания волнения на медленно меняющемся течении, создаваемом длиной ВВ, используется понятие пространственного амплитудного спектра с плотностью [15]²

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \rho g \frac{1}{(2\pi)^2} \int B(R, \mathbf{r}, t) \exp(-ikR) dR, \quad (1)$$

где $B(R, \mathbf{r}, t) = \langle \zeta_s(\mathbf{r} - R/2, t) \zeta_s(\mathbf{r} + R/2, t) \rangle$ — функция корреляции возвышения водной поверхности ζ_s ; ρ — плотность воды; g — ускорение свободного падения. Интегрирование в (1) выполняется по площадке, размеры которой много больше радиуса корреляции волнения, но много меньше характерного масштаба ВВ. В приближении случайных фаз поверхностных волн ветровое волнение описывается уравнением для спектральной плотности волнового действия (кинетическим уравнением для функции распределения квазичастиц в пространстве координат и волновых векторов):

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{k}} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{k}} = S, \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)}{\partial \mathbf{k}}, \quad \dot{\mathbf{k}} = - \frac{\partial \omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)}{\partial \mathbf{r}}, \quad (3)$$

$$N(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = W(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) / \omega_0; \quad (4)$$

здесь $\omega_0 = \sqrt{g|\mathbf{k}|}$ — частота, соответствующая данной спектральной компоненте \mathbf{k} в точке \mathbf{r} в момент времени t в системе отсчета, движущейся со скоростью течения $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, создаваемого на поверхности ВВ; $\omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ — частота в лабораторной системе отсчета, определяемая дисперсионным соотношением [11]

$$\omega = \omega_0 + \mathbf{k} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t). \quad (5)$$

Соотношения (3) описывают изменение кинематических характеристик пакетов поверхностных волн в пространстве координат и волновых векторов (\mathbf{r}, \mathbf{k}) . Член S играет роль интеграла столк-

² Как следует из (1), W — это спектральная плотность энергии поверхностных волн, однако согласно принятой в теории ветрового волнения терминологии определяемый (1) спектр называют амплитудным спектром волнения, а W — спектральной плотностью ветровых (поверхностных) волн.

повений в кинетическом уравнении и отвечает действию ветра и вязкости на поверхностные волны и учитывает, их нелинейность. При $S = 0$ уравнение (2) — условие сохранения адиабатического инварианта. Наиболее распространена следующая простая аппроксимация S в интересующих нас дециметровой и метровой областях спектра [12, 14, 15]³:

$$S = \alpha N - \alpha N^2/N_0, \quad (6)$$

где $N_0(\mathbf{k})$ — спектральная плотность волнового действия в отсутствие ВВ; $\alpha(\mathbf{k}, U_w)$ — инкремент нарастания ветровых волн; U_w — скорость ветра.

Решение уравнения (2) отыскивается методом характеристик. Изменение спектральной плотности волнового действия поверхностных волн на траекториях движения волновых пакетов в пространстве (\mathbf{r}, \mathbf{k}) , определяемых уравнениями (3), описывается соотношением

$$dN/dt = S. \quad (7)$$

В принятой здесь постановке задачи предполагается распространение цуга интенсивных ВВ на фоне ветрового волнения, являющегося в отсутствие ВВ стационарным и однородным. Течение, обусловленное ВВ, считаем заданным. Это приближение оправдано в случае достаточно интенсивных ВВ [16, 17]. Скорость течения, создаваемого на поверхности цугом ВВ, представим в виде

$$U(x, t) = \tilde{U} \cos [q(x - C_i t) + \varphi] \mathbf{x}_0, \quad (8)$$

где $\tilde{U}(x - V_{gi}t)$ — огибающая цуга; V_{gi} и C_i — групповая и фазовая скорости; q — волновое число ВВ; φ — начальная фаза; цуг распространяется вдоль оси x .

2. Основные эффекты (одномерный случай)

Проведем вначале качественное рассмотрение характерных изменений в спектре ветровых волн, возникающих под действием цуга ВВ, на примере одномерной задачи, считая, что волновые векторы всех поверхностных волн и ВВ коллинеарны. Наиболее интересные эффекты возникают в случае попутного распространения поверхностных и внутренних волн, которому мы и уделим основное внимание. Для простоты пренебрежем действием ветра и других факторов на поверхностные волны и положим в (2) $S = 0$. При $S = 0$ из системы (2), (3) следует сохранение спектральной плотности волнового действия N на траекториях движения пакетов поверхностных волн в пространстве (\mathbf{r}, \mathbf{k}) , другими словами,

³ Выбор вида члена S в (2) представляет наибольшую трудность излагаемой теории; в частности, формула (6) содержит значительную степень произвола. Достаточно достоверной можно считать лишь часть, отвечающую экспоненциальному нарастанию волн, но и здесь имеются различные возможности при выборе выражения для α . Имеющийся произвол — следствие неудовлетворительного состояния теории ветрового волнения.

на лучах. Поэтому основой рассмотрения является анализ кинематики волновых пакетов. Уравнения (3), описывающие движение волновых пакетов, аналогичны уравнениям движения частиц в форме Гамильтона с гамильтонианом $\omega = \omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$. Эта аналогия уже обсуждалась применительно к случаю взаимодействия высокочастотных и низкочастотных волн в [1], где было показано, что наибольшее воздействие низкочастотная ВВ оказывает на пакеты высокочастотных поверхностных волн, находящихся с ней в групповом синхронизме. Рассмотрение проводится в системе отсчета движущейся с фазовой скоростью C_i ВВ, в которой частота поверхностных волн

$$\Omega = \omega_0 + \mathbf{kU}(\xi) - \mathbf{k}C_i, \quad (9)$$

где $\xi = q(x - C_i t)$, не зависит от времени. Если амплитуда ВВ не слишком велика, то в окрестности точки группового синхронизма k_* , определяемой условием $V_{gs}(k_*) = C_i$ (V_{gs} — групповая скорость поверхностных волн), дисперсионное соотношение (9) можно разложить в ряд по степеням $\tilde{k} = k - k_*$ [13]:

$$\Omega = \Omega^* + \Omega^* \frac{U(\xi)}{C_i} + \frac{\tilde{k}^2}{2m^*} + \dots; \quad (10)$$

здесь $\Omega^* = k_* C_i$; $m^* = (\partial^2 \omega_0 / \partial k^2)_{k=k_*}^{-1} = (-C_i / 2k_*)^{-1} < 0$. При этом аналогия движения волновых пакетов с движением частиц становится полной. На рис. 1, б показаны траектории движения волновых пакетов поверхностных волн в поле цуга ВВ (рис. 1, а). Для простоты считаем, что огибающая цуга ВВ представляет собой ступенчатую функцию: $\bar{U} = U_0 = \text{const}$ внутри цуга и $\bar{U} = 0$ вне цуга. Как видно из рис. 1, существуют захваченные и незахваченные волновые пакеты. Пакеты поверхностных волн с групповыми скоростями, близкими к C_i , достаточно долго находятся в одной фазе ВВ и могут быть остановлены даже относительно слабым течением (эффект блокировки). Именно у этих волн происходит максимальное изменение волновых чисел. Характерная величина такого изменения составляет

$$\Delta k = 2k_* \sqrt{2U_0/C_i},$$

а время движения по траекториям вблизи центра

$$T = \frac{2\pi}{qC_i} \sqrt{2} (U_0/C_i)^{-1/2}.$$

Рассмотрим теперь характер трансформации поверхностных волн цугом ВВ. Групповая скорость ВВ меньше их фазовой скорости $V_{gi} < C_i$. Поэтому поверхностные волны с групповыми скоростями, близкими к C_i , догоняют цуг ВВ. Попадая в поле течения, создаваемого ВВ, они захватываются в один из ее периодов и начинают двигаться по траекториям, показанным на рис. 1, б. Волновые пакеты с $k < k_*$, находящиеся в нижних точках замкнутых траекторий, начинают тормозиться на течении. Их движение по траекториям от начальных положений в момент входа в

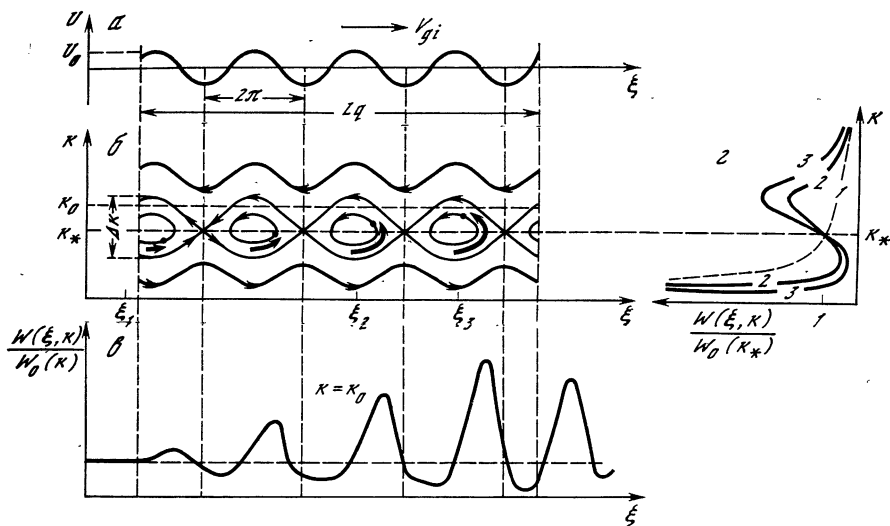


Рис. 1. Изменение интенсивности аномалий ветрового волнения вдоль дуга внутренних волн (ВВ) и возникновение предвестника аномалии

a — зависимость скорости течения, создаваемого на поверхности дугом ВВ, от координаты ξ ; *b* — траектории движения пакетов поверхностных волн в пространстве координат и волновых векторов (одномерный случай); *c* — зависимость спектральной плотности волнения W от ξ при фиксированном значении волнового числа $k = k_0$; *z* — зависимость W от волнового числа в различных областях дуга ВВ при $\xi = \xi_1$ (1), ξ_2 (2) и ξ_3 (3)

область дуга ВВ до момента времени t , которому отвечает рис. 1, показано схематически жирными стрелками. При этом происходит укорочение их длины волны (волновое число растет). Поэтому в коротковолновой области происходит возрастание спектральной плотности поверхностных волн W (см. рис. 1, *c*). Обратный процесс идет в области длинных волн. Максимальные изменения возникают в спектре через время, равное половине T . «Потенциальная яма», в которой захвачены пакеты поверхностных волн, продвигается вместе с рельефом ВВ относительно огибающей дуга, одновременно идет перестройка спектра волнения. Если время прохождения пакетами поверхностных волн дуга ВВ меньше $T/2$, то развитие поверхностных аномалий — сликов и сулоев происходит вплоть до выхода пакетов из области дуга. Именно такая ситуация проиллюстрирована на рис. 1. Когда волновые пакеты, захваченные в один из периодов ВВ, достигают передней границы дуга, они выходят из области действия течения, однако сохраняют свою группировку. Поэтому появляются изменения в спектре волнения перед дугом ВВ, т. е. возникает предвестник поверхностных аномалий. Изменения спектральной плотности волнения вне области дуга ВВ могут быть обусловлены и незахваченными волновыми пакетами, причем при $V_{gs} > V_{gi}$ такие изменения появляются перед дугом, а при $V_{gs} < V_{gi}$ — позади дуга.

Рассмотрим еще один эффект — появление характерных масштабов изменения спектральной плотности волнения, меньших масштаба ВВ. Поясним этот эффект на простом примере в одномерном случае. Рассмотрим волновые пакеты, далекие от группового синхронизма, движущиеся с групповой скоростью, меньшей фазовой скорости ВВ, но большей ее групповой скорости ($V_{gi} < < V_{gs} < C_i$). Такие волновые пакеты догоняют цуг ВВ, однако внутри цуга движутся медленнее рельефа ВВ. Для определенности проследим за пакетами поверхностных волн, групповая скорость которых в системе отсчета, связанной с огибающей цуга ВВ, ровно вдвое меньше ее фазовой скорости, т. е.

$$(C_i - V_{gi}) / (V_{gs} - V_{gi}) = 2.$$

На рис. 2 схематически изображены траектории таких волновых пакетов на плоскости (ξ, k) . Это траектории, расположенные существенно выше сепаратрисы. Определим характерный масштаб изменения спектральной плотности $W(\xi, k)$ при фиксированном значении волнового числа $k = k_1$. Спектральная плотность вол-

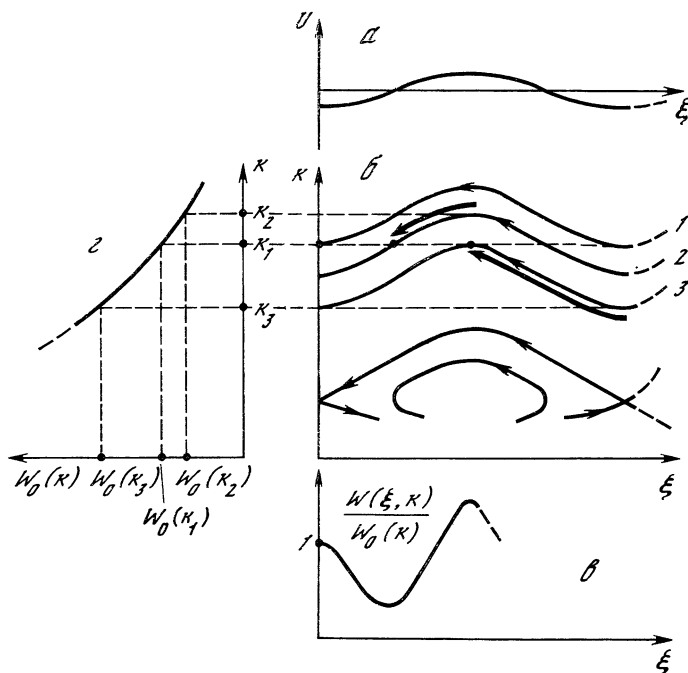


Рис. 2. Возникновение масштабов изменения спектральной плотности волнения, меньших периода волны

a — зависимость скорости течения, создаваемого на поверхности цугом ВВ вблизи его задней границы, от координаты ξ ; *b* — то же, что на рис. 1; *c* — то же, что на рис. 1, но при $k = k_1$; *e* — зависимость спектральной плотности волнения в отсутствие ВВ W_0 от волнового числа

нения в точках ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 определяется волновыми пакетами, прошедшими в эти точки по траекториям 1, 2 и 3 соответственно (волновой пакет в точке ξ_1 еще только попадает в область цуга ВВ). На рис. 2 жирными стрелками показан путь, пройденный данными волновыми пакетами в системе отсчета, движущейся с фазовой скоростью ВВ, к моменту времени, которому отвечает рисунок, от момента входа их в область цуга. Волновой пакет, находящийся в точке ξ_3 , в момент входа его в область цуга ВВ имел значение волнового числа k_3 и значительную спектральную плотность $W_0(k_3)$. Спектральная плотность, соответствующая волновому пакету, находящемуся в точке ξ_2 , в момент его захвата была мала: $W_0(k_2)$, так что спектральная плотность при ξ_3 существенно больше. Таким образом, получаем, что на половине периода внутренней волны имеется два максимума (хотя и не одинаковых по величине) и один минимум спектральной плотности поверхностных волн. Другими словами, характерный пространственный масштаб ее изменения оказывается вдвое меньшим периода ВВ.

На примере одномерной задачи без учета действия ветра мы провели качественное рассмотрение трех основных особенностей изменения спектров поверхностных волн под действием цуга ВВ: развитие этих изменений вдоль цуга, возникновение предвестника поверхностных аномалий и появление масштабов изменения спектральной плотности волнения, меньших периода ВВ. Учет действия ветра на поверхностные волны, как показывает строгий расчет, не приводит к изменению качественной картины явления, а лишь «затушевывает» указанные эффекты.

3. Количественный расчёт (двумерный случай)

Перейдем от качественного рассмотрения трансформации спектров ветровых волн под действием цуга ВВ в одномерном случае к их количественному описанию в двумерном случае. Уравнение (2) с учетом (3) и (6) может быть проинтегрировано на траекториях движения волновых пакетов [12]. Приведем результат такого интегрирования в простейшем случае цуга ВВ со ступенчатой огибающей в (8):

$$\tilde{U} = U_0 [H(x - V_{gi}t) - H(x - V_{gi}t + L)],$$

где H — функция Хевисайда; L — длина цуга ВВ. Спектральная плотность волнового действия ветрового волнения определяется выражением

$$Q(x, k_x, k_y, t) = Q_0(k_x, k_y) - \int_{t_0(x, k_x, k_y, t)}^t k_x(\tau) \frac{\partial Q_0}{\partial k_x}(k_x(\tau), k_y) \times \\ \times U_0 q \sin \{q [x(\tau) - C_i \tau] + \varphi\} \exp \left\{ - \int_{\tau}^t \alpha(k_x(\gamma), k_y, U_w) d\gamma \right\} d\tau; \quad (14)$$

здесь $Q = 1/N$; $Q_0 = 1/N_0$; интегрирование проводится вдоль траекторий волновых пакетов, определяющих спектральную плотность ветровых волн в момент времени t в точке x с волновым вектором $\mathbf{k} (k_x, k_y)$; t_0 — время входа этих волновых пакетов в область действия переменного течения, создаваемого ВВ. Цуг ВВ однороден по y , поэтому зависимость от y в (11) отсутствует, а для каждого из волновых пакетов $k_y = \text{const}$. Как следует из (11), если $\alpha = 0$, то спектральная плотность волнового действия $N(x, k_x, k_y, t)$ определяется всей «предысторией» волновых пакетов поверхностных волн. При $\alpha \neq 0$ происходит «забывание» пакетами своей «предыстории» на временах $T_w \sim 1/\alpha$. В предельном случае сильных ветров, когда величина α велика, возмущения спектральной плотности практически отсутствуют: при $\alpha \rightarrow \infty$ имеем $Q \rightarrow Q_0$.

Рассмотрим подробнее двумерную кинематику пакетов поверхностных волн. Как и прежде, перейдем в систему отсчета, движущуюся с фазовой скоростью ВВ. В двумерном случае дисперсионное уравнение поверхностных волн в этой системе отсчета имеет вид [18]

$$\Omega = -k_x C_i + k_x C_i \beta_0 \cos(\xi + \varphi) + \sqrt{g} (k_x^2 + k_y^2)^{1/4}, \quad (12)$$

где $\beta_0 = U_0/C_i$. Условие группового синхронизма в двумерном случае определяется соотношением

$$1/2 \sqrt{g/k_s} \cos \theta = C_i. \quad (13)$$

Здесь \mathbf{k}_s — волновой вектор поверхностной волны, проекция групповой скорости которой на направление распространения ВВ (ось x) равна C_i ; $\theta = \text{arctg}(k_{sy}/k_{sx})$ — угол между \mathbf{k}_s и осью x . На рис. 3 показана зависимость от угла θ величин k_s, k_{sx}, k_{sy} , нормированных на k_s ($\theta = 0$) = k_* , и $\omega_s/\sqrt{gk_*}$, где $\omega_s = \sqrt{gk_s}$. Величина k_{sy} имеет максимум k_{sy}^m при $\theta = \theta_m = \arcsin(1/\sqrt{3}) \sim 35^\circ$, где θ_m — кельвиновский фазовый угол. Каждому значению k_{sy} отвечают две волны с различными k_s, k_{sx}, ω_s , находящиеся в синхронизме с ВВ. Как и в одномерном случае, для не слишком интенсивных ВВ дисперсионное уравнение (12) можно разложить в ряд по степеням $\tilde{k}_x = k_x - k_{sx}$:

$$\Omega = \Omega^* + C_i k_{sx} \beta_0 \cos(\xi + \varphi) + C_i \tilde{k}_x \beta_0 \cos(\xi + \varphi) + \frac{\tilde{k}_x^2}{2m^*} + \chi \tilde{k}_x^3 + \dots, \quad (14)$$

$$\Omega^* = C_i k_{sx}, \quad m^* = \frac{4k_s^{3/2}}{\sqrt{g}} \frac{1}{2 - 3 \cos^2 \theta},$$

$$\chi = -\frac{\sqrt{gk_s}}{16k_s^3} \cos \theta (6 - 7 \cos^2 \theta).$$

Для волновых пакетов с $k_y \ll k_{sy}^m$ существенны первый, второй и четвертый члены разложения (14), а для пакетов с $k_y \sim k_{sy}^m$ — первый, второй, третий и пятый. В первом случае задача о движе-

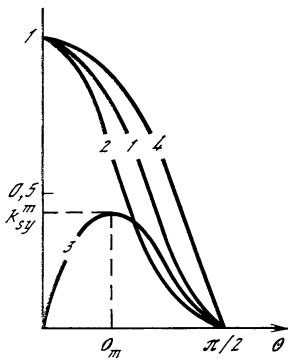


Рис. 3. Зависимости параметров поверхностной волны, находящейся в групповом синхронизме с ВВ, от угла θ

1 — k_g/k_* ; 2 — k_{sx}/k_* ; 3 — k_{sy}/k_* ; 4 — $\omega_g/\sqrt{gk_*}$

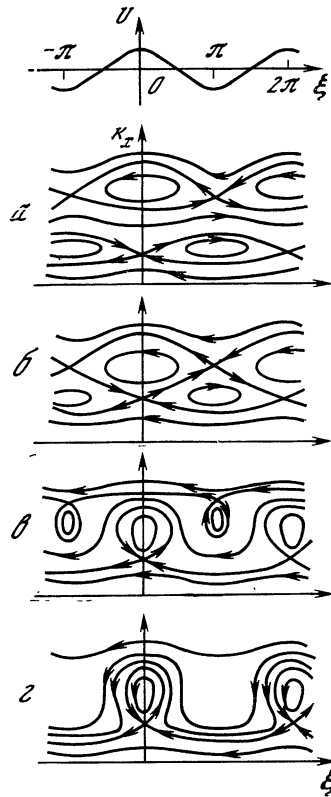


Рис. 4. Траектории движения волновых пакетов на плоскости (ξ, k_x) при различных значениях k_y

а — k_y значительно отличается от k_{sy}^m ;
б, в — k_y близко к k_{sy}^m ; г — $k_y = k_{sy}^m$

нии волнового пакета в пространстве (ξ, k_x) аналогична одномерной. Величина m^* зависит от угла θ , причем при $\theta = \theta_m$ она обращается в бесконечность и меняет знак при дальнейшем изменении угла. Так что во втором случае ($k_y \sim k_{sy}^m$) гамильтониан «частицы» — волнового пакета — имеет более сложный вид, чем (10). Траектории движения волновых пакетов в пространстве (ξ, k_x) при различных значениях k_y приведены на рис. 4. При $k_y \sim k_{sy}^m$ наиболее значительные изменения волнового числа оказываются связанными с незахваченными волновыми пакетами.

Аналитическое рассмотрение трансформации спектров ветровых волн цугами ВВ в рамках кинематической модели чрезвычайно сложно, поэтому расчеты выполнялись с помощью ЭВМ. Однако такое рассмотрение возможно для волновых пакетов, далеких от группового синхронизма, которые, как показывают расчеты, во многих случаях могут давать существенный вклад в изменение спектральной плотности волнения. В частности, вклад их велик, когда находящиеся в групповом синхронизме с ВВ более короткие поверхностные волны испытывают сильное влияние ветра. Для таких волновых пакетов интегралы в (11) могут быть вычислены, и в первом приближении по β_0 получено выражение

для спектральной плотности волнения. Приведем его для пакетов, догоняющих цуг ВВ (имеющих проекцию групповой скорости на ось x V_{gsx} , большую V_{gi}):

$$\begin{aligned}
 W(\xi, k_x, k_y, t) = & W_0(k_x, k_y) + \beta_0 \left(\frac{1}{2} \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2} W_0 - \frac{\partial W_0}{\partial k_x} \right) \times \\
 & \times \frac{k_x C_i}{(C_i - V_{gsx})(\tilde{\alpha}^2 + 1)} \{ \tilde{\alpha} \sin(\xi + \varphi) + \cos(\xi + \varphi) - \\
 & - \exp[-\alpha(k_x, k_y, U_w)(t - t_0)] [\tilde{\alpha} \sin(a\xi + \varphi + \\
 & + (a - 1)(C_i - V_{gi})qt) + \cos(a\xi + \varphi + (a - 1)(C_i - V_{gi})qt) \},
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha} &= \frac{\alpha(k_x, k_y, U_w)}{q(C_i - V_{gsx})}, & a &= \frac{C_i - V_{gi}}{V_{gsx} - V_{gi}}, \\
 t_0 &= \frac{\xi + (C_i - V_{gi})qt}{(V_{gi} - V_{gsx})q} + t.
 \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае t_0 — момент времени, в который волновой пакет, находящийся в момент времени t в точке ξ с волновым вектором \mathbf{k} (k_x, k_y), догоняет цуг ВВ и пересекает его заднюю границу. Соотношение (15) неприменимо при $a \sim 1$, так как это случай группового синхронизма, и при $V_{gsx} \sim V_{gi}$ ($a \rightarrow \infty$), когда волновые пакеты не догоняют цуг ВВ.

Выражение (15) достаточно громоздко, однако из него нетрудно получить некоторые важные физические следствия. В частности, если параметр $a < 1$, пространственный масштаб изменения спектральной плотности ветрового волнения совпадает с периодом ВВ. Если же $a > 1$, то появляются изменения с характерным периодом, в a раз меньшим периода ВВ, как это видно из второго слагаемого в фигурных скобках. Этот вывод согласуется с качественным рассмотрением, выполненным ранее. Так же из рассмотрения выражения (15) следует, что амплитуда спектральных аномалий меняется вдоль цуга ВВ.

Естественно, что все сказанное справедливо при не слишком сильном ветре. Как следует из (15), указанные эффекты имеют место на расстояниях от задней границы цуга ВВ, меньших величины $l = (V_{gsx} - V_{gi})\alpha^{-1}(k_x, k_y, U_w)$. Если длина цуга L меньше l , то они захватывают всю его область. Однако если цуг длинный или скорость ветра велика, то на расстояниях от границы цуга, больших l , нестационарные эффекты исчезают и устанавливается стационарное распределение спектральной плотности волнения⁴.

⁴ Стационарные распределения спектральной плотности ветрового волнения в поле ВВ подробно анализировались в [15].

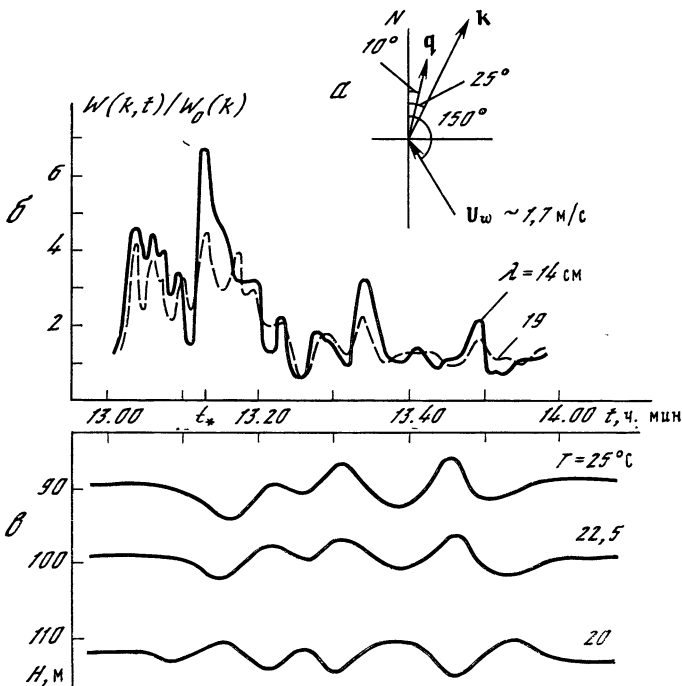


Рис. 5. Направления волновых векторов ВВ q , регистрируемых поверхностных волн k и скорости ветра U_w (а), а также синхронные записи относительных изменений спектральной плотности ВВ (б) и колебаний изотерм в поле ВВ (в)

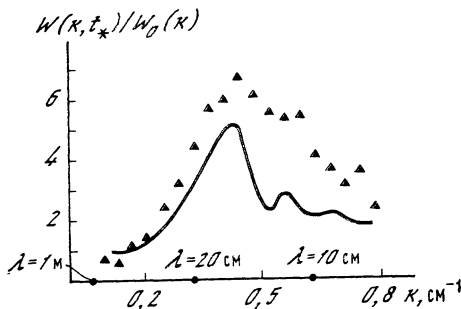


Рис. 6. Экспериментальная (значки) и теоретическая (сплошная линия) зависимости спектральной плотности ветровых волн от волнового числа в области максимального развития спектральных аномалий ($t = t_*$, см. рис. 5, б)

Если проекция групповой скорости пакетов поверхностных волн на ось x меньше V_{gi} , то цуг ВВ догоняет такие волновые пакеты. Развитие связанных с ними изменений в спектре волнения в области цуга ВВ происходит при этом в направлении от его передней границы к задней. В этом же направлении развиваются поверхностные аномалии при встречном распространении поверхностных и внутренних волн. В последнем случае параметр $|a|$ может превышать единицу только при $C_i > 2V_{gi}$, поэтому прост-

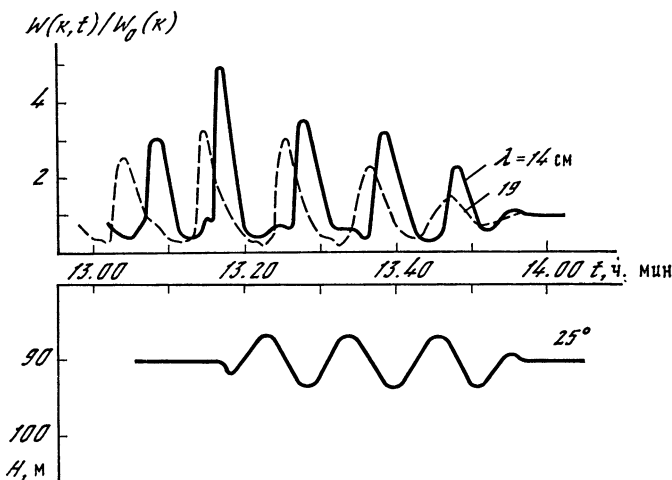


Рис. 7. Относительные изменения спектральной плотности ветровых волн в поле ВВ, рассчитанные для экспериментальной ситуации, приведенной на рис. 5

ранственный масштаб изменения спектральной плотности поверхностных волн W , как правило, совпадает с масштабом изменения скорости течения.

4. Сравнение результатов численного расчета с экспериментальными данными

Детальные расчеты трансформации спектров ветровых волн под действием цуга ВВ могут быть выполнены с использованием ЭВМ. Алгоритм расчета заключается в интегрировании уравнения (2) методом характеристик. Расчеты проводились применительно к экспериментальной ситуации, исследованной в ходе 3-го рейса НИС «Витязь» [19]. На рис. 5, б приведены синхронные записи колебаний изотерм во внутренней волне и относительного изменения спектральной плотности ветровых волн, распространяющихся под некоторым углом к направлению движения цуга ВВ. Направления распространения ВВ, скорости ветра и направления волновых векторов регистрируемых поверхностных волн показаны на рис. 5, а. Скорость ветра составляла 1,7 м/с, фазовая скорость ВВ — 30 см/с, групповая — 16 см/с. На рисунке хорошо видны особенности изменения спектральной плотности ветрового волнения, обсуждавшиеся выше. Максимальные изменения в спектре волнения возникают в дециметровой его части, что видно из рис. 6, где дана зависимость спектральной плотности волнения от волнового числа в области наибольшего развития поверхностных аномалий (в начале цуга).

На рис. 7 приведен результат теоретического расчета, выполненного для условий данного эксперимента. Течение на морской

поверхности, создаваемое ВВ, моделировалось цугом с синусоидальным заполнением,⁴ имеющим те же период и амплитуду, что и течение от реальной волны. Графики на рис. 5 и 7 хорошо согласуются между собой. Теоретическая кривая зависимости спектральной плотности волнения от волнового числа, приведенная на рис. 6, также находится в согласии с экспериментальной зависимостью. Конкретные отличия в поведении графиков на рис. 5 и 7 связаны с недостаточно точным заданием поля ВВ в теоретических расчетах.

Дальнейшее развитие кинематической модели требует прежде всего усовершенствования описания ветрового волнения — его спектрального состава, механизмов генерации волн, нелинейных и диссипативных эффектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басович А. Я., Таланов В. И. Адиабатическое взаимодействие волн // Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981, С. 147—166.
2. Ермаков С. А., Пелиновский Е. Н., Талипова Т. Г. Пленочный механизм воздействия внутренних волн на ветровую рябь // Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность. Горький: ИПФ АН СССР, 1982. С. 31—51.
3. Баренблатт Г. И., Бенилов А. Ю. Влияние внутренних волн на неоднородности гидрофизических характеристик поверхности океана // Там же. С. 52—74.
4. Longuet-Higgins M. S., Stewart R. W. Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents // J. Fluid Mech. 1960. Vol. 8, N 4. P. 565—585.
5. Longuet-Higgins M. S., Stewart R. W. The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents // Ibid. 1961. Vol. 10, N 4. P. 529—549.
6. Gargett A. E., Hughes B. A. On the interaction of surface and internal waves // Ibid. 1972. Vol. 52, N 1. P. 179—191.
7. Филлунс О. М. О взаимодействии внутренних и поверхностных волн // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1973. Т. 9, № 9. С. 954—961.
8. Smith R. The reflection of short gravity waves on a non-uniform current // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1975. Vol. 78, N 3. P. 517—525.
9. Thomson J. A., West B. J. Interaction of small-amplitude surface gravity waves with surface currents // J. Phys. Oceanogr. 1975. Vol. 5, N 4. P. 736—749.
10. Басович А. Я., Таланов В. И. О трансформации коротких поверхностных волн на неоднородных течениях // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1977. Т. 13, № 7. С. 766—773.
11. West B. J., Thomson J. A., Watson K. M. Statistical mechanics of ocean waves // J. Hydronaut. 1975. Vol. 9, N 1. P. 25—31.
12. Hughes B. A. The effect of internal waves on surface wind waves. 2. Theoretical analysis // J. Geophys. Res. 1978. Vol. 83, N C1. P. 455—465.
13. Басович А. Я. Трансформация спектра поверхностного волнения под действием внутренней волны // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15, № 6. С. 655—661.
14. Куфтарков Ю. М., Кудрявцев В. Н. Влияние внутренних гравитационных волн на спектр ветрового волнения // Морские гидрофизические исследования. Севастополь: МГИ УССР, 1980. № 1. С. 44—55.
15. Басович А. Я., Баханов В. В., Таланов В. И. Влияние интенсивных внутренних волн на ветровое волнение (кинематическая модель) // Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность. Горький: ИПФ АН СССР. 1982. С. 8—30.

16. *Петров В. В.* Взаимодействие внутренних волн и мелкомасштабной поверхностной турбулентности в океане // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1978. Т. 14, № 3. С. 342—347.
17. *Басович А. Я.* Адиабатическое взаимодействие поверхностных и внутренних волн // Там же. 1982. Т. 18, № 2. С. 220—223.
18. *Басович А. Я., Баханов В. В.* Кинематика поверхностных волн в поле внутренней волны // Там же. 1984. Т. 20, № 1. С. 71—77.
19. *Басович А. Я., Баханов В. В., Браво-Животовский Д. М.* и др. Воздействие коротких дугов интенсивных внутренних волн на ветровое волнение // ДАН СССР. 1985. Т. 283, № 1. С. 209—212.



УДК 534.2 : 532.517.4

ГЕНЕРАЦИЯ ЗВУКА ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

В. П. РЕУТОВ, Г. В. РЫБУШКИНА

Турбулентные течения жидкости и газа (струи, пограничные слои, слои смешения и др.) в силу нестационарности возникающего в них поля давления являются источниками акустического излучения — волн сжатия и разрежения, переносящих энергию далеко за пределы течения. С точки зрения нелинейной физики порождение звука турбулентностью является примером нелинейного преобразования возмущений одного типа (вихрей) в возмущения другого типа (акустические волны). При наличии среднего течения и твердых границ генерация звука происходит также в результате рассеяния вихревых возмущений на неоднородностях профиля скорости среднего течения и рассеяния пульсаций давления на неоднородностях границы. Специфика рассматриваемой задачи связана с существенно нелинейным характером гидродинамической турбулентности, исключающим эффективное использование разложений по амплитуде пульсаций. Кроме того, для большинства приложений наибольший интерес представляет определение акустического поля на больших расстояниях от течения, которое неоднородно само по себе и взаимодействует с неоднородными границами.

Значительный прогресс в исследовании процесса генерации звука турбулентностью и решении общей проблемы аэро- и гидродинамического звукообразования был достигнут благодаря известным работам Дж. Лайтхилла [1, 2]. Выдвинутые в них идеи позволили оптимальным образом учесть отмеченные выше специфические стороны задачи и стали основой для дальнейших исследований. Результаты многих из них отражены в обзорах и монографиях [3—11].

В данной работе обсуждается проблема генерации звука сдвигами турбулентными течениями при малых числах Маха. Основное внимание уделяется эффектам, связанным с наличием твердых границ. Приводятся как основополагающие, так и некоторые новые результаты в этой области.

1. Уравнение Лайтхилла. Генерация звука свободной турбулентностью

В работах Лайтхилла [1, 2] рассматривалась генерация звука небольшой турбулентной областью в неподвижной однородной среде, скорость звука в которой равна c . Для описания этого процесса в [1] было получено точное уравнение, следующее из закона сохранения импульса и уравнения непрерывности (см. также [5, 8]):

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \rho' = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (1)$$

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + \delta_{ij} (p' - c^2 \rho') - e_{ij},$$

где v_i , ρ — компоненты скорости и плотность среды; $p' = p - p_0$, $\rho' = \rho - \rho_0$ — отклонения давления p и плотности ρ от их постоянных значений p_0 и ρ_0 в покоящейся жидкости; e_{ij} — тензор вязких напряжений; по дважды встречающимся индексам производится суммирование.

Поскольку при замене T_{ij} нулем уравнение Лайтхилла (1) переходит в волновое уравнение для звуковых волн в линейной среде, член $\partial^2 T_{ij} / \partial x_i \partial x_j$ в его правой части может рассматриваться как источник звука. Ввиду незамкнутости уравнения (1) относительно ρ' отыскание источника, вообще говоря, связано с решением полной системы уравнений гидродинамики. Однако в практически важном случае турбулентных пульсаций с малыми числами Маха: $m = u/c \ll 1$ (u — характерная скорость пульсаций), когда вследствие малости возмущений плотности среды можно принять $\rho' = \rho'/c^2$, тензор напряжений Лайтхилла преобразуется к виду $T_{ij} \simeq \rho_0 v_i v_j$. При этом источник приближенно выражается через поле скорости в турбулентной области, которое может быть определено путем измерений и аналитических оценок в приближении несжимаемой среды. При использовании (1) для расчета звукового поля предполагается также, что размеры турбулентной области не слишком велики по сравнению с длиной волны звука. Это ограничение возникает из-за эффектов рефракции звука на среднем течении, его рассеяния турбулентностью и вихревого поглощения, описание которых в рамках точного уравнения (1) связано с необходимостью учета зависимости T_{ij} от искомого поля излучения.

Формальное обоснование изложенного подхода для акустически компактной завихренной области¹ можно дать на основе метода сращиваемых разложений по параметру $m \ll 1$ [12]. При этом первый отличный от нуля член разложения для ρ' удовлетворяет уравнению (1) с тензором $T_{ij} = \rho_0 v_i^{(0)} v_j^{(0)}$, где $\mathbf{v}^{(0)}$ — соленоидальная часть поля скорости, индуцированная завихренностью

¹ Размер l компактной области удовлетворяет условию $k_s l \ll 1$ (k_s — характерное волновое число звука).

течения $\Omega = \text{rot } v$. Таким образом, генерация звука при малых m обусловлена изменением завихренности течения (эволюцией вихрей).

Для практического использования уравнения Лайтхилла (1) важное значение имеет тот факт, что оно совпадает по форме с уравнением классической акустики, описывающим генерацию звука квадрупольным источником в линейной среде. Поскольку уравнение (1) является точным следствием уравнений гидродинамики, существует точная аналогия между пульсациями плотности в реальном потоке и пульсациями плотности, которые создаются воображаемым квадрупольным источником с напряженностью T_{ij} в линейной неподвижной среде, скорость звука в которой равна c [5]. Акустическая аналогия открывает возможность для привлечения к решению нелинейной задачи о генерации звука турбулентными течениями хорошо разработанного аппарата классической (линейной) акустики.

Грубую оценку интенсивности излучения от турбулентной области в свободном пространстве можно получить, представляя эту область в виде совокупности статистически независимых вихревых образований (вихрей), характеризующихся размером l , частотой вращения u и временем жизни l/u [1]. Средняя интенсивность излучения от всей области находится путем сложения интенсивностей излучения отдельных вихрей ². При $m \ll 1$ каждый вихрь излучает звук подобно компактному квадрупольному источнику с размером l , характерной частотой u/l и квадрупольным моментом $\sim \rho_0 u^2 l^3$. Используя зависимость акустического давления на больших расстояниях x от компактного квадрупольного источника в свободном пространстве, можно получить оценку для возмущений давления от одного вихря [4]:

$$p' = c^2 \rho' \sim m^2 \rho_0 u^2 (l/x). \quad (2)$$

Оценка полного потока акустической мощности из турбулентного объема V принимает вид

$$I_S \sim \frac{(p')^2}{c \rho_0} 4\pi x^2 \sim m^5 \rho_0 u^3 l^2 \frac{V}{l^3}. \quad (3)$$

Отношение $(\rho_0 u^2 l^3)/(l/u)$ характеризует скорость подвода энергии к вихрям. Поэтому множитель m^5 в (3) дает порядковое значение акустической эффективности течения, которая очень мала при малых числах Маха. Имея в виду аналогию с излучением компактного квадрупольного источника в свободном пространстве, можно говорить о квадрупольном характере излучения свободной турбулентности при $m \ll 1$ ³.

В спектральном описании за генерацию звука ответственны длинноволновые (волновое число $k \lesssim m l^{-1}$) компоненты напряже-

² В статистическом описании размер вихря l приобретает смысл пространственного корреляционного масштаба турбулентных пульсаций.

³ Число Маха пульсаций $m \ll 1$ является аналогом параметра некомпактности мультипольного источника $k_s l \ll 1$.

ний T_{ij} , находящиеся в пространственно-временном синхронизме с акустическими волнами [4]. Переходя в выражении $T_{ij} = \rho_0 v_i v_j$ к фурье-представлению T_{ij} и v_i по x и t , можно видеть, что эти компоненты возникают в результате парных слияний гармоник поля скорости вихря. При этом основной вклад дают слияния гармоник энергонесущей части спектра $\mathbf{v}(x, t)$ с близкими по величине и почти противоположными по направлению волновыми векторами \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' . В этой связи понятно, что именно нелинейный характер источника в уравнении (1) позволяет описывать с его помощью вынужденное порождение звука турбулентными пульсациями.

Для сдвиговых турбулентных течений характерны вихревые образования, которые за время существования переносятся на расстояния порядка нескольких своих размеров. Скорость конвекции U_c обычно составляет 0,6—0,8 U , где U — максимальная скорость среднего течения. В данном случае вихрь излучает звук подобно движущемуся квадрупольному источнику [5]. При малых числах Маха конвекции ($M_c = U_c/c \ll 1$) поле излучения слабо отличается от поля неподвижного вихря и остаются в силе оценки (2) и (3).

Для турбулентных течений со сдвигом скорости выполняется закон подобия между скоростью пульсаций и максимальной скоростью среднего течения: $u = \alpha U$. При этом коэффициент α мал по сравнению с единицей (например, для струй $\alpha \lesssim 0,2$). Подстановка в (3) $u = \alpha U$ дает закон $I_s \sim U^8$, который хорошо подтверждается экспериментами со струями [5, 9]. Поле скорости квазипараллельного сдвигового течения, направленного вдоль оси x_1 , приближенно представляется в виде $v_i = \bar{u} \delta_{1i} + v'_i$, где \bar{u} — скорость среднего течения, v'_i — пульсационная составляющая скорости. При этом в выражении для T_{ij} можно выделить слагаемое $\rho_0 v'_i v'_j$, определяющее «собственный» шум течения, и источник «сдвигового» шума $\rho_0 \bar{u} \delta_{1i} v'_j$. На первый взгляд условие $\alpha \ll 1$ должно означать преобладание сдвигового шума. Однако более детальный анализ говорит о сравнимости этих величин [5] (см. также разд. 2).

2. Генерация звука турбулентным пограничным слоем. Приближение бесконечной плоской поверхности

Профиль продольной скорости квазипараллельного среднего течения в турбулентном пограничном слое показан на рис. 1 (обтекаемая поверхность расположена в плоскости $x_3 = 0$). Приближение бесконечной плоской поверхности, используемое при анализе процесса генерации звука, разумеется, не относится к формированию самого турбулентного течения. В однородно движущейся части потока тензор T_{ij} имеет линейную составляющую, которая выражается через акустическое излучение турбулентной области. Однако в рассматриваемом случае малых чисел Маха среднего течения ($M = U/c \ll 1$) связанный с этой составляющей

эффект перераспределения интенсивности излучения по углам пренебрежимо мал.

При решении уравнения (1) относительно ρ' можно воспользоваться функцией Грина для свободного пространства. Этот путь приводит к формуле Керла [13], которая в случае жесткой границы принимает вид [5]

$$\rho'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V T_{ij} \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c} \right) \frac{d\mathbf{y}}{r} - \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S f_i \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c} \right) \frac{dS(\mathbf{y})}{r}, \quad (4)$$

где $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ — переменная интегрирования; $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ — расстояние между точками \mathbf{x} и \mathbf{y} ; V — ограниченная турбулентная область; \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности S ; $f_i = -n_i p' + n_j e_{ij}$ — компоненты силы на единицу площади, действующей на жидкость со стороны обтекаемой поверхности. В случае плоской поверхности ($x_3 = 0$) следует положить $n_1 = n_2 = 0$, $n_3 = -1$. При выводе (4) используется условие излучения на бесконечности, граничное условие $n_i v_i = 0$ на жесткой поверхности S и точное уравнение количества движения.

Выражение (4) отождествляет излучение турбулентных источников звука вблизи жесткой поверхности S с излучением системы акустических источников в линейной неподвижной среде без границ. Первый член в (4) соответствует объемным квадрупольям и совпадает с решением (1) для свободного пространства. При $M \ll \ll 1$ в этом интеграле можно пренебречь временем задержки звука на вихрях, что равносильно замене r в запаздывающем аргументе не зависящим от \mathbf{y} значением. Полагая затем $T_{ij} = \rho_0 u^2$, $\int d\mathbf{y} \sim l^3$, $\partial/\partial t \sim u/l$, получим для давления p' в дальнем поле ⁴ размерностную оценку (2). Параметры l и u в данном случае можно принять равными соответственно толщине вытеснения турбулентного пограничного слоя δ_* и его динамической скорости u_* . Второе слагаемое в (4) описывает поле поверхностного распределения акустических диполей с плотностью силы f_i . Размерностный анализ приводит к выводу о дипольном характере связанного с ним излучения: p' пропорционально m [13]. При этом в случае идеальной жидкости дипольное излучение определяется только нормальными диполями, возникающими благодаря силам поверхностного давления, что вступает в противоречие со свойствами симметрии гидродинамических уравнений. Действительно, рассмотрим мнимое течение, являющееся зеркальным отображением исходного относительно плоскости $x_3 = 0$: $v_{1,2}^{(i)}(\mathbf{x}, t) = v_{1,2}(\mathbf{x}', t)$, $v_3^{(i)}(\mathbf{x}, t) = -v_3(\mathbf{x}', t)$, $p^{(i)}(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}', t)$, где $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, -x_3)$. Исходное и мнимое течения символически изображены на рис. 2 сплошной и штриховой линиями. Поскольку введенное мнимое те-

⁴ Вследствие локальной близости дальнего акустического поля к плоской волне в (4) можно принять $\partial/\partial x_i = (-x_i/c) \partial/\partial t$.

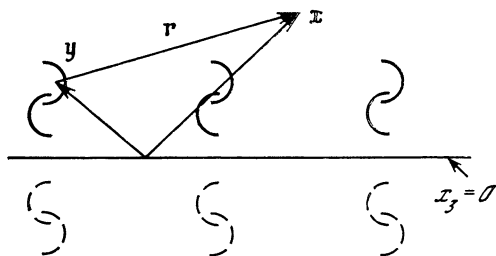
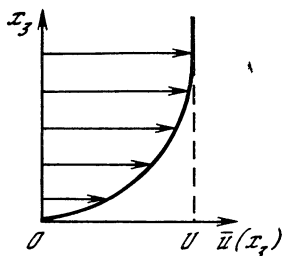


Рис. 1. Профиль средней скорости в пограничном слое

Рис. 2. Действительное и мнимое течение вблизи плоской поверхности x_3

чение тоже удовлетворяет уравнениям гидродинамики, можно ввести гипотетическое течение в свободном пространстве, которое при $x_3 > 0$ совпадает с исходным, а при $x_3 < 0$ — с мнимым. Бесконечно тонкий жидкий слой между исходным и мнимым течениями сохраняется в равновесии ввиду равенства действующих на него нормальных сил, и, следовательно, граничные условия для каждого из течений не нарушаются. Акустическое излучение построенного гипотетического течения в свободном пространстве имеет квадрупольный характер и складывается из излучения квадруполей T_{ij} и их зеркального отображения $T_{ij}^{(0)}$. Этот результат об отражении плоской границей квадрупольного излучения объемной турбулентности был впервые получен А. Пауэллом [14]. Оценки интенсивности и спектра мощности квадрупольного излучения турбулентного пограничного слоя, основанные на различных моделях турбулентности, даны в работах [15, 16].

В случае вязкой жидкости для поддержания переходного слоя между исходным и мнимым течениями в равновесии следует ввести плоское распределение внешней силы, которая равна по величине удвоенной касательной силе трения, действующей на элементы поверхности со стороны жидкости, и противоположна ей по направлению. Эта сила дает возмущения плотности

$$\rho'_d(x, t) = \frac{1}{2\pi c^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int e_{iz} \left(y, t - \frac{r}{c} \right) \frac{dS(y)}{r}, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Таким образом, в случае вязкой жидкости имеется излучение, равное удвоенному излучению касательных к поверхности диполей, фигурирующих в формуле Керла [16].

Почему размерностный анализ излучения нормальных диполей в (4) дает ошибочный результат? Для ответа на этот вопрос следует учесть, что поверхностное давление, которое при размерностном анализе описывается в приближении несжимаемой среды, можно выразить через поле скорости в объеме. Излучение одного вихря пропорционально скорости изменения полной нормальной силы создаваемого им компактного дипольного источника $F_3 =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{p}'(y_1, y_2, 0, t) dy_1 dy_2$$
. Интегрируя по x_1 и x_2 уравнение $\nabla^2 p = -\rho_0 \partial^2 v_i v_j / \partial x_i \partial x_j$ и учитывая граничное условие для v_3 , нетрудно убедиться, что $F_3(t) \equiv 0$, т. е. дипольное излучение отсутствует. При размерностном анализе F_3 заменяется отличной от нуля величиной $\rho_0 u^2 l^2$, что и приводит к ошибочной оценке поля излучения. При статистическом описании дипольное излучение однородной по x_1, x_2 турбулентности обращается в нуль вследствие равенства нулю интеграла от корреляционной функции поверхностного давления по пространственным разделениям [17, 11]. Можно показать, что при отыскании излучения нормальных диполей нельзя ограничиться вычислением следующего члена в разложении интеграла по времени запаздывания звука на вихре и необходимо еще учесть вклад звуковых волн. Именно благодаря своей некомпактности (при компактных размерах вихря) распределение нормальных диполей может давать вклад в излучение, равный вкладу касательных диполей (ср. (4) и (5)). Применение к (4) формализма мнимых источников позволяет перейти к акустической аналогии, в которой источники звука приближенно выражаются через параметры турбулентных пульсаций.

Излучение касательных диполей тоже можно выразить через поле скорости в объеме. В приближении несжимаемой жидкости касательные к поверхности напряжения трения принимают вид $e_{j3} = \rho_0 \nu \partial v_j / \partial x_3$, где ν — коэффициент кинематической вязкости. Акустическое излучение на частоте ω выражается через длинноволновые компоненты спектра касательных напряжений $\hat{e}_{j3}(\omega, \mathbf{k})$ ⁵. Учитывая, что в дальнем поле $x \gg y$, можно привести (5) к виду

$$\dot{p}'(\omega; \mathbf{x}) = -\frac{i\omega}{2\pi c x} \sum_{j=1,2} \frac{x_j}{x} \hat{e}_{j3}(\omega, k_{10}, k_{20}) e^{i\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x}}, \quad (6)$$

где $k_{1,2,0} = k_0(x_{1,2}/x)$; $k_0 = \omega/c$ — волновое число плоской звуковой волны. Замена \hat{e}_{j3} в формуле (6) значением при $\mathbf{k} = 0$ равносильна пренебрежению временем задержки звука на вихре. В этом случае излучение определяется полной силой создаваемого вихрем компактного дипольного источника, которая в частотном представлении равна $-e_{j3}(\omega, 0)$. Применение к уравнениям движения несжимаемой жидкости преобразования Фурье по x_1, x_2 и t позволяет связать фурье-представление для возмущений давления $\dot{p}'(\omega, \mathbf{k}; x_3)$ и скорости $\mathbf{v}'(\omega, \mathbf{k}; x_3)$ с фурье-образами нелинейных по v_j членов. Эти выражения фактически определяют длинноволновую область спектра пульсаций через энергонесущие компоненты ско-

⁵ Здесь и далее для обозначения спектрального представления переменных по x_1, x_2 и t используется символ $\hat{}$:

$$\hat{e}_{j3}(\omega, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 e_{j3} \exp(i\omega t - ik_1 x_1 - ik_2 x_2) \text{ и т. п.}$$

рости (аналогично см. разд. 1). Для отыскания $\hat{v}'_{1,2}(\omega, \mathbf{0}; x_3)$ в случае вязкой жидкости надо решить уравнение второго порядка по x_3 . Решая его с условиями $\hat{v}'_{1,2} = 0|_{x_3=0}$ и $\hat{v}'_{1,2} \rightarrow 0$ при $x_3 \rightarrow \infty$, получим

$$\hat{\varepsilon}_{j3}(\omega, \mathbf{0}) = (1 - i) \gamma \int_0^{\infty} \hat{T}'_{j3}(\omega, \mathbf{0}; y_3) e^{(i-1)\gamma y_3} dy_3, \quad j = 1, 2, \quad (7)$$

где $T'_{j3} = \rho_0 v'_j v'_3$, $\gamma = \sqrt{\omega/2\nu}$. Связь поля излучения касательных диполей с объемной турбулентностью пограничного слоя впервые рассматривалась в работе [16]. Ее спектральная форма (7) дана в [18].

Процесс формирования длинноволновых касательных напряжений трения можно наглядно интерпретировать в рамках концепции вязких волн, выдвинутой в [19] и развитой позднее в [20—22, 18]. Касательные к поверхности длинноволновые компоненты турбулентных напряжений Рейнольдса T'_{j3} порождают вязкие волны с касательной к поверхности скоростью смещения жидких частиц (величина γ в (7) есть декремент затухания вязких волн). Поверхностные напряжения трения возникают при отражении вязких волн от поверхности. Отметим, что возбуждаемые извне вязкие волны могут сильно рассеиваться турбулентностью. Однако при описании поля вязких волн, возникающего в заданной турбулентности, эффект рассеяния уже учтен в распределениях T'_{j3} .

Используя (7), можно оценить интенсивность излучаемого звука для конкретных моделей турбулентности. Наличие в интеграле (7) экспоненциального множителя говорит о преобладании вклада в излучение от пристеночной зоны пограничного слоя. В настоящее время отсутствует единое мнение относительно величины излучения касательных диполей [23]. Целенаправленное экспериментальное исследование этого излучения проводилось в работах [20, 21]. Согласно [16], присутствие в пристеночной зоне когерентных структур и связанных с ними «вспышек» турбулентных пульсаций дает превышение интенсивности излучения вязких диполей над интенсивностью квадрупольного излучения приблизительно в $1/m^2$ раз.

На основе изложенного выше спектрального подхода можно решить также вопрос о сдвиговом шуме турбулентного пограничного слоя. Квадрупольный момент, определяющий сдвиговой шум вихря,

в частотном представлении имеет вид $\hat{T}_{1j}^{(S)}(\omega) = \rho_0 \int_0^{\infty} \bar{u}(y_3) \hat{v}'_j(\omega, \mathbf{0}; y_3) dy_3$. Пренебрегая вязкостью и решая уравнения для $\hat{v}'_j(\omega, \mathbf{0}; y_3)$, получим $\hat{T}_{1j}^{(S)}(\omega) = (i/\omega) \int_0^{\infty} (d\bar{u}/dy_3) \hat{T}'_{j3}(\omega, \mathbf{0}; y_3) dy_3$ при $j = 1, 2$ и $T_{ij}^{(S)}(\omega) = 0$ при $j = 3$. Этот результат следует также из соотношений работы [24], в которой акустическое поле пограничного слоя исследовалось в рамках метода сращиваемых асимптотических раз-

ложений. Размерностный анализ полученного выражения показывает, что собственный и сдвиговый шум пограничного слоя — величины одного порядка.

3. Акустически компактные тела и плоские поверхности с компактными выступами

Когда размеры тела компактны по отношению к генерируемому звуку, временем запаздывания звука на размерах тела можно пренебречь и основным источником звука в (4) становятся нормальные к поверхности тела диполи. На больших по сравнению с размером тела расстояниях от него акустическое поле совпадает с полем точечного диполя, сила которого равна по величине и противоположна по направлению равнодействующей сил давления $F_i^{(p)} = \int_S p' n_i dS$ (равнодействующая сила трения, как правило, значительно меньше $F_i^{(p)}$). Сила $F_i^{(p)}$, вообще говоря, отлична от нуля в несжимаемой среде и может быть измерена экспериментально. В частности, при нестационарном срыве вихрей с цилиндра пульсационная составляющая $F_i^{(p)}$ совпадает с поперечной к потоку подъемной силой и приводит к генерации эолова тона [25].

На основе формулы Керла и формализма мнимых источников можно найти также акустическое излучение при турбулентном обтекании плоской поверхности с компактными выступами [26—28]. Введем мнимое течение, являющееся зеркальным отображением исходного относительно плоскости $x_3 = 0$ (рис. 3). Если пренебречь поверхностными силами трения, задача сводится к определению акустического излучения при обтекании компактного тела гипотетическим симметричным потоком. Симметрия течения такова, что излучение нормальных к плоскости $x_3 = 0$ элементарных сил F_n , действующих со стороны выступа на жидкость, взаимно компенсируется, тогда как излучение касательных сил F_τ удваивается. Полная сила касательна к плоскости $x_3 = 0$ — возникает касательный акустический диполь. Запишем отклонение поверхности от плоскости $x_3 = 0$ в виде $x_3 = \zeta(x_1, x_2)$. Тогда плотность касательной силы со стороны выступа в расчете на единицу площади плоской поверхности принимает вид

$$f_{1,2} = -2p_T \partial \zeta / \partial x_{1,2}, \quad (8)$$

где $p_T(x_1, x_2)$ — псевдозвуковое давление на поверхности выступа. Учет поверхностных сил трения сводится к добавлению в (8) вклада касательной к плоскости $x_3 = 0$ составляющей этих сил, которые обычно малы по сравнению с силами давления. Согласно (8) генерация звука при обтекании выступа происходит в результате рассеяния пульсаций псевдозвукового давления на неоднородности градиента уровня поверхности, суть которого сводится к «комбинационному сложению» гармоник спектра давления с гармониками неоднородности. В этом смысле источники (8) вполне аналогичны

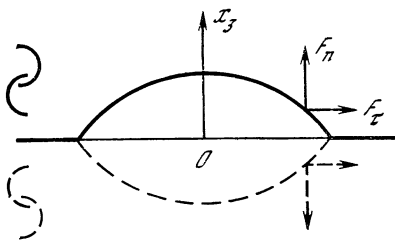


Рис. 3. Построение мнимого течения при обтекании плоской поверхности с выступом

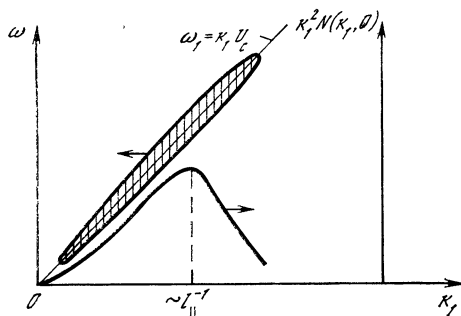


Рис. 4. Диаграмма для определения зависимости частотного спектра дипольного излучения пограничного слоя на поверхности с выступом от размера выступа вдоль течения

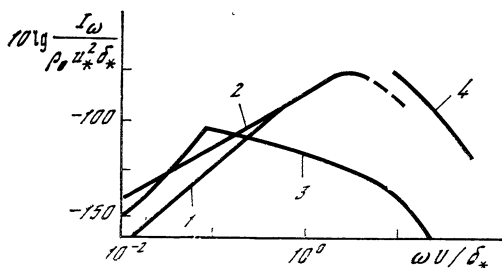
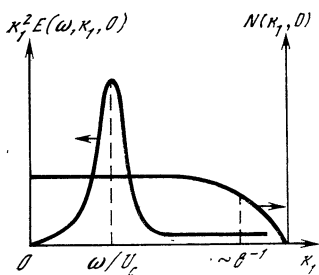


Рис. 5. Расположение пика в спектре мощности градиента поверхностного давления на низких частотах

Рис. 6. Спектр акустического излучения пограничного слоя на шероховатой поверхности

1 — вклад крупномасштабных вихрей; 2 — расчет на основе полной аналитической аппроксимации взаимного спектра поверхностного давления; 3 — спектр квадрупольного излучения; 4 — пересчет акустической компоненты поверхностного давления с учетом рефракции звука на среднем течении

нелинейным источникам. Подчеркнем, что в отличие от случая свободной турбулентности поле излучения, возникающее при рассеянии псевдозвука, определяется нестационарностью течения в неподвижной системе отсчета и существует даже при конвекции полностью замороженного поля давления. Поэтому рассеяние на неоднородностях границы приводит к более высокочастотному излучению, чем свободная турбулентность.

Давление p_T на поверхности плавного выступа, находящегося под турбулентным пограничным слоем и имеющего высоту, малую по сравнению с толщиной вытеснения δ_* , незначительно отличается от давления на гладкой поверхности. Интенсивность излучения в случае симметричного относительно направления течения x_1 высту-

па представляется в виде суммы интенсивностей излучения двух касательных диполей ориентированных осями вдоль и поперек течения. Частотный спектр полного потока акустической мощности от продольного диполя можно представить в виде

$$I_{\omega} = \frac{2\pi}{3} \frac{\omega^2}{\rho_0 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} k_1^2 E(\omega, \mathbf{k}) N(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (9)$$

где $E(\omega, k_1, k_2)$ — частотно-волновой спектр мощности поверхностного давления; $N(k_1, k_2)$ — пространственный спектр «коррелятора»

$R(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(y + \xi) \zeta(y) dy$. Спектр мощности E обычно находится как фурье-образ непосредственно измеряемого взаимного спектра поверхностного давления $\Gamma(\omega, \xi)$ [11]. Расчет интеграла (9) иллюстрируется диаграммой на рис. 4, на которой заштрихована энергонесущая область спектра производной p_T по времени $\omega^2 E(\omega, \mathbf{k})$. Она объясняет расположение максимума излучения на частоте $\omega \sim U_c/l_{\parallel}$ (l_{\parallel} — длина выступа по потоку), определяемой конвекцией пространственных гармоник с волновым числом $k_1 \sim l_{\parallel}^{-1}$. Наибольшая интенсивность в максимуме спектра достигается при длине выступа $l_{\parallel} \sim \delta_*$ [26].

Дипольные источники (8) возникают также при турбулентном обтекании шероховатой поверхности с акустически компактными элементами [27]. В случае изотропной шероховатости в предположении статистической независимости p_T и ζ для полного потока мощности с единицы площади поверхности $x_3 = 0$ вновь получается выражение (9), где $N(\mathbf{k})$ теперь следует считать спектром мощности отклонений уровня поверхности от его среднего значения. При статистически независимом расположении выступов и одинаковом распределении их по размерам корреляционная функция уровня поверхности спадает на расстояниях порядка среднего размера элементов b [27]. Это обстоятельство является серьезным препятствием для практического использования формулы (9), так как измерения взаимного спектра $\Gamma(\omega, \xi)$ должны проводиться на столь же малых пространственных разделениях ($|\xi| \leq b$). Предложенные в работе [29] аналитические аппроксимации взаимных спектров поверхностного давления в пограничном слое на шероховатой поверхности отражают наличие конвективного переноса крупномасштабных вихревых образований, на которые элементы шероховатости оказывают осредненное воздействие. Они позволяют правильно восстановить пик в спектре мощности продольного градиента поверхностного давления $k_1^2 E(\omega, \mathbf{k})$ при фиксированной частоте $\omega \ll U_c/b$ (рис. 5). Вклад этого пика в интеграл (9) дает компоненту излучения, связанную с переносом крупных вихрей как целого, и может рассматриваться как нижняя граница для излучаемой мощности на низких частотах. Результаты расчета этой составляющей излучения для пограничного слоя на шероховатой поверхности с

плотной упаковкой элементов при $M = 0,12$, $b/\delta_* = 0,1$, $Re_{\parallel} = x_{\parallel} U/v = 10^7$ (x_{\parallel} — расстояние до передней кромки пластины) представлены кривой 1 на рис. 6. Кривая 2 на рис. 6 соответствует расчету на основе полной аппроксимации [29] для $\Gamma(\omega, \xi)$, который связан с рядом дополнительных предположений [27]. Положение максимума в спектре I_{ω} соответствует оптимальному рассеянию на среднем выступе: $\omega/U_c \sim b^{-1}$. Ход кривой 2 справа от ее максимума, показанный на рис. 6 штриховой линией, связан с рассеянием мелких (с масштабом меньше b) пульсаций давления, формирование которых определяется отрывным обтеканием отдельных выступов. В этой области частот использование крупномасштабных аппроксимаций $\Gamma(\omega, \xi)$ не имеет достаточных оснований. Кривая 3 на рис. 6 представляет собой спектр квадрупольного излучения пограничного слоя на гладкой поверхности, взятый для сравнения из работы [15].

4. Общая теория для ограниченных и искривленных поверхностей

Решение задачи о генерации звука при турбулентном обтекании произвольной жесткой поверхности дано Д. Фоксом-Вильямсом и Л. Холлом [30]. Вместо функции Грина для свободного пространства, используемой при выводе формулы Керла (4), ими была взята функция Грина для аналогичной краевой задачи классической акустики. При частотной постановке краевой задачи эта функция Грина удовлетворяет соотношениям

$$(\nabla^2 + k_0^2) G_{\omega} = -\delta(x - y), \quad \left. \frac{\partial G_{\omega}}{\partial n} \right|_S = 0 \quad (10)$$

и условию излучения при $x \rightarrow \infty$. Если пренебречь влиянием на излучение звука поверхностных сил трения, выражение для возмущений плотности принимает вид ⁶

$$\hat{\rho}'(\omega; x) = \frac{1}{c^2} \int_V \frac{\partial^2 \mathcal{J}_{\omega}}{\partial y_i \partial y_j} \hat{T}_{ij}(\omega; y) dV \quad (11)$$

Функцию G_{ω} можно интерпретировать как давление от точечного гармонического источника с единичной амплитудой напряженности расхода. Малое смещение такого источника учитывается при определении его поля дифференцированием G_{ω} по y . В этой связи ясно, что интеграл (11) представляет собой суперпозицию полей квадрупольных источников с интенсивностью T_{ij} . Таким образом, полю излучения турбулентного течения при наличии жесткой границы ставится в соответствие поле распределения акустических квадруполов в линейной среде с такой же границей.

⁶ При выводе (11) используется функция Грина для источника в точке x , однако из теоремы взаимности следует, что она совпадает с функцией G_{ω} , определенной выражением (10).

Формула (11) лежит в основе дифракционной теории аэро- и гидродинамических шумов [4, 31], которая учитывает как рассеяние распространяющихся звуковых волн, так и эффект их образования при рассеянии интенсивных пульсаций давления в ближнем поле квадрупольного источника. Решая дифракционную задачу для точечного источника, можно получить размерностные оценки для акустического поля течения. Отметим, что даже в случае компактных вихрей акустическое поле не всегда можно отождествить с полем компактного акустического источника в свободном пространстве. Например, для потока мощности краевого шума от полубесконечной пластины в [30] получен закон $I_s \sim U^5$, который не следует из размерностного анализа полей компактных источников звука (см. разд. 4). При наличии среднего течения предпочтительнее следует отдать вкладу в излучение квадрупольей типа $\rho_0 \bar{v} v_i$, поле которых в данном случае определяется основным масштабом v_i . Дифракционная теория естественным путем приводит к результату об отражении квадрупольного излучения объемной турбулентности плоской границей [5] и к выводу о дипольном характере излучения при нестационарном обтекании компактных тел [31]. В работе [32] на ее основе рассматривалось акустическое поле турбулентного пограничного слоя на шероховатой поверхности с элементами шероховатости в виде полусфер.

5. Рефракция вихревого звука в турбулентном пограничном слое

До сих пор предполагалось, что при определении поля излучения можно пренебречь рефракцией звука на среднем течении, его рассеянием на турбулентности и затуханием из-за вихревой вязкости. Остановимся на эффекте рефракции генерируемого звука в турбулентном пограничном слое, пространственная протяженность которого достаточно велика по сравнению с длиной волны звука: $k_0 L_{1,2} \gg 1$, где L_1 и L_2 — размеры турбулентной области вдоль и поперек течения.

При малых M влияние рефракции сказывается лишь на больших расстояниях от источника. Поэтому для расчета поля излучения достаточно поместить определенные выше источники звука (объемные квадрупольи, вязкие диполи или касательные диполи, возникающие на шероховатой поверхности) в идеальное течение, профиль скорости которого совпадает с профилем скорости среднего течения в пограничном слое [33]. Как известно, при падении плоской волны на сдвиговое течение возможен эффект закритического отражения звука, когда энергия падающей волны полностью переходит в отраженную [5]. Благодаря этому эффекту в пограничном слое возникает волноводное распространение звука вниз по потоку. Если длина волны звука не слишком мала по сравнению с толщиной пограничного слоя, возбуждается лишь главная мода рефракционного волновода. Переход к режиму волноводного распространения звука от точечного источника характеризуется длиной

рефракции [33] $L_R = \left[2M^2 \frac{\omega}{c} \left(\frac{\omega \delta_*}{c} \right)^2 \right]^{-1}$. Если расстояние до источника по потоку $x_1 \ll L_R$, влияние рефракции на его поле излучения пренебрежимо мало. При $x_1 \gg L_R$ структура поля вниз по потоку близка к собственной волне рефракционного волновода. Условие сильной рефракции для поля излучения непосредственно в пределах большой турбулентной области принимает вид $L_1 \gg L_R$.

Распространение звука вдоль обтекаемой поверхности приводит к появлению особенности в частотно-волновом спектре поверхностного давления при k , близких к $k_0 = \omega/c$ [24]. Когда $k_0 L_{1,2} \gg 1$, поле излучения турбулентности определяется малой областью волновых чисел вблизи этой особенности. Образование особенности в спектре поверхностного давления при аппроксимации профиля средней скорости в пограничном слое кусочно-постоянной функцией исследовалось в работе [34]. Основными источниками звука в [34] считались объемные квадрупольные. В экспериментах [29, 35] была обнаружена сильная рефракция высокочастотного излучения, возникающего в турбулентном пограничном слое на шероховатой поверхности при отрывном обтекании малых выступов. В этой связи в [33] был рассмотрен вопрос о влиянии рефракции на поле излучения касательных диполей, обусловленных шероховатостью. Предложенный в [33] метод расчета позволяет найти акустическое давление при произвольном гладком профиле средней скорости. Заметим, что при $k_0 L_{1,2} \gg 1$ акустическое давление в пределах турбулентной области можно отождествить с длинноволновой составляющей поверхностного давления, которая выделяется путем пространственной фильтрации поверхностного давления в полосе волновых чисел k , содержащей акустическую особенность его спектра. Эта составляющая почти полностью определяется полем излучения удаленных от точки наблюдения источников. Проведенный в [33] анализ показал, что при переходе к режиму сильной рефракции (когда L_1 становится большим по сравнению с L_R) в частотном спектре акустического давления подчеркиваются высокие частоты и значительно возрастает эффективность накопления акустического излучения с увеличением размеров турбулентной области $L_{1,2}$.

Используя данные прямых акустических измерений [35] и результаты описанного выше расчета акустического давления с учетом рефракции звука на среднем течении, можно восстановить силу дипольных источников на высоких частотах и построить спектр мощности их излучения в дальнем поле. Результаты такого расчета представлены кривой 4 на рис. 6. Добавим, что исследование эффекта рефракции при больших M возможно на основе точных уравнений Филлипса, Лилли и Хоу, в которых среднее течение со сдвигом скорости или потенциальное среднее течение учитываются как факторы распространения звука [6]. Эти уравнения указывают на изменение при больших M самих источников звука.

Заключение

Круг задач, которые могут быть решены на основе обобщения теории Лайтхилла, изложенной в разд. 1, далеко выходит за рамки исследования генерации звука при турбулентном обтекании твердых границ. Обратим внимание на такие вопросы, как генерация звука при малых колебаниях неоднородной податливой поверхности [4, 28], генерация звука при движении жесткой поверхности как целого [5], излучение звука турбулентностью в стратифицированных средах [36]. Значительный интерес представляет также анализ генерации звука простыми течениями, которые находятся аналитически в приближении несжимаемой среды. Такими являются, например, течения в виде системы точечных вихрей, движущихся в свободном пространстве или вблизи твердых границ [4, 37], и ламинарные течения, промодулированные слабыми собственными волнами [5, 18].

Идея акустической аналогии для течений с малыми M была развита Рибнером и Пауэллом [6]. В теории Рибнера поле излучения связывается с псевдозвуковым давлением $p^{(0)}$, возникающим в пределе несжимаемого течения. Флуктуации плотности, порождаемые $p^{(0)}$ в сжимаемой среде, играют роль стороннего массового источника в уравнении Рибнера. В теории Пауэлла рассматривается порождение звука «вихревыми диполями», объемная плотность силы которых в отсутствие градиента энтропии равна $\rho_0 [v\Omega]$. Вихревые диполи Пауэлла имеют, однако, скрытую квадрупольную структуру, которая может быть выделена явно путем вычисления следующего члена в разложении источника по времени запаздывания звука на вихрях [6, 7]. Теория Пауэлла тесно связана с дипольным представлением решения уравнения Лайтхилла [7]. Полный дипольный момент вихря в этом представлении, естественно, равен нулю. Поэтому выделение из него дипольных источников, определяемых средним течением, может привести к ошибочному выводу о дипольном характере сдвигового шума. Сравнительно недавно М. Мерингом было получено выражение для акустического излучения через скорость изменения завихренности [39]. Данный в [39] подход обобщается на случай вихревых течений вблизи границ [23].

Уже при использовании грубого описания турбулентности акустические аналогии позволяют получить важные законы подобия для поля излучения. Статистическая теория турбулентности отвечает в основном на вопросы, связанные с генерацией звука изотропной турбулентностью [10, 36]. Применение статистических методов в случае однородной изотропной турбулентности позволяет последовательно учесть эффект рассеяния генерируемого звука на турбулентных пульсациях и его вихревое поглощение [38]. Для описания сдвиговой турбулентности были предложены эвристические модели, отражающие некоторые экспериментально найденные закономерности [15, 40]. За последнее десятилетие был достигнут значительный прогресс в понимании природы сдвиговой турбулентности, который выразился прежде всего в открытии и все-

стороннем изучении когерентных (организованных) структур, играющих ключевую роль в формировании всего турбулентного течения [41, 42]. Уже имеются работы, посвященные анализу роли когерентных структур в процессе генерации звука сдвиговой турбулентностью [43—45]. Достижения в этой области, несомненно, будут способствовать решению проблемы определения интенсивности и спектрального состава акустического излучения турбулентных сдвиговых течений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically. I. General theory // Proc. Roy. Soc. London A. 1952. Vol. 214, N 1107. P. 564—587.
2. *Lighthill M. J.* On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound // Ibid. 1954. Vol. 222, N 1148. P. 1—32.
3. *Flouws Williams J. E.* The acoustic analogy thirty years on // IMA J. Appl. Math. 1984. Vol. 32, N 1/3. P. 113—124.
4. *Crighton D. G.* Basic principles of aerodynamic noise generation // Progr. Aerospace Sci., 1975. Vol. 16, N 1. P. 31—96.
5. *Голдстейн М. Е.* Аэроакустика. М.: Машиностроение, 1981. 294 с.
6. *Крайтон Д.* Акустика как ветвь гидромеханики // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир, 1984. С. 359—412.
7. *Фокс-Вильямс Д.* Источники звука в аэродинамике — действительные и фиктивные // Ракетная техника и космонавтика. 1982. Т. 20, N 4. С. 7—18.
8. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
9. *Мунин А. Г., Кузнецов В. М., Леонтьев В. А.* Аэродинамические источники шума. М.: Машиностроение, 1981. 248 с.
10. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 510 с.
11. *Миниович И. Я., Перник А. Д., Петровский В. С.* Гидродинамические источники звука. Л.: Судостроение, 1972. 478 с.
12. *Crow S. C.* Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem // Stud. Appl. Math. 1970. Vol. 49, N 1. P. 21—44.
13. *Curler N.* The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound // Proc. Roy. Soc. London A. 1955. Vol. 231. P. 505—514.
14. *Powell A.* Aerodynamic noise and the plane boundary // J. Acoust. Soc. Amer. 1960. Vol. 32. P. 982—990.
15. *Смольяков А. В.* Спектр квадрупольного излучения плоского турбулентного пограничного слоя // Акуст. журн. 1973. Т. 19, № 3. С. 420—426.
16. *Landahl M. T.* Wave mechanics of boundary layer turbulence and noise // J. Acoust. Soc. Amer. 1975. Vol. 57, N 4. P. 824—832.
17. *Phillips O. M.* On the aerodynamic surface sound from a plane turbulent boundary layer // Proc. Roy. Soc. London A. 1956. Vol. 234. P. 327.
18. *Реутов В. П., Рыбушкина Г. В.* Излучение звука при рассеянии волн Толлмина—Шлихтинга в пограничном слое на жесткой неоднородной поверхности // Акуст. журн. 1984. Т. 30, № 3. С. 358—363.
19. *Наугольных К. А., Рыбак С. А.* Об излучении звука турбулентным пограничным слоем // Тр. Акуст. ин-та. 1971. № 16. С. 129—134.
20. *Грешилов Е. М., Миронов М. А.* Экспериментальная оценка звука, порождаемого турбулентным течением в гидроканале // Акуст. журн. 1983. Т. 29, № 4. С. 460—470.
21. *Грешилов Е. М., Миронов М. А.* Влияние вязкости на спектр вибрации трубки, возбуждаемой турбулентным течением // Докл. на X Всесоюз. акуст. конф. М., 1983. С. 9—11.
22. *Данилов С. Д., Миронов М. А.* Преобразование поперечных волн в продольные на границе раздела двух сред и проблема генерации звука пристенной турбулентностью // Акуст. журн. 1985. Т. 31, № 4. С. 527—528.
23. *Obermeier F., Möhring W.* Aerodynamic sound generation by turbulent

- boundary layer flows along solid and compliant walls // Ztschr. Flugwiss. Weltraumforsch. 1984. Bd. 8, N 3. S. 181—192.
24. *Bergeron R. F.* Aerodynamic sound and the low-wavenumber wall-pressure spectrum of nearly incompressible boundary-layer turbulence // J. Acoust. Soc. Amer. 1973. Vol. 54, N 1. P. 123—133.
 25. *Phillips O. M.* The intensity of Aeolian tones // J. Fluid Mech. 1956. Vol. 1, pt. 6. P. 607—624.
 26. *Рабинович М. И., Реутов В. П., Рыбушкина Г. В.* О дипольном излучении турбулентного пограничного слоя на жесткой поверхности с геометрической неоднородностью // Акуст. журн. 1984. Т. 30, № 1. С. 105—109.
 27. *Реутов В. П., Рыбушкина Г. В.* Оценка спектра акустического излучения пограничного слоя на шероховатой поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 5. С. 20—26.
 28. *Реутов В. П., Рыбушкина Г. В.* Об излучении звука пограничным слоем на плоской поверхности с неоднородностью формы и упругости // Акуст. журн. 1986. Т. 32, № 1. С. 81—86.
 29. *Маршов В. П., Смольяков А. В.* Поле пристеночных давлений в турбулентном пограничном слое на шероховатой поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 3. С. 72—77.
 30. *Ffowcs Williams J. E., Hall L. H.* Aerodynamic sound generation by turbulent flow in the vicinity of a scattering half plane // J. Fluid Mech. 1970. Vol. 40, pt. 4. P. 657—670.
 31. *Crighton D. G., Leppington F. C.* On the scattering of aerodynamic noise // Ibid. 1971. Vol. 46, pt 3. P. 577—597.
 32. *Howe M. S.* On the generation of sound by turbulent boundary layer flow over a rough wall // Proc. Roy. Soc. London A. 1984. Vol. 395, N 1809. P. 247—263.
 33. *Реутов В. П., Рыбушкина Г. В.* О формировании спектра акустического давления в турбулентном пограничном слое на пластине // Акуст. журн. 1986. Т. 32, № 3. То же: Препр. ИПФ АН СССР № 122. Горький, 1985.
 34. *Dowling A. P.* Flow-acoustic interaction near a flexible wall // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 128. P. 181—198.
 35. *Маршов В. П.* Об излучении звука пограничным слоем на шероховатой поверхности // Докл. на VII науч.-техн. конф. по аэроакустике. М.: ЦАГИ, 1981. С. 50—51.
 36. *Stein R. F.* Generation of acoustic-gravity waves by turbulence in an isothermal stratified atmosphere // Solar Phys. 1967. Vol. 2. P. 385—432.
 37. *Касоев С. Г.* О генерации звука вихревой точкой в стационарном потоке слабосжимаемой жидкости // Акуст. журн. 1984. Т. 30, № 4. С. 502—506.
 38. *Львов В. С., Михайлов А. В.* Звук и гидродинамическая турбулентность в сжимаемой жидкости // ЖЭТФ. 1978. Т. 74, № 4. С. 1445—1457.
 39. *Möhring W.* On vortex sound at low Mach number // J. Fluid Mech. 1978. Vol. 85. P. 685—691.
 40. *Kraichnan R. H.* Pressure fluctuations in turbulent flow over a flat plate // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. Vol. 28, N 3. P. 378—390.
 41. *Кантуэлл Б. Дж.* Организованные движения в турбулентных потоках // Вихри и волны. М.: Мир, 1984. С. 9—79.
 42. *Рабинович М. И., Суцук М. М.* Когерентные структуры в турбулентных течениях // Нелинейные волны. Самоорганизация. М.: Наука, 1983. С. 56—85.
 43. *Ffowcs Williams J. E., Kompton A. J.* The noise from the large scale structure of a jet // J. Fluid Mech. 1978. Vol. 84, pt 4. P. 673—694.
 44. *Лямшев Л. М., Скворцов А. Г.* Излучение звука солитонами завихренности // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10, № 16. С. 988—991.
 45. *Fujihiko S.* On the role of large-scale coherent structures (vortex rings) in the sound emission of jets // Trans. Jap. Soc. Aeronaut. and Space Sci. 1984. Vol. 27, N 75. P. 60—62.

СТАЦИОНАРНАЯ СТРУКТУРА НЕРАВНОВЕСНОГО ВЫСОКОЧАСТОТНОГО РАЗРЯДА В ПОЛЯХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В. Б. ГИЛЬДЕНБУРГ, В. Е. СЕМЕНОВ

Неравновесный высокочастотный разряд в волновых электромагнитных полях можно рассматривать как пример нелинейной динамической системы, характеризующейся весьма богатым набором возможных стационарных плазменно-полевых структур. В данной статье рассматриваются структуры, формируемые в условиях сильной неравновесности (температура газа $T_m \approx 300$ К, температура электронов $T_e \gg 10^4$ К) плоскими волнами или волновыми пучками с поперечным (по отношению к градиентам плотности) электрическим полем.

Отыскание самосогласованных стационарных распределений поперечного поля и разрядной плазмы сводится к решению скалярного уравнения Гельмгольца для комплексной амплитуды электрического поля $Ee^{i\omega t}$ в нелинейной поглощающей среде:

$$\Delta E + k^2 \varepsilon E = 0. \quad (1)$$

Здесь $k = \omega/c$; $\varepsilon = 1 - (1 + iv/\omega) N/N_c$ — комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы разряда; N — концентрация электронов; $N_c = m(\omega^2 + \nu^2)/4\pi e^2$ — ее критическое значение; ν — эффективная частота соударений электронов; e и m — заряд и масса электрона. Концентрация N в стационарном состоянии представляет собой растущую (в общем случае нелокальную) функцию амплитуды поля $|E|$, определяемую из уравнения баланса ионизации:

$$\nabla(D\nabla N) + (\nu_i - \nu_a)N - \alpha N^2 = 0. \quad (2)$$

Температуру электронов в разряде и зависящие от нее параметры ионизационного баланса: частоту ионизации электронным ударом ν_i , частоту прилипания электронов к молекулам ν_a , коэффициенты диффузии D и электрон-ионной рекомбинации α , пренебрегая процессами переноса тепла, будем полагать локально зависящими от $|E|$.

В работах [1—3] приведены некоторые решения уравнения (1) для случая предельно сильной пороговой нелинейности ($N = 0$ при $|E| < E_c$, $N = \infty$ при $|E| > E_c$). Нелинейная характеристика такого вида (будем называть ее далее прямоугольной), отвечающая согласно (2) условиям $\alpha = 0$, $D = 0$, фиксирует амплитуду поля в разряде на заданном («пробойном») уровне $|E| = E_c$ ($\nu_i(E_c) = \nu_a$) и допускает построение аналитических решений. Важной задачей, однако, остается при этом анализ возмущений, обусловленных малыми локальными или нелокальными отклоне-

ниями характеристики $N(|E|)$ от прямоугольной. Учет этих возмущений позволяет установить, в частности, структуру и саму возможность существования переходных пограничных слоев разряда (без их учета решение всегда имеет разрыв) и вообще, как показано ниже, вводит в теорию некоторый новый класс элементарных структур (типа переходных и изолированных слоев), имеющих достаточно универсальный характер и способных играть роль самостоятельных структурных элементов в разрядах различной конфигурации.

Ограничиваясь анализом одномерных распределений, запишем выражения для вектора электрического поля и концентрации в виде

$$\vec{E} = \vec{z}^0 E(x) \exp(i\omega t -iky \sin \theta), \quad N = N(x) \quad (3)$$

(θ — угол падения волны на границу плазмы). Если диффузия и рекомбинация достаточно слабы, то на масштабах интересующих нас структур, как будет ясно из дальнейшего, можно пренебречь изменениями потока энергии, а амплитуду поля считать мало отличающейся от порогового значения E_c . Это позволяет существенно упростить задачу, удерживая в уравнениях (1), (2) только первые члены разложения по малой разности $(|E|/E_c) - 1$. В результате оказывается возможным получить универсальные (не содержащие параметров) нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие диффузионные ($\alpha = 0$) и рекомбинационные ($D = 0$) структуры. В первом случае ($\alpha = 0, D \neq 0$) уравнение для концентрации и выражение для амплитуды поля имеют вид

$$(n^{-1}n_{\xi\xi})_{\xi\xi} = 1 - n, \quad (4)$$

$$|E| = E_c (1 - \mu_d n_{\xi\xi}/n), \quad (5)$$

где $\xi = x/l_d$; $l_d = (D/\beta v_a n_0 k^2)^{1/2}$; $n_0 = (1 - S^2) \cos^2 \theta$; $\beta = E_c \partial/\partial |E| (v_i/v_a)$ при $|E| = E_c$ (для воздуха $\beta \approx 5$); $S = (EE_x^* - E^*E_x)/(2ikE_c^2 \cos \theta)$ — безразмерный поток энергии; $n = N/N_c n_0$ — безразмерная концентрация, значение $n = 1$ ($N = N_c n_0$) соответствует величине концентрации на резкой границе плазмы (в отсутствие диффузии и рекомбинации [1]); $\mu_d = n_0 (kl_d)^2 \ll 1$. Как видим, диффузионные структуры характеризуются в общем случае неким смешанным «диффузионно-волновым» масштабом l_d , пропорциональным среднему геометрическому длины электромагнитной волны k^{-1} и диффузионной длины прилипания $L_{\perp} = \sqrt{D/v_a}$.

Уравнение (4) имеет положительные ограниченные решения двух типов: переходный слой (решение типа перепада) и изолированный слой (солитон). Решения второго типа образуют однопараметрическое семейство (параметром служит максимальная концентрация n_m или полное число электронов на единицу площади слоя

$$n_{\Sigma} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} n(\xi) d\xi. \quad \text{Оба типа решения были исследованы численно;$$

результаты расчета иллюстрируются на рис. 1 [4, 5]. Солитоны

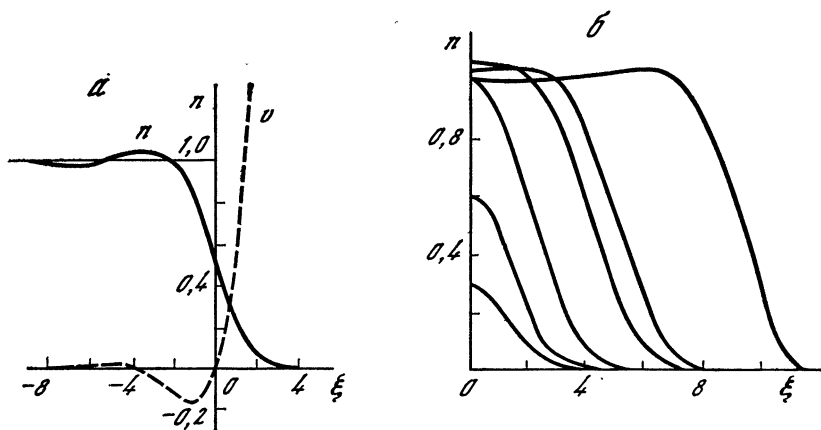


Рис. 1. Структура пограничного (а) и изолированного (при различных n_m) (б) диффузионных слоев

а: возмущения амплитуды поля $v(\xi) = \beta (l_d/L_a)^2 (1 - |E|/E_c)$; б: $n(-\xi) = n(\xi)$

малой высоты могут быть описаны аналитически:

$$n = n_m \exp(-\xi^2/2\sqrt{2}), \quad n_\Sigma = \sqrt{2\sqrt{2}\pi} n_m. \quad (6)$$

Рекомбинационные структуры, отвечающие случаю локальной ионизационной нелинейности ($D = 0$), в рамках использованных выше приближений описываются уравнением второго порядка (см. также [6]):

$$n_{\zeta\zeta} + 1 - n = 0, \quad n \geq 0. \quad (7)$$

Здесь $\xi = x/l_r$; $l_r = k^{-1}\sqrt{\alpha N_c/\beta v_a}$; $|E| = E_c(1 + \mu_r n)$; $\mu_r = n_0(kl_r)^2$. Решения, соответствующие переходному и изолированному плазменным слоям, выражаются в этом случае аналитически:

$$n_{\text{пер}} = \begin{cases} 1 - e^\zeta, & \zeta < 0, \\ 0, & \zeta > 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$n_{\text{из}} = \begin{cases} 1 - g \operatorname{ch} \zeta, & |\zeta| < \operatorname{Arccch}(1/g), \\ 0, & |\zeta| > \operatorname{Arccch}(1/g). \end{cases} \quad (9)$$

Характерный масштаб рекомбинационных структур определяется длиной l_r , а их основное отличие от диффузионных заключается в наличии скачка производной n_ζ при $n = 0$. Другое отличие состоит в том, что толщина рекомбинационного слоя Λ_r может быть

сколь угодно малой (при $n_\Sigma \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} n(\zeta) d\zeta \ll 1$, т. е. $n_m = 1 - g \ll 1$,

имеем $\Lambda_r \approx 2l_r\sqrt{2n_m} \ll l_r$), а толщина диффузионного слоя Λ_d всегда больше или порядка величины l_d . Благодаря указанному

обстоятельству в рамках использованной здесь модели (7) можно описывать плазменные слои, формируемые и при сильной рекомбинации, когда $\mu_r \gg 1$, но $n_m \ll \mu_r^{-1}$, т. е. толщина слоев мала по сравнению с длиной волны и длиной поглощения в плазме.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что разрядные структуры, рассчитанные на основании использования прямоугольной характеристики нелинейности [1—3], реализуемы только в том случае, когда их характерные масштабы велики по сравнению с наименьшей из длин l_d, l_r . В частности, для плоских плазменных слоев это выполняется, если полное число частиц в них достаточно велико ($n_\Sigma \gg 1$), при этом рассмотренные выше диффузионный и рекомбинационный слои имеют П-образную форму. В противоположном предельном случае ($n_\Sigma \ll 1$) диффузия и рекомбинация приводят к сильному искажению структуры слоев: максимальная плотность электронов n_m в них уменьшается, а толщина увеличивается. Для диффузионного и рекомбинационного слоев при $n_\Sigma \ll 1$ соответственно имеем

$$n_m = n_\Sigma / \sqrt{2\sqrt{2}\pi}, \quad \Lambda_d \approx 2l_d, \quad (10)$$

$$n_m = (3n_\Sigma/4\sqrt{2})^{2/3}, \quad \Lambda_r \approx 2l_r(3n_\Sigma/2)^{1/3}. \quad (11)$$

Общая («глобальная») структура разряда в волновых полях в ряде случаев может быть представлена как совокупность рассмотренных структур. Проиллюстрируем это на примере разряда в пересекающихся квазиоптических волновых пучках. Этот пример имеет самостоятельное прикладное значение в связи с проблемами создания и использования (в лабораторных установках и в атмосфере Земли) искусственных свободной локализованных плазменных образований. Кроме того, он весьма интересен методически ввиду нетривиальности его соотношения с соответствующей опорной одномерной задачей. На первый взгляд может показаться, что при достаточно большой ширине пучков пространственное распределение плазмы можно найти, рассматривая разряд в поле двух плоских волн. Однако, как будет ясно из дальнейшего, неоднородность задачи играет здесь принципиальную роль и не позволяет свести ее к исследованию разряда в плоских волнах при сколь угодно большой ширине пучков.

Остановимся вначале на характерных особенностях разрядных структур в плоских волнах. В рамках модели с прямоугольной нелинейной характеристикой $N(|E|)$ в плоских волнах возможно образование уединенного плазменного слоя, толщина которого зависит от амплитуд падающих волн [1, 2]. Данное решение, однако, не единственно. Та же модель допускает и многослойное решение с произвольным числом плазменных слоев (получаемых путем «разрезания» исходной сплошной структуры и «раздвигания» ее частей на расстояния, кратные половине длины волны). Кроме того, все эти решения характеризуются известной неопределенностью: амплитуда электрического поля в пучностях, располагающихся в

неионизованной области, достигает значений, в точности равных пробойному E_c . Это означает, что такие структуры сильно подвержены воздействию любых слабых возмущений, и вопрос об их реализуемости, строго говоря, остается открытым. Приведенный выше учет локальных и нелокальных отклонений от прямоугольной характеристики $N(|E|)$ позволяет снять данную неопределенность. Можно показать, в частности, что в случае нелокальных (диффузионных) поправок амплитуда поля в неионизованной области не достигает значений, достаточных для пробоя газа. Поэтому плазменный слой, границы которого (или вся структура) определяются диффузией, в плоских волнах может быть уединенным. В случае же, если нелинейность является локальной ($D = 0$, $\alpha \neq 0$), образование уединенного слоя, поддерживаемого двумя падающими с противоположных сторон плоскими волнами, невозможно, так как в соседних со слоем пучностях поле всегда превышает пробойное значение. Следует подчеркнуть, однако, что и в условиях определяющего влияния диффузии решение задачи о структуре разряда в плоских волнах по-прежнему не единственно: возможны как однослойные, так и многослойные структуры.

Известная трудность аналитического исследования одномерно-нелинейного уравнения Гельмгольца

$$E_{\eta\eta} + [\chi(|E|^2) - i\sigma(|E|^2)]E = 0, \quad (12)$$

к решению которого сводится задача о структуре неравновесного высокочастотного разряда в плоских волнах s -поляризации, обусловлена отсутствием у этого уравнения (при наличии поглощения) интегралов. В связи с этим интересно отметить, что при слабом поглощении приближенные решения уравнения (12) характеризуются интегралом типа адиабатического инварианта¹:

$$G = \oint \sigma(P)(P_{\eta})^2 d\eta = \text{const}, \quad P = |E|^2, \quad (13)$$

где интегрирование проводится по периоду осцилляций амплитуды поля. Этот интеграл позволяет в самом общем случае записать решение укороченных уравнений, получаемых при усреднении (12), в квадратурах и может быть полезен в самых различных задачах о взаимодействии волн в нелинейных средах с диссипацией. В частности, для интересующей нас задачи о разряде в плоских волнах уже из самого факта существования интеграла следует отсутствие локализованных распределений плазмы в пространстве, если хотя бы одна из амплитуд падающих волн отлична от пробойного значения E_c .

В отличие от рассмотренной выше задачи с плоскими волнами в случае двух пересекающихся квазиоптических пучков конечной ширины a уравнения (1)–(2) имеют единственное решение. В работе [3] дан пример построения этого решения для разряда с прямо-

¹ Данный интеграл является обобщением впервые найденного в работе [7] для случая слабой нелинейности ($\chi \approx 1$), когда осцилляции амплитуды имеют гармонический характер.

угольной характеристикой нелинейности при не слишком слабом поглощении. Структура такого разряда имеет принципиально многослойный характер. Плазменные слои однородны и расположены в пучностях стоячей волны, образующейся в результате интерференции невозмущенных пучков. Полное количество электронов N_{Σ} , приходящееся на единицу площади слоя, и общая конфигурация ионизованной области существенным образом зависят от ширины падающих пучков и поперечного распределения амплитуды в них. В общем случае ионизованная область имеет форму клина, обращенного основанием в сторону падающего излучения, а величина N_{Σ} в центральных слоях достигает значений порядка $\pi\omega N_c \cos \theta / (\nu k^2 a)$ (θ — угол падения волновых пучков на плоскость симметрии системы).

Можно показать, что описанная глобальная структура обладает известной универсальностью: для пучков большой ширины ($ka \gg \llcorner \text{tg } \theta, \text{ctg } \theta$) она остается неизменной при весьма значительных отклонениях (локальных или нелокальных) характеристики нелинейности $N(|E|)$ от прямоугольной. Указанная универсальность сохраняется, пока толщина отдельных плазменных слоев Λ остается малой по сравнению с расстоянием между ними ($k\Lambda \cos \theta \ll 1$). От конкретного вида ионизационной нелинейности при этом будет зависеть только структура самих образующихся слоев плазмы: их толщина и максимальное значение электронной концентрации. Восстановление структуры слоев по найденному ранее [3] полному количеству электронов N_{Σ} не составит труда, если воспользоваться приведенными выше результатами исследования элементарных разрядных структур. В частности, основной параметр рассмотренных здесь изолированных плазменных слоев n_{Σ} однозначно связан с величиной N_{Σ} :

$$n_{\Sigma d, r} = \frac{N_{\Sigma}}{N_c n_0^{d, r}} \sim \frac{\pi\omega \text{tg } \theta}{\nu ka \sqrt{\mu_{d, r}}}. \quad (14)$$

Отсюда следует, что образующиеся плазменные слои будут тонкими, а глобальная структура разряда неизменной в достаточно широком диапазоне параметров ионизационного баланса:

$$\mu_d \ll 1, \mu_r \ll H \equiv (\nu ka / \pi\omega \text{tg } \theta) \gg 1. \quad (15)$$

Образование же сравнительно плотных слоев плазмы с концентрацией $N \sim N_c \cos^2 \theta$, получаемой в случае прямоугольной характеристики ионизационной нелинейности [3], возможно только при весьма слабых диффузии и рекомбинации:

$$\mu_{d, r} \ll H^{-2}. \quad (16)$$

В противоположном предельном случае ($\mu_{d, r} \gg H^{-2}$) имеем $n_{\Sigma} \ll 1$, т. е. структура отдельных плазменных слоев существенным образом зависит от параметров ионизационного баланса. Интересно отметить, что при очень сильной рекомбинации ($\mu_r \gg H$), когда нарушается условие малой толщины слоев, влияние всей газо-

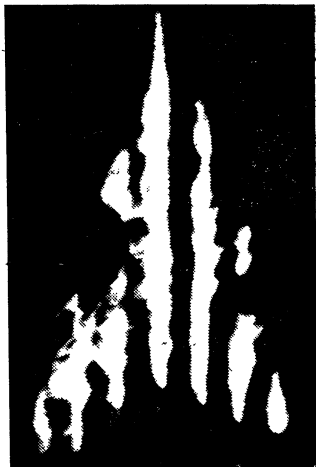
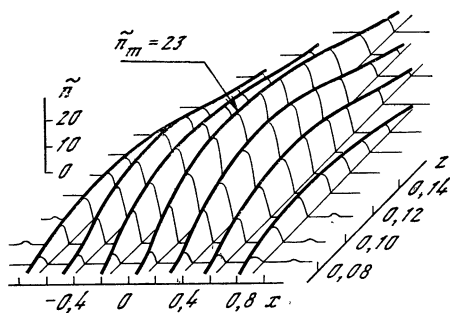


Рис. 2. Пространственное распределение концентрации в пересекающихся гауссовых пучках

Волновые векторы пучков лежат в плоскости xz и имеют равные положительные проекции на ось z . Масштабами по x и z являются соответственно поперечный (a) и продольный ($l = ka^2$) размеры фокальной области одного пучка; $\tilde{n} = (ka)^2 N/N_c$; значения параметров: $(ka)^2 \nu_a/\alpha N_c = 10$, $\nu/\omega = 1$, $ka(\pi/2 - 1) = 12$, $E_0/E_c = 0,9$ (E_0 — амплитуда поля в фокусе одного пучка)

Рис. 3. СВЧ-разряд в пересекающихся пучках

разрядной плазмы на поле становится пренебрежимо малым, и расчет полной структуры разряда может быть проведен в приближении заданного внешнего поля.

Рассмотренные разрядные структуры в пересекающихся пучках электромагнитных волн были исследованы также в численных и лабораторных экспериментах. Соответствующие результаты проиллюстрированы на рис. 2, 3, где изображена многослойная структура разряда в двух пересекающихся волновых пучках s -поляризации. На рис. 2 представлено пространственное распределение концентрации плазмы, найденное в результате проведенного по методике [8] численного интегрирования параболического уравнения для комплексной амплитуды поля, описывающего разряд в пучках, пересекающихся под малым углом один к другому. На рис. 3, взятом из работы [9], показан СВЧ-разряд в плоскости, образованной осями пучков (газ — воздух, давление $p = 20$ Торр, длина волны $\lambda = 8$ мм, угол между осями пучков 60° , вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости рисунка). Общая картина разряда и его структурные параметры, найденные на основании данных численного расчета и эксперимента, достаточно хорошо согласуются с результатами изложенной приближенной теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гильденбург В. Б., Голубев С. В. Неравновесный высокочастотный разряд в волновых полях // ЖЭТФ. 1974. Т. 67. С. 89—93.
2. Гильденбург В. Б. Неравновесный высокочастотный разряд в полях электромагнитных волн // Нелинейные волны. М.: Наука, 1981. С. 87—96.
3. Семенов В. Е. Многослойная структура разряда в самосогласованном поле двух квазиоптических пучков электромагнитных волн // Физика плазмы. 1984. Т. 10. С. 562—567.
4. Гильденбург В. Б., Семенов В. Е., Смолякова О. Б. Элементарные диффузионные структуры высокочастотного разряда в волновых полях // Там же. 1986. Т. 12, № 11.
5. Гильденбург В. Б., Смолякова О. Б. Нелинейная динамика волнового пучка в ионизирующей среде // VI Всесоюз. конф. по физике низкотемпературной плазмы: Тез. докл. Л., 1983. Т. 1. С. 308—310.
6. Борисов Н. Д., Гельфонд О. А., Гуревич А. В. Ионизованный слой в атмосфере // Физика плазмы. 1983. Т. 9, № 5. С. 1048—1057.
7. Якубович Е. И. Об общих свойствах усредненных поляризуемостей в нелинейной квазиоптике // ЖЭТФ. 1969. Т. 56. С. 676—682.
8. Петрова Т. А., Юнаковский А. Д. Исследование стационарного разряда в пересекающихся волновых пучках методом сеток: Препр. ИФФ АН СССР № 68. Горький, 1984. 11 с.
9. Вихарев А. Л., Гильденбург В. Б., Иванов О. А., Степанов А. Н. СВЧ-разряд в пересекающихся пучках электромагнитных волн // Физика плазмы. 1984. Т. 10. С. 165—168.



УДК 533.951

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ И НЕЛИНЕЙНАЯ ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ В СИЛЬНОЙ ПЛАЗМЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. Г. ЛИТВАК, В. А. МИРОНОВ, А. М. СЕРГЕЕВ

В настоящее время является общепризнанным, что процессы сильной плазменной турбулентности играют определяющую роль в картине диссипации мощного электромагнитного излучения в плазме. Однако единого представления о характере развития и динамике турбулентности не существует. Причины этого заключаются, с одной стороны, в незавершенности теоретического анализа сложных математических моделей нелинейного процесса, с другой — в явной недостаточности детальных наблюдений плазменной турбулентности в эксперименте. Последнее обстоятельство оставляет возможность для существования альтернативных точек зрения на сильную турбулентность. Среди дискутируемых остается, в частности, и ключевой вопрос о пространственной структуре плазменных колебаний, которая в соответствии с различными взглядами на турбулентность может представлять собой как набор коллапсирующих сгустков, так и последовательность квазистационарных диссипативных структур.

В модели коллапса [1] предполагается, что широкий волновой пакет, образовавшийся под действием внешней накачки в области

малых волновых чисел ($k \ll r_d^{-1}$, r_d — дебаевский радиус электронов), испытывает модуляционную неустойчивость и последующее сильное сжатие, в процессе которого сгусток высокочастотного (ВЧ) поля «забывает» о породившем его источнике и сужается вплоть до масштабов бесстолкновительной диссипации ($k \simeq \simeq r_d^{-1}$). При этом основной стадией в эволюции плазменных колебаний, определяющей темп нелинейного поглощения энергии, является свободное схлопывание распределения ВЧ-поля. В результате схлопывания происходит диссипация энергии, а следовательно, и разрушение (коллапс) пространственной структуры колебаний, вызванное коротковолновым затуханием Ландау. В целом установившуюся сильно турбулентную картину, состоящую из множества вспыхивающих и коллапсирующих сгустков, можно характеризовать квазистационарным спектром в k -пространстве с потоком энергии из области малых k (накачка) в область больших k (диссипация) [2]. Однако подобный спектр турбулентности может сформироваться и за счет образования квазистационарных сгустков ВЧ-поля с «индивидуальными» спектрами в k -пространстве, на которых «уравновешены» накачка и диссипация. Эта гипотеза положена в основу модели диссипативных структур [3].

В обоих подходах к описанию турбулентности важной является проблема устойчивости пространственной структуры сгустка. Если в модели коллапса неустойчивость может только нарушить автомодельный закон сжатия и не всегда препятствует схлопыванию (т. е. образованию особенностей в решении), то устойчивость диссипативной структуры — принципиальное условие ее существования. В каких же случаях возможно появление квазистационарных ячеек плазменной турбулентности? Для иллюстрации обсуждаемого вопроса обратимся к конкретному примеру ленгмюровских колебаний в изотропной плазме.

1. Уравнения сильной ленгмюровской турбулентности описывают совместную эволюцию амплитуды потенциала ВЧ электрического поля $E = 1/2 (\mathcal{E} e^{i\omega_L t} + \text{к. с.}) = -1/2 (\nabla \varphi e^{i\omega_L t} + \text{к. с.})$ колебаний и относительных возмущений концентрации плазмы $n = \delta N/N$:

$$\Delta \left(-2i\omega_p \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 3v_T^2 \Delta \varphi - 2i\omega_p \hat{\gamma}_L \varphi \right) = \omega_p^2 \operatorname{div} (n \nabla \varphi), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - v_s^2 \Delta n + \hat{\gamma}_s \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{16\pi N M} \Delta |\nabla \varphi|^2. \quad (2)$$

Здесь ω_p — ленгмюровская частота электронов; v_T — их тепловая скорость; v_s — скорость звука; M — масса иона; γ_L и $\hat{\gamma}_s$ — пространственные операторы, ответственные за бесстолкновительную диссипацию высокочастотных и низкочастотных движений и накачку энергии в ленгмюровские колебания. В зависимости от предполагаемых условий существования турбулентности, способа ее возбуждения, геометрических факторов и т. п. можно анализировать свойства данной модели в пространствах различной размерности.

В одномерном случае консервативная часть системы уравнений (1), (2) имеет устойчивое локализованное решение — ленгмюровский солитон. Однако не при любой форме диссипативных слагаемых, дающих инкремент для крупномасштабных высокочастотных колебаний и поглощение мелкомасштабных волн, ленгмюровский солитон (или близкая к нему структура) играет роль фундаментальной ячейки турбулентности. Выполненные авторами численные расчеты (см. также [4, 5]) показывают, что квазисолитонные структуры скорее реализуются в изотермической плазме ($T_e \simeq T_i$) при сильном затухании низкочастотных возмущений плотности среды. При этом инкремент заметно не влияет на структуру стационарной волны и определяет только плотность солитонов на единицу турбулентной области. В процессе установления квазистационарного состояния с увеличением инкремента возникают короткоживущие сгустки ВЧ-поля. (Роль их в динамике становится определяющей при переходе к неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$ [6—8], в которой влияние конверсии плазмонов на мелкомасштабном ионном звуке, возбуждаемом при диссипации солитонов, может превышать воздействие накачки.) Генерация плазменной турбулентности при этом становится периодической с характерным временем порядка времени затухания низкочастотных возмущений. Таким образом, уже в простейшей геометрии возможно появление и схлопывающихся сгустков, и диссипативных структур.

Переходя к обсуждению двумерных структур турбулентности, заметим, что в консервативной системе ($\dot{\gamma}_L = 0$) стационарные локализованные распределения поля имеют независимо от их размера фиксированное значение ВЧ-энергии I (по существу плотности энергии колебаний на единицу длины)¹ и гамильтониана \mathcal{H} :

$$I = \frac{1}{8\pi} \int |\nabla\varphi|^2 dr,$$

$$\mathcal{H} = \int \left[3r_d^2 |\Delta\varphi|^2 - \frac{1}{32\pi N (T_e - T_i)} |\nabla\varphi|^4 \right] dr = 0.$$

Такие солитоны неустойчивы: при превышении величиной I критического значения начинается схлопывание распределения, а в противоположном случае — расплывание. Посмотрим, как скажется на таком уходе из состояния равновесия введение слабой неконсервативности в виде крупномасштабной накачки и затухания высоких пространственных гармоник. В процессе сжатия солитона произойдет расширение спектра в направлении больших k , что приведет к усилению диссипации ВЧ-энергии, т. е. к уменьшению I . Наоборот, расплывание при «дефиците» I увеличит амплитуду длинноволновых составляющих спектра и усилит приток энергии в солитон. Таким образом, неконсервативность является стабилизирующим фактором, а из множества

¹ Конкретные значения I зависят от типа локализованной моды; для основной цилиндрически-симметричной моды $I \simeq 50r_d^2 N (T_e + T_i)$ [9].

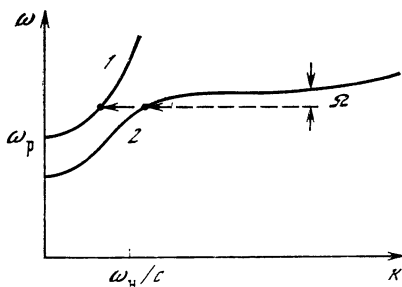


Рис. 1. Спектр электромагнитных волн в плазме

1 — обыкновенная волна; 2 — необыкновенная

локализованных распределений, возможных при $\hat{\gamma}_L = 0$, она выделяет единственное, спектр которого обеспечивает равновесие между источником и стоком энергии. Это и есть

двумерная диссипативная структура плазменных колебаний².

В трехмерном случае консервативные ленгмюровские солитоны имеют $H < 0$, и это же условие является достаточным для коллапса плазменных волн. Следовательно, слабая неконсервативность системы недостаточна для стабилизации солитона и превращения его в диссипативную структуру. Сильная неконсервативность, влияние которой сравнимо с нелинейными и дисперсионными эффектами, способна сформировать устойчивое распределение ВЧ-поля, однако форма его теперь будет существенно иной, чем у солитона при $\hat{\gamma}_L = 0$. Такие диссипативные структуры при модельном введении диссипации и накачки были исследованы в работе [3].

2. Плазма, помещенная даже в слабое ($\omega_H \ll \omega_p$, ω_H — циклотронная частота электронов) постоянное магнитное поле, приобретает целый ряд специфических свойств, что отражается и на особенностях нелинейной диссипации ВЧ-энергии. Некоторые новые черты сильной плазменной турбулентности будут рассмотрены ниже для случая верхнегибридных колебаний с волновыми векторами, почти ортогональными внешнему магнитному полю $H_0 = H_0 z_0$. Уравнение для комплексной амплитуды ВЧ-поля имеет теперь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 -2i\omega \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + 3v_T^2 \nabla \operatorname{div} \mathcal{E} + (\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_H^2) \mathcal{E} + \frac{\omega_H^2 \omega_p^2}{\omega^2} \mathcal{E} z_0 = \\
 = \frac{\omega_p^2 c^2}{\omega^2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathcal{E} + i \frac{\omega_p^2}{\omega} [\mathcal{E}_\perp \times \omega_H].
 \end{aligned} \quad (3)$$

Обратим внимание на два характерных момента в зависимости частоты колебаний от волнового вектора k (рис. 1). Во-первых, с ростом (или появлением) k_z при фиксированном k_\perp частота уменьшается: дисперсия колебаний вдоль магнитного поля является отрицательной, т. е. имеет противоположные знаки в поперечном и продольном направлениях. Во-вторых, в длинноволновой части спектра, начиная с $k_\perp^* = \omega_H/c$, становится существенной непотенциальность электрического ВЧ-поля и дисперсионная зависимость верхнегибридных колебаний непрерывно

² Детальные расчеты структур такого типа выполнены для случая плазменных колебаний нижнегибридного диапазона частот в работе [10].

переходит в ветвь, соответствующую медленной необыкновенной волне. Далее мы по отдельности рассмотрим эффекты, вызванные изменением знака дисперсии и взаимодействием колебаний с электромагнитной волной, считая, что нелинейные возмущения концентрации плазмы локально связаны с амплитудой ВЧ-поля.

Для широкого (в масштабе длины волны) пакета, движущегося в поперечном к магнитному полю направлении, из (3) можно получить упрощенное уравнение, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$-i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u |u|^2 = 0. \quad (4)$$

В отсутствие продольной зависимости ($\partial^2/\partial z^2 = 0$) нелинейное уравнение Шредингера описывает подробно изученные эффекты самофокусировки пучков света, коллапса двумерных распределений волн в плазме и т. д. Известно, что при $\mathcal{H} = \int (|\nabla_{\perp} u|^2 - \frac{|u|^4}{2}) dx dy < 0$ в решении этого уравнения за конечный промежуток времени возникает особенность, причем на заключительной (автомодельной) стадии схлопывания поперечный размер распределения поля уменьшается по закону $L_{\perp} \sim (t_0 - t)^{1/2}$, а уходящая в особенность ВЧ-энергия (на единицу длины) $I = \int |u|^2 dx dy$ достигает критического значения [11] $I_{кр} \simeq 11,86$. При учете продольной дисперсии можно показать, что эффективный размер распределения поля в z -направлении постоянно увеличивается:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int z^2 |u|^2 dx dy dz = 4 \int \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 dx dy dz > 0.$$

В результате этого линейная плотность энергии сгустка, определяющая темп поперечного сжатия, с течением времени уменьшается. Следовательно, благоприятная для коллапса ситуация реализуется лишь в том случае, если к моменту образования особенности пакет не успевает достаточно сильно расплыться в направлении магнитного поля, т. е. имеет конечный продольный размер. Это означает, что заключительная стадия схлопывания должна иметь характер описанной выше двумерной самофокусировки. Однако автомодельные (как и стационарные [12]) моды двумерной задачи являются неустойчивыми относительно модуляции в продольном направлении, поэтому поперечное сжатие сгустка заканчивается его дроблением на несколько вторичных мелкомасштабных структур с одинаковыми по порядку величины размерами вдоль и поперек магнитного поля [13].

Эволюция вторичных структур может протекать по сходному с описанным сценарию. Возможность поперечной самофокусировки для них объясняется тем, что в процессе дробления исходного распределения имеет место локальное подрастание амплитуды поля в образующихся сгустках за счет перераспределения плотности энергии колебаний в продольном направлении. Таким образом, в отличие от процесса трехмерного схлопывания коле-

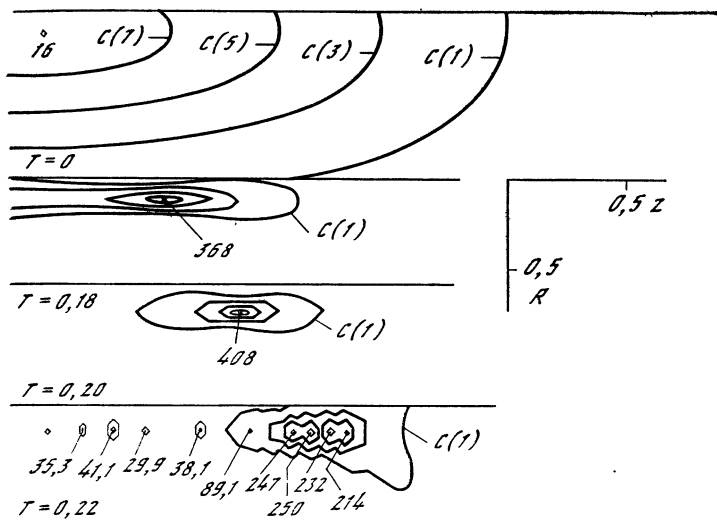


Рис. 2. Динамика пространственной структуры ($A = 4$)
 $C(1) = 0,125A$; $C(3) = 0,375A$; $C(5) = 0,625A$; $C(7) = 0,875A$

баний в консервативной среде с положительной дисперсией в рассматриваемой ситуации элементарный акт нелинейной динамики состоит из последовательности процессов поперечного сжатия и продольного дробления пространственной структуры, в результате чего в системе рождаются все более мелкомасштабные сгустки ВЧ-поля.

Описанная выше картина самовоздействия подтверждается численными исследованиями динамики локализованных распределений (см. уравнение (4)) для случая аксиальной симметрии и пакетов с начальной гауссовой формой поля:

$$u(r, z, 0) = A \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2} - \frac{z^2}{2b^2}\right), \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

На рис. 2 изображены линии уровня функции $|u(r, z, t)|^2$ и ее локальные максимумы в последовательные моменты времени T для параметров $A = 4$, $a = 1$, $b = 3$. В приведенном варианте расчета отчетливо прослеживаются две стадии процесса измельчения пространственной структуры с последующим распылением поля по всем направлениям.

Таким образом, самовоздействие плазменных колебаний с продольной отрицательной дисперсией демонстрирует новый, отличный от «прямого» коллапса процесс передачи энергии ВЧ-поля вверх по пространственному спектру в направлении ее эффективной диссипации.

Другая отличительная особенность слабо замагниченной плазмы связана с существованием собственных электромагнитных

волн на частоте колебаний поля в солитоне. Рассмотрим взаимодействие солитона с электромагнитной волной в одномерном случае, в котором сравнительно просто удастся провести аналитическое исследование этого процесса.

Представим решение уравнения (3) в виде суммы полей солитона $\mathcal{E}_s e^{-i\Omega t}$ и электромагнитных волн $\mathcal{E}_\omega = (\mathcal{E}_o + \mathcal{E}_n) e^{-i\Omega t}$. При этом для полей, возбуждаемых солитоном необыкновенной (н) и обыкновенной (о) волн, получаем соответственно уравнения

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_{n,y}}{d\xi^2} + k_0^2 \frac{\omega_H^2}{\Omega \omega} \sin^2 \alpha \mathcal{E}_{n,y} = -ik_0^2 \frac{\omega_H}{\omega} \sin \alpha \mathcal{E}_s,$$

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_{o,z}}{d\xi^2} + k_0^2 \left(\frac{\omega_H^2}{\omega^2} - \frac{2}{\sin^2 \alpha} \frac{\Omega}{\omega} \right) \mathcal{E}_{o,z} = k_0^2 \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \sin \alpha \cos \alpha \mathcal{E}_s,$$

где α — угол между магнитным полем (z_0) и направлением распространения волны ξ_0 ; $y_0 \perp \xi_0$, $z_0 \parallel \Omega/\omega = A_0^2/4E_p^2$; A_0 — амплитуда солитона; $k_0 = \omega/c$; E_p — характерное плазменное поле:

$$E_c = A_0 \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{\omega A_0 \xi}{\sqrt{6} v_r E_p} \right).$$

Отсюда для потока энергии, излучаемого в необыкновенную и обыкновенную волны, находим

$$S_1 = \frac{\sqrt{3} \pi^2 \omega_H v_r \sin \alpha}{8c} W,$$

$$S_2 = \frac{3\pi \omega_H^2 v_r^2 E_p^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{16c\omega^2 (1 - 4\pi\omega^4 W^2/3v_r^2 \omega_H^2 E_p^4 \sin^2 \alpha)^{1/2}},$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathcal{E}_s^2 d\xi.$$

При этом из закона сохранения числа квантов

$$dW/dt = -2(S_1 + S_2).$$

Солитоны с достаточно большой амплитудой ($A_0^2 \gg \gg 4E_p^2 \omega_H^4 \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha / \omega^4$) излучают главным образом необыкновенную волну. Время жизни их не зависит от амплитуды и составляет $\tau_n = 4c/\sqrt{3} \pi^2 v_r^2 \omega_H \sin \alpha$. В другом предельном случае преобладающим является излучение в обыкновенную волну. Время жизни определяется начальной амплитудой солитона и равно

$$\tau_o = 2\sqrt{2} \omega_H^2 c A_0 / \sqrt{3} \pi E_p \omega^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Таким образом, в присутствии постоянного магнитного поля появляется новый канал диссипации энергии турбулентности, связанный с излучением электромагнитных волн плазменными колебаниями. Как показывают оценки физических ситуаций, в ряде случаев этот канал потерь может быть основным. Данное обстоятельство существенно меняет традиционное представление

о единственно возможном способе релаксации турбулентности, связанном с передачей энергии частицам плазмы.

Рассмотренные эффекты дробления пространственной структуры верхнегибридных колебаний и излучения электромагнитной волны плазменной турбулентностью были связаны с особенностями линейной дисперсионной зависимости ВЧ-движений в замагниченной плазме. К новым интересным эффектам приводит учет влияния магнитного поля на свойства низкочастотных волн, возбуждаемых пондеромоторной силой в процессе самовоздействия.

Для наглядного дальнейшего изложения рассмотрим наиболее простую одномерную модель движений в направлении, перпендикулярном магнитному полю, считая теперь его влияние существенным только для низкочастотных возмущений плазмы с характерными скоростями эволюции v , меньшими альфвеновской скорости: $v \ll V_A = H_0/\sqrt{4\pi MN}$. В этом случае плазменная турбулентность может быть исследована в рамках следующей системы уравнений для комплексной амплитуды ВЧ-поля \mathcal{E} и относительных изменений плотности среды n [14]:

$$-2i\omega \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + 3v_T^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} - \omega^2 n \mathcal{E} + 2i\omega \hat{\gamma}_L \mathcal{E} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \omega_H^2 \frac{m}{M} n + \hat{\gamma}_s \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{16\pi MN} \frac{\partial^2 |\mathcal{E}|^2}{\partial x^2}. \quad (6)$$

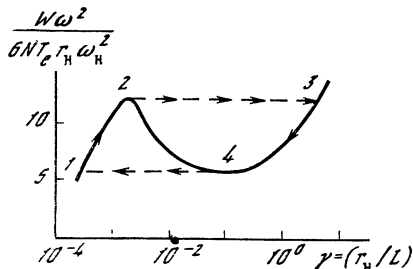
Остановимся прежде всего на анализе локализованных структур в отсутствие диссипативных слагаемых ($\hat{\gamma}_L = 0$, $\hat{\gamma}_s = 0$). Наиболее интересными и необычными оказываются свойства солитонов в плазме с $\beta = v_s^2/V_A^2 \ll 1$, когда можно выделить три типа уединенных нелинейных распределений ВЧ-поля вида $\mathcal{E}(x, t) = A(x) \exp(-3i\gamma\omega_H^2 t/2\omega)$. В крупномасштабных солитонах с размерами $L > c/\omega_p$ локализация ВЧ-поля связана с возбуждением вынужденных магнитозвуковых возмущений среды: $n \simeq -|A|^2/4H_0^2$. Для солитонов с масштабами $r_H < L < c/\omega_p$ ($r_H = v_T/\omega_H$ — ларморовский радиус электронов) за счет нелокальности материальной связи

$$n = -\frac{|A|^2}{4H_0^2} + \frac{c^2}{4H_0^2\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |A|^2$$

происходит уменьшение энергии, запасенной в распределении при уменьшении его размера, а амплитудное значение поля $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}_{\max} = \sqrt{6}v_T H_0/c$ практически не изменяется. Наконец, существуют также мелкомасштабные солитоны с $L < r_H$, свойства которых полностью аналогичны свойствам обычных ленгмюровских солитонов. Типичная зависимость числа квантов W от обратного масштаба солитона $L^{-1} = \gamma r_H^{-1}$ показана на рис. 3 для случая $\beta = 10^{-2}$.

На основании известного критерия Колоколова—Вахитова [15] можно утверждать, что солитоны второго типа являются неустойчивыми — это подтверждается и численными расчетами

Рис. 3. Зависимость числа квантов W от обратного масштаба солитона ($\beta = 10^{-2}$)



турбулентности, в которых (в зависимости от уровня накачки) реализуются крупномасштабные или мелкомасштабные структуры. В слабо диссипативной системе с накачкой энергии в крупные масштабы и диссипацией коротковолновых колебаний возможно образование автоколебательного солитона за счет его периодического перехода из крупномасштабной фазы (где он в среднем набирает энергию) в мелкомасштабную (где энергия передается частицам среды) и обратно. Графически такое поведение солитона отображается на зависимости $\dot{W}(\gamma)$ своеобразным циклом $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$. Можно показать [14], что эффективность поглощения энергии накачки в ансамбле автоколебательных структур выше, чем в системе из обычных ленгмюровских солитонов с той же средней амплитудой поля.

Изложенные выше результаты свидетельствуют о том, что плазменная турбулентность в магнитном поле обладает еще большим разнообразием проявлений, чем аналогичный процесс в изотропной среде. Поскольку универсальной картины сильной турбулентности не существует, большой интерес представляет поиск общих черт в различных физических «реализациях» этого процесса. Рассмотренные в работе эффекты самовоздействия колебаний с аномальной дисперсией, излучения и автоколебаний солитонов получены при исследовании уравнений «модельного» вида и могут без труда переноситься на аналогичные нелинейные явления в других средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е. Коллапс ленгмюровских волн // ЖЭТФ. 1972. Т. 62, № 5. С. 1745—1759.
2. Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. Ленгмюровская турбулентность и диссипация высокочастотной энергии // ЖЭТФ. 1977. Т. 73, № 4. С. 1352—1369.
3. Петвиашвили В. И., Цвелодуб О. Ю. Диссипативный трехмерный ленгмюровский солитон // Физика плазмы. 1980. Т. 6, № 2. С. 467—469.
4. Rowland H. L. Strong turbulence effects on the kinetic beam-plasma instability // Phys. Fluids. 1980. Vol. 23, N 3. P. 508—517.
5. Freund H. P., Haber I., Palmadesso P., Papadopoulos K. Strongly turbulent stabilization of electron beam-plasma interactions // Ibid. P. 518—527.
6. Альтеркоп Б. А., Волокитин А. С., Тараканов В. П. К теории сильной плазменной турбулентности: Препр. ИВТАН СССР № 6—013. М., 1977. 42 с.
7. Десярев Л. М., Сагдеев Р. З., Соловьев Г. И. и др. Одномерная турбулентность ленгмюровских волн // Физика плазмы. 1980. Т. 6, № 3. С. 485—508.

8. *Vozomolov Ya. L., Litvak A. G., Sergeev A. M. et al.* Strong Langmuir turbulence in the external high-frequency field // Proc. XV Intern. conf. phenomena in ionized gases. Minsk, 1981. Pt. 1. P. 211—212.
9. *Литвак А. Г., Фрайман Г. М.* Волноводные каналы в непрозрачной плазме // ЖЭТФ. 1975. Т. 68, № 4. С. 1288—1298.
10. *Литвак А. Г., Сергеев А. М.* Нелинейные эффекты при высокочастотном нагреве плазмы // Высокочастотный нагрев плазмы. Горький: ИПФ АН СССР, 1983. С. 324—370.
11. *Фрайман Г. М.* Асимптотическая устойчивость многообразия автомодельных решений при самофокусировке // ЖЭТФ. 1985. Т. 88, № 1. С. 390—400.
12. *Захаров В. Е., Рубенчик А. М.* Неустойчивость волноводов и солитонов в нелинейных средах // Там же. 1973. Т. 65, № 3. С. 997—1011.
13. *Litvak A. G., Petrova T. A., Sergeev A. M. et al.* Self-interaction of plasma oscillations with anomalous dispersion // 12th Europ. conf. controlled fusion and plasma physics. Budapest, 1985. Pt 2. P. 346—349.
14. *Кольчугина И. А., Литвак А. Г., Сергеев А. М.* Ленгмюровская турбулентность в замагниченной плазме и автоколебательный солитон // Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 35. С. 510—513.
15. *Вахитов Н. Г., Колоколов А. А.* Стационарные решения волнового уравнения в среде с насыщением нелинейности // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16, № 7. С. 1020—1028.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
<i>Гапонов-Грегов А. В., Рабинович М. И.</i> Автоструктуры. Хаотическая динамика ансамблей	7
<i>Кадомец Б. Б.</i> Динамика и информация	45
<i>Веденов А. А., Ежов А. А., Левченко Е. Б.</i> Нелинейные динамические системы с памятью и функции нейронных ансамблей	53
<i>Незлин М. В., Снежкин Е. Н.</i> Нелинейные вихревые структуры и самоорганизация в неустойчивых течениях на вращающейся мелкой воде	67
<i>Горькавый Н. Н., Фридман А. М.</i> Структура планетных колец	86
<i>Суцник М. М.</i> Динамика структур в сдвиговых течениях.	104
<i>Довженко В. А., Должанский Ф. В.</i> Генерация вихрей в сдвиговых течениях. Теория и эксперимент	132
<i>Абрашкин А. А., Якубович Е. И.</i> Двумерные вихри в идеальной жидкости	147
<i>Мигдал А. А.</i> Вихревое уравнение Фоккера—Планка	159
<i>Краснов Ю. К.</i> Эволюция «смерчей»	174
<i>Афраймович В. С.</i> Внутренние бифуркации и кризисы аттракторов	189
<i>Заславский Г. М., Черников А. А.</i> Групповой резонанс, универсальное отображение и стохастическая динамика частиц	213
<i>Курин В. В., Пермитин Г. В.</i> Солитоны и хаос при резонансном взаимодействии волн	227
<i>Кузнецов С. П., Пиковский А. С.</i> Взаимодействие систем со стохастическим поведением	237
<i>Маломед Б. А.</i> Бифуркации и автоволны	251
<i>Давыдов В. А., Михайлов А. С.</i> Спиральные волны в распределенных активных средах	261
<i>Виноградов А. М.</i> Интегрируемость и симметрии	279
<i>Гледзер Е. Б., Обухов А. М.</i> Описание турбулентного каскада в рамках дискретных моделей	291
<i>Рувинский К. Д., Фрейдман Г. И.</i> Тонкая структура сильных гравитационно-капиллярных волн	304
<i>Кобелев Ю. А., Островский Л. А.</i> Коллективная нелинейность и самовоздействие звука в жидкости с пузырьками газа	327
<i>Басович А. Я., Баханов В. В., Таланов В. И.</i> Кинематическая модель трансформации спектров ветрового волнения внутренними волнами	345
<i>Реутов В. П., Рыбушкина Г. В.</i> Генерация звука турбулентностью	359
<i>Гильденбург В. Б., Семенов В. Е.</i> Стационарная структура неравновесного высокочастотного разряда в полях электромагнитных волн	376
<i>Литвак А. Г., Миронов В. А., Сергеев А. М.</i> Пространственные структуры и нелинейная диссипация энергии в сильной плазменной турбулентности	383

УДК [534.2 + 537.86] : 532.59

Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. **Автоструктуры. Хаотическая динамика ансамблей** // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

Обсуждены проблемы, связанные с формированием автоструктур (не зависящих от начальных и граничных условий локализованных образований) в неравновесных диссипативных средах. Исследованы динамика пространственных ансамблей таких структур и возникновение в них сложного и хаотического поведения различной размерности. Рассмотрено пространственное развитие хаоса в моделях потоковых систем — цепочках автоструктур с невязимой связью. Приведены результаты аналогового моделирования процессов возникновения и взаимодействия структур в неравновесных двумерных средах на установке телевизор—камера—обратная связь.

Ил. 24. Библиогр. 43 назв.

УДК 007 : 531/534

Кадоццев Б. Б. **Динамика и информация** // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

Обсуждены различные аспекты сложного поведения динамических систем, похожего на случайное, хаотическое. Затронуты проблемы самоорганизации систем, информационной динамики, появления элементов сознания и свободы воли.

Библиогр. 13 назв.

УДК 577.3 : 51

Веденов А. А., Ежов А. А., Левченко Е. Б. **Нелинейные динамические системы с памятью и функции нейронных ансамблей** // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

Обсуждены коллективные свойства ансамбля нейронов, описываемые с помощью нелинейных уравнений «изображающей» динамической системы с памятью. Некоторые особенности поведения модельной системы интерпретированы как аналогии обучения, распознавания образов, бистабильности восприятия, феномена обращения, забывания, выработки прототипа, т. е. как аналогии известных в психологии функций мозга.

Библиогр. 30 назв.

УДК 551.46 : 534.2

Незлин М. В., Снежкин Е. Н. **Нелинейные вихревые структуры и самоорганизация в неустойчивых течениях на вращающейся мелкой воде** // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

Приведены результаты лабораторных опытов по возбуждению солитонов Рособи и спиральных волн на вращающейся мелкой воде. Выказано предположение, что такие явления природы, как атмосферные и галактические вихри, достаточно хорошо моделируются полученными в опытах нелинейными структурами и имеют общий механизм генерации.

Ил. 12. Библиогр. 41 назв.

УДК 523.4

Горькавый Н. Н., Фридман А. М. **Структура планетных колец** // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

Дан обзор современных представлений о причинах обнаруженной при полетах «Вояджер-1, 2» сложной иерархической структуры планетных колец.

Ил. 5. Табл. 2. Библиогр. 49 назв.

УДК 532.542.4 : 530.182

Суцк М. М. **Динамика структур в сдвиговых течениях** // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

Проанализированы механизмы, приводящие к образованию в турбулентных сдвиговых течениях когерентных структур (КС) с характерными масштабами порядка толщины сдвигового слоя. На основе известных экспериментальных данных и теоретических моделей продемонстрировано, что наличие КС приводит к упорядоченности движений других масштабов, как больших, так и существенно меньших толщины сдвигового слоя. Это с учетом известных результатов о возможности существования конечномерной стохастичности в бесконечномерных системах позволяет представить сдвиговую турбулентность как сложное поведение структур различных масштабов, соответствующее движению динамической системы на конечномерном странном аттракторе. Приведены подтверждающие это предположение данные по экспериментальному определению размерности аттрактора в струях при умеренных числах Рейнольдса $Re \sim 10^3 \div 10^5$.

Ил. 17. Библиогр. 63 назв.

УДК 517.9 : 532.542.4

Довженко В. А., Должанский Ф. В. Генерация вихрей в сдвиговых течениях. Теория и эксперимент // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. — М.: Наука, 1987.

Построена теория течения Колмогорова с учетом придонного трения. Приведены результаты оригинальных экспериментальных исследований подобных течений в лабораторных установках с применением раствора медного купороса и алюминиевой пудры для визуализации возникающих структур.

Ил. 9. Библиогр. 26 назв.

УДК 532.5

Абрашкин А. А., Якубович Е. И. Двумерные вихри в идеальной жидкости // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. — М.: Наука, 1987.

Дан обзор известных точных решений, описывающих динамику распределенных двумерных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости. Изложены два новых подхода к проблеме аналитического исследования плоских вихрей. Первый из них применим для описания стационарных однородно завихренных областей, его основой служит предложенный впервые общий метод сшивки стационарного вихревого и потенциального течений. В качестве приложения данного метода получено аналитическое описание кругового обтекания цилиндра с присоединенным вихрем. Второй подход связан с использованием комплексных лагранжевых координат для изучения плоских вихрей. В рамках этого подхода найден и изучен новый класс вихревых нестационарных движений жидкости, названных птоломеевскими течениями. Изучена динамика одиночного птоломеевского вихря в окружающем потенциальном течении.

Ил. 3. Библиогр. 21 назв.

УДК 517.9 : 532.5.013

Мигдал А. А. Вихревое уравнение Фоккера—Планка // Нелинейные] волны Структуры и бифуркации. — М.: Наука, 1987.

Гидродинамика несжимаемой жидкости как с нулевой, так и с отличной от нуля вязкостью переформулирована как динамика вихревых нитей. В отсутствие вязкости вихревые нити движутся под влиянием суммарного собственного поля скоростей, что приводит к обобщенной гамилтоновой динамике нитей. Вязкость воспроизводится за счет добавления случайной гауссовой силы в уравнения движения нитей. При этом получается обобщенное уравнение Ланжевена в пространстве петель. Для стационарного распределения вероятностей петель получено петлево уравнение Фоккера—Планка.

Ил. 2. Библиогр. 5 назв.

УДК 532.516

Краснов Ю. К. Эволюция «смерчей» // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. — М.: Наука, 1987.

Выделен новый класс решений нестационарных уравнений гидродинамики вязкой жидкости, включающий эффект интенсификации завихренности и описывающий смерчеподобные течения. Исследована задача генерации таких смерчеподобных течений из состояния покоя сплошной среды, и в частности описан процесс формирования сингулярной вихревой нити. Исследована задача разрушения смерчеподобных течений — диффузия завихренности. Проанализирована концепция мелкодисперсной подвижной подложки и связанный с ней новый тип граничных условий. Обсуждены возможные связи полученных решений с атмосферными смерчами и процессом смерчеобразования с явлением износа поверхностей трения при наличии вязкой смазки.

Ил. 3. Библиогр. 18 назв.

УДК 517.9

Афраймович В. С. Внутренние бифуркации и кризисы аттракторов // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. — М.: Наука, 1987.

С единой точки зрения, опирающейся на понятия внутренних бифуркаций и кризисов аттракторов, изложены элементы теории бифуркаций конечномерных динамических систем. Основные результаты проиллюстрированы на конкретных примерах.

Ил. 21. Библиогр. 26 назв.

УДК 530.145

Заславский Г. М., Черников А. А. Групповой резонанс, универсальное отображение и стохастическая динамика частиц // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. — М.: Наука, 1987.

При определенных ограничениях на структуру волнового пакета уравнения движения частицы приведены точно к универсальному отображению независимо от

соотношения между скоростью частицы и групповой скоростью пакета. Это позволило найти область стохастической динамики, кинетическое уравнение и стационарное распределение частей. Описано и исследовано явление группового резонанса между частицами и волновым пакетом.

Ил. 1. Библиогр. 11 назв.

УДК 533.951

Куринов В. В., Пермитин Г. В. **Солитоны и хаос при резонансном взаимодействии волн** // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

Проведено исследование различных переходных и автомодуляционных режимов трехволнового взаимодействия в ограниченных нелинейных средах. Показано, что в отсутствие нелинейных фазовых расстройек волнового резонанса происходит установление стационарного вынужденного рассеяния, причем для переходной стадии процесса характерно образование трехволновых солитонов. Получены точные решения, описывающие столкновения солитонов и их связанные состояния. При больших амплитудах падающей волны, когда роль нелинейных фазовых расстройек велика, реализуются автомодуляционные режимы, которые могут иметь как регулярный, так и стохастический характер.

Ил. 7. Библиогр. 8 назв.

УДК 517.9

Кузнецов С. П., Пиковский А. С. **Взаимодействие систем со стохастическим поведением** // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

Обобщена теория перехода к хаосу в сосредоточенных системах на многомерный случай. Методом ренормализационной группы описано взаимодействие двух подсистем, демонстрирующих переход к хаосу через удвоение периода и перемежаемость. Рассмотрена силовая среда, составленная из таких систем; найдены законы скейлинга пространственно-временных режимов и подобие в пространстве параметров.

Ил. 11. Библиогр. 11 назв.

УДК 537.86 : 530.18

Маломед Б. А. **Бифуркации и автоволны**//Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

Дан обзор новых результатов теории бифуркаций, приводящих к мягкому возбуждению квазигармонических нелинейных волн в математических моделях активных сред. Для коротковолновой аperiodической бифуркации в случае, когда доминирует кубичная нелинейность, а квадратичная входит с малым коэффициентом, изложено общее описание двумерных (валы, ромбы, гексагоны) и трехмерных (кубы, тетраэдры) слабонадритических структур и их устойчивости. Отмечено, что в задачах физики магнитоактивной плазмы встречаются два новых типа длинноволновой колебательной неустойчивости, один из которых может быть сведен к уже известному, а другой приводит к бифуркации нового типа. Для этой бифуркации даны одномерные решения в виде бегущих волн и ведущих центров и приведены условия их устойчивости. Для коротковолновой колебательной бифуркации описаны двумерные решения; указаны критерий устойчивости квазидвумерных волн к поперечным возмущениям; изложены результаты исследования спиральных и концентрических волн, а также трехмерных концентрических волн.

Ил. 1. Библиогр. 27 назв.

УДК 530.18

Давыдов В. А., Михайлов А. С. **Спиральные волны в распределенных активных средах** // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

Дан обзор основных методов расчета характеристик спиральных волн — особого типа автономных автоволновых источников в активных средах. Подробно изложено «кинематическое описание» спиральной волны как установившегося самосогласованного движения одиночного фронта возбуждения со свободным концом. Обсуждены также более общие схемы нахождения частоты вращения, радиуса ядра и других параметров спиральных волн.

Ил. 12. Библиогр. 24 назв.

УДК [536.2 + 533.9] : 517.9

Виноградов А. М. **Интегрируемость и симметрии** // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

Обсуждены математические аспекты исследования физически содержательных систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, в частности вопросы полной интегрируемости и неинтегрируемости уравнений, нахождения интегралов движения и законов сохранения, их связь с симметрией системы. Библиогр. 9 назв.

УДК 532 : 517.4

Гледзер Е. Б., Обухов А. М. Описание турбулентного каскада в рамках дискретных моделей // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

На основе введенного одним из авторов понятия о системах гидродинамического типа предложена дискретная каскадная модель турбулентности. Ее равновесные решения отвечают известному закону Колмогорова—Обухова, описывающему процесс передачи энергии в развитом турбулентном потоке. Проведено асимптотическое исследование поведения системы вблизи стационарных режимов. Показано, что, как правило, каскадная передача энергии (на фиксированных модах поля скорости) является неустойчивой. В связи с этим транспорт энергии по спектру должен осуществляться посредством меняющихся динамических пространственных структур, что соответствует известному явлению перемежаемости турбулентности. Намечен подход к использованию дискретных моделей для феноменологического описания характеристик турбулентных потоков при заданном масштабе сглаживания.

Ил. 3. Библиогр. 24 назв.

УДК 532.59 : 532.516

Рувинский К. Д., Фрейдман Г. И. Тонкая структура сильных гравитационно-капиллярных волн // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

Дан обзор работ, посвященных возникновению мелкомасштабной структуры — капиллярно-гравитационной ряби (КГР) вблизи вершин крутых гравитационно-капиллярных волн (ГКВ). Показано, что последовательное описание генерации ряби крутыми ГКВ удастся провести с помощью предложенного авторами метода. Этот метод основан на приближенном или модельном учете вязкости в граничных условиях для потенциальной составляющей течения, а также на применении найденного интеграла кинематического граничного условия, позволяющего определить форму волны по известным гармоникам потенциала и ее отклонение от линии тока потенциальной части течения из-за нестационарности и вязкости. Использование этого метода позволило получить простые алгоритмы численного решения самосогласованной задачи о генерации КГР квазистационарными и стационарными ГКВ. Полученные таким образом результаты находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными.

Ил. 10. Библиогр. 59 назв.

УДК 534.222.2

Кобелев Ю. А., Островский Л. А. Коллективная нелинейность и самовоздействие звука в жидкости с пузырьками газа // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

Рассмотрен своеобразный класс нелинейных процессов, имеющих место в жидкости с пузырьками газа за счет их осредненного поступательного движения в осциллирующем акустическом поле. Это движение связано с двумя видами сил: радиационным давлением и силами Бьеркнеса, возникающими в результате взаимодействия пульсирующих пузырьков. Исследованы движение пузырька в акустическом пучке и динамика пары пузырьков в звуковом поле. Рассмотрен механизм самовоздействия звуковых волн в газожидкостной смеси, связанный с перераспределением пузырьков в пространстве и изменением их распределения по радиусам вследствие действия указанных выше факторов. Изучены процессы проникновения поля в среду, стационарные волны огибающих, нелинейное «просветление» среды и неустойчивость однородной концентрации пузырьков в звуковом поле.

Ил. 4. Библиогр. 26 назв.

УДК 532.59 : 551.46

Басович А. Я., Баханов В. В., Таланов В. И. Кинематическая модель трансформации спектров ветрового волнения внутренними волнами // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

Рассмотрено воздействие длинных внутренних волн на короткие ветровые волны, обусловленное влиянием течения, создаваемого на поверхности внутренне й волной, на кинематические характеристики поверхностных волн. Обсуждены эффекты, возникающие в случае, когда внутренняя волна представлена ограниченным в пространстве дугом: изменение интенсивности аномалий ветрового волнения вдоль дуга внутренних волн, наличие аномалий вне области дуга, возникновение масштабов изменения спектральной плотности волнения, меньших периода внутренней волны. Проведено сопоставление теоретических результатов с экспериментальными данными.

Ил. 7. Библиогр. 19 назв.

УДК 534.2 : 532.517.4

Реутов В. П., Рыбушкина Г. В. Генерация звука турбулентностью // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

Обсуждена проблема генерации звука сдвиговыми турбулентными течениями при малых числах Маха. Кратко изложен подход к ее решению, основанный на использовании уравнения Лайтхилла. Основное внимание уделено эффектам, связанным с наличием неподвижных жестких границ. Проведен анализ механизмов генерации звука турбулентным пограничным слоем на плоской поверхности и продемонстрирована возможность его обобщения на случай плоской поверхности с акустически компактными выступами. Рассмотрено формирование частотного спектра излучения при наличии одного выступа и шероховатости с хаотически расположенными выступами. Проанализирована роль эффекта сдвиговой рефракции в процессе накопления акустической мощности в пограничном слое при увеличении размеров обтекаемой поверхности.

Ил. 6. Библиогр. 45 назв.

УДК 537.525

Гильденбург В. Б., Семенов В. Е. Стационарная структура неравновесного высокочастотного разряда в полях электромагнитных волн // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

Рассмотрены самосогласованные распределения электромагнитного поля и плазмы в условиях сильной ионизационной нелинейности. Рассчитаны два типа элементарных структур, образующихся в пучностях поперечного (по отношению к градиентам плотности плазмы) электрического поля при локальной и нелокальной зависимостях электронной концентрации от амплитуды поля. На основании полученных результатов построено приближенное аналитическое решение задачи о структуре неравновесного разряда, возникающего в области пересечения двух квазиоптических пучков s -поляризованных волн. Найденные таким образом общая картина разряда и его структурные элементы достаточно хорошо согласуются с результатами численного расчета и эксперимента.

Ил. 3. Библиогр. 9 назв.

УДК 533.951

Литвак А. Г., Миронов В. А., Сергеев А. М. Пространственные структуры и нелинейная диссипация энергии в сильной плазменной турбулентности // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.— М.: Наука, 1987.

Дан обзор современного состояния сильной ленгмюровской турбулентности. Наряду с традиционным представлением о турбулентности как наборе коллапсирующих наверху рассмотрены главным образом в слабо замагниченной плазме и другие процессы: возникновение диссипативных структур, автоколебательный режим турбулентности, последовательное дробление пространственной структуры. Исследованы особенности диссипации сильной ленгмюровской турбулентности в магнитном поле, связанной с излучением электромагнитных волн.

Ил. 3. Библиогр. 15 назв.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

Структуры и бифуркации

Утверждено к печати
Институтом прикладной физики
АН СССР

Редакторы издательства Л. Е. Кононенко, Т. С. Смирнова
Художник А. Г. Кобрин
Художественный редактор С. А. Литвак
Технические редакторы В. Д. Прилепская, И. В. Бочарова
Корректоры Н. И. Казарина, И. А. Талалай

ИБ № 35626

Сдано в набор 29.09.86. Подписано к печати 04.02.87
Т-05816. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 1
Гарнитура обыкновенная новая. Печать высокая
Усл. печ. л. 25,0. Усл. кр. отт. 25,0. Уч.-изд. л. 27,4.
Тираж 2100 экз. Тип. зак. 3125. Цена 4 р. 40 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6



Издательство «Наука»

**Готовится к печати
книга:**

**ПОЛЯРИЗАЦИОННОЕ ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ
АТОМОВ И ЧАСТИЦ**

20 л. 3 р. 50 к.

В коллективной монографии впервые дано систематическое изложение теории тормозного излучения, возникающего при рассеянии нерелятивистских и релятивистских заряженных частиц на атомах, ионах и атомных ядрах в плазме. Особое внимание уделено поляризационным эффектам, учет которых приводит к новым результатам. Рассмотрены возможные приложения процессов поляризационного тормозного излучения, например лазерный пробой в газах и бомбардировка различных мишеней электронами, ионами, ядрами.

Книга предназначена для научных работников, занимающихся квантовой электродинамикой, спектроскопией, ядерной физикой, физикой плазмы и плазменной астрофизикой.

Книги можно предварительно заказать в магазинах «Академкнига». Для получения книг почтой заказы просим направлять по одному из перечисленных адресов:

117192 Москва, Мичуринский проспект, 12, магазин «Книга — почтой» Центральной конторы «Академкнига»;
197345 Ленинград, Петрозаводская ул., 7, магазин «Книга — почтой» Северо-Западной конторы «Академ-

книга»;
252030 Киев, ул. Пирогова, 4, магазин «Книга — почтой» Украинской конторы «Академкнига» или в ближайший магазин «Академкнига».