

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ



ИЗДАНИЕ ПЕРВОЕ

МОСКВА, 1988

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
МОСКВА 1979



В сборник включены обзорные и оригинальные статьи, написанные по материалам лекций, прочитанных на Всесоюзной школе по нелинейным волнам (Горький, 1977 г.). В работах обсуждаются разнообразные аспекты теории нелинейных волн, приводятся результаты экспериментальных и численных исследований волновых процессов различной физической природы. Особое внимание уделено исследованию солитоноподобных волн, проблеме турбулентности, волнам в океане.

Сборник предназначен для специалистов, занимающихся исследованием нелинейных волновых процессов, а также аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Ответственный редактор  
академик  
А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ

### Нелинейные волны

Утверждено к печати Институтом прикладной физики АН СССР

Редактор *Л. Е. Кононенко*. Художник *Ю. А. Ноздрин*.

Художественный редактор *Т. П. Поленова*. Технический редактор *Р. М. Денисова*.

Корректоры *Л. В. Лукичева*, *Р. П. Шаблеева*

ИБ № 16300

Сдано в набор 22.07.78. Подписано к печати 21.12.78. Т-17574. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Бумага типографская № 1. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая.

Усл. печ. л. 22,5. Уч.-изд. л. 24,2. Тираж 2000 экз. Тип. зак. 788. Цена 4 руб.

Издательство «Наука» 117485, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 94а

2-я типография издательства «Наука» 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник составлен из обзорных и оригинальных статей, написанных по материалам лекций Четвертой Всесоюзной школы по нелинейным волнам (Горький, март 1977 г.) Первая такая школа состоялась в марте 1972 г., предыдущая, Третья, — в марте 1975 г., следующая будет в 1979 г. Тематика этих традиционных школ была довольно разнообразной и определялась как объективными обстоятельствами — стремлением познакомить слушателей с основами теории нелинейных волн, уже сложившимися методами и т. д., так и субъективными — в программы включались лекции по проблемам, которые казались организаторам школы наиболее «горячими» на сегодняшний день. Правда, если оглянуться назад, я с удовольствием могу заметить, что почти все выделенные «сегодняшние» проблемы весьма успешно развивались и не оказались заманчивыми, но тупиковыми ходами в лабиринте науки.

Хотя теория нелинейных волн начиналась с задач газо- и гидродинамики, точнее с исследования волн на поверхности воды (наблюдение уединенных волн в канале относится к 1847 г., уравнение Кортевега—де Вриза было получено в 1895 г.), формирование этой теории как самостоятельного раздела науки было связано в основном с задачами радиофизики, нелинейной оптики и нелинейной акустики. Затем центр тяжести нелинейных волновых задач переместился в физику плазмы; все больше нелинейных проблем возникало в биофизике, физике атмосферы и океана.

Примерно по тому же пути, в ногу с развитием интересов теории нелинейных волн и ее приложений, шли и горьковские школы. Причем если на Первой школе была оправдана постановка широких общих курсов, таких, например, как «Нелинейная акустика» или «Теоретические вопросы нелинейной оптики», то теперь, когда основные методы и результаты теории нелинейных волн, накопленные за последние 15—20 лет, вошли в университетские курсы и стали общедоступными, содержание лекций и их цели несколько изменились. Уровень развития теории нелинейных волн очень поднялся, потребности же в использовании подходов и методов этого «универсального языка физики» стали столь высоки и очевидны, что его уже не нужно пропагандировать. Отпала необходимость каждый раз излагать эту теорию с азов, поэтому на последних школах наибольшее внимание уделяется лекциям, знакомящим слушателей с самыми новыми и важными достижениями теории либо освещающим завоевание теорией нелинейных волновой, зачастую неожиданной области, например астрофизики.

Теория нелинейных волн сегодня, когда все в каком-то смысле лежавшее на поверхности уже сделано, особенно удивляет двумя аспектами. Первый — это то, что время от времени появляются удивительные точные решения сложных нелинейных уравнений в частных производных, описывающих распространение волн, например нелинейное уравнение Шредингера или знаменитое уравнение КДВ. Именно этим проблемам посвящена большая часть статей, объединенных в первой части сборника под рубрикой «Солитоны». Другой замечательной стороной сегодняшней теории является ситуация, по существу обратная первой, — открытие чрезвычайно сложного поведения в очень простых колебательных системах, например в ставшей уже популярной системе Лоренца. Наиболее впечатляющим здесь является недавнее открытие «странного аттрактора» и существенное продвижение в понимании механизмов турбулентности или по крайней мере тех ее видов, которые допускают конечномерное описание. Здесь уместно напомнить, что проблема стохастичности динамических систем представлялась «горячей» еще при составлении программы Первой школы, на которой был прочитан курс «Стохастические волновые процессы». Например, уже тогда обсуждалась возможность обнаружения в конкретных физических системах «гомоклинической ситуации» и связанного с ней бесчисленного множества различных периодических движений. «Высокая температура» в этой области теории нелинейных волн ощущалась и на следующих школах, на последней же произошел «взрыв». Успех в этой области, как мне кажется, связан, с одной стороны, с обнаружением многих важных и в то же время элементарных физических систем, демонстрирующих стохастическое поведение, с другой — с тем, что «подогреть» наличием примеров и важностью задачи математики существенно продвинулись в понимании механизмов возникновения хаоса и статистического описания динамических систем.

Вообще на данной школе проблемам турбулентности (акустической, гидродинамической, плазменной и т. д.) было уделено очень много внимания, что сказалось на содержании данного сборника, где раздел «Турбулентность» самый обширный.

В программе школы отразилось и резкое повышение интереса к задачам теории нелинейных волн, связанным с использованием Мирового океана. Это одно из тех направлений, которые будут интенсивно развиваться в ближайшие годы. Здесь много волнующих проблем, например существование устойчивых течений в океане или недавно открытых крупномасштабных вихрей. Вообще неоднородный вращающийся океан представляется очень благодарной областью приложения теории нелинейных волн. Этой части программы посвящен последний раздел сборника «Океан».

В заключение я хочу выразить свою признательность авторам за представление материалов в этот сборник и свою уверенность в том, что они примут участие в работе следующей, Пятой, школы по нелинейным волнам.

*А. В. Гапонов-Грехов*



## НЕОДНОМЕРНЫЕ СОЛИТОНЫ

В. И. ПЕТВИАШВИЛИ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В теории сильнонелинейных волн солитоны намного лучше других понятий поддаются аналитическому рассмотрению. Кроме того, с их помощью можно объяснить ряд важных наблюдаемых эффектов. Классифицировать солитоны можно по-разному: солитоны могут возникать в диссипативной среде (например, на вязкой стекающей пленке жидкости, в полупроводниках с немонотонной вольт-амперной характеристикой) и в средах без диссипации. В зависимости от того, происходят в солитонах стационарные осцилляции или нет, их можно разделить на осциллирующие и постоянные. Для постоянных солитонов существует система отсчета, в которой параметры солитона не зависят от времени.

Солитоны могут быть одномерными, двумерными и трехмерными. В настоящее время имеется большое число исследований одномерных солитонов с развитым и сложным математическим аппаратом. Изучение неодномерных солитонов задерживалось из-за трудности доказательства их устойчивости или даже существования. Однако в последнее время, частично в связи с экспериментальными наблюдениями эффектов неодномерных солитонов, в этой области был получен ряд новых результатов, часть которых излагается далее.

В настоящей статье мы рассмотрим трехмерный солитон, представляющий собой релаксационную волну на пленке стекающей вязкой жидкости, разберем переход от уравнений звуковых волн с дисперсией к слабонеоднородному уравнению Кортевега—де Вриза (КДВ) и численный метод нахождения существенно неодномерных солитонных решений. Кроме того, на примере нелинейного уравнения Шредингера сформулируем энергетический принцип для исследования устойчивости одномерных и неодномерных решений нелинейных уравнений в виде периодических волн и солитонов.

## 2. ПОДКОВООБРАЗНЫЕ СОЛИТОНЫ НА СТЕКАЮЩЕЙ ВЯЗКОЙ ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ

Приведем наглядный пример существования солитонов, которые изучались В. И. Петвиашвили и О. Ю. Цвеледубом [1]. Часто приходится наблюдать, как при течении жидкости со свободной поверхностью на ней образуются волны. Появление волн можно понять с точки зрения неустойчивости ламинарного течения слоя жидкости по наклонной плоскости. Эта неустойчивость в линейном приближении для малых чисел Рейнольдса была найдена в работах [2, 3], а для больших — в [4]. В [5, 6] для первого случая методом теории возмущений было получено следующее упрощенное уравнение, учитывающее влияние нелинейности и неоднородности на раскачку волн.

Пусть наклонная плоскость совпадает с координатной плоскостью  $y = 0$ , толщина невозмущенной пленки равна  $h_0$ , а невозмущенная скорость жидкости направлена вдоль оси  $x$  и имеет вид

$$V = V_0[2y/h_0 - (y/h_0)^2], \quad V_0 \equiv h_0^2 g \sin\beta / 2\nu, \quad (1)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\nu$  — коэффициент вязкости;  $\beta$  — угол наклона плоскости течения. Тогда в системе отсчета, движущейся относительно дна с удвоенной скоростью поверхности  $2V_0$ , уравнение вязкой пленки имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_0} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{4}{h_0} h \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{8}{15} \operatorname{Re} h_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{2}{3} h_0 \operatorname{ctg} \beta \Delta h + \\ + \frac{2}{3} h_0^2 W \Delta^2 h = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где  $h$  — отклонение толщины пленки от невозмущенного значения  $h_0$ ;  $\operatorname{Re} \equiv V_0 h_0 / \nu$ ;  $W \equiv \sigma / \rho h_0^2 g \sin\beta$ ;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения. Уравнение (2) получено в предположении малости  $\alpha$  — отношения  $h_0$  к характерному размеру возмущения:  $\alpha \operatorname{Re} \ll 1$  и  $h/h_0 \ll 1$ . Из третьего члена уравнения (2) видно, что неустойчивость наступает при

$$\operatorname{Re} > 5/4 \operatorname{ctg} \beta.$$

Несмотря на простой вид, решить (2) в общем виде не удастся. Известны численные решения этого уравнения в виде одномерных стационарных периодических волн [5]. Однако они неустойчивы; на эксперименте можно видеть, что после нескольких периодов они распадаются на подковообразные уединенные волны. Покажем далее, что уравнение (2) описывает такие образования.

Ищем решение уравнения (2) в виде стационарной двумерной волны

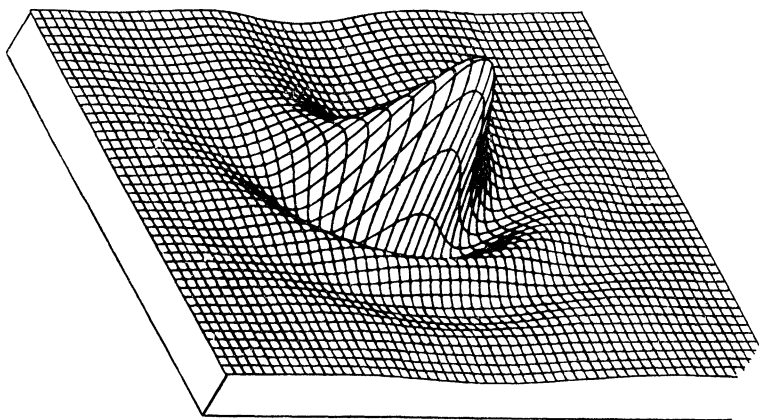
$$\begin{aligned} h = Ah_0 H(\xi, \zeta), \quad \xi = \kappa(x - ut), \quad \zeta = \kappa z, \\ \kappa \equiv [(4/5) \operatorname{Re} - \operatorname{ctg} \beta] / W^{1/2} h_0^{-1}, \quad A \equiv (2/3) (\kappa h_0)^3 W \ll 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получаем

$$-c \frac{\partial H}{\partial \xi} + 4H \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} - n \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta^2} + \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right)^2 H = 0, \quad (4)$$

$$c \equiv \frac{u}{V_0 A}, \quad n \equiv \frac{2}{3} \frac{\kappa h_0}{A} \operatorname{ctg} \beta.$$

Для вертикального стекания  $n = 0$ . Ищем решения уравнения (4) в виде двумерной уединенной волны, т. е. со следующими граничными условиями: функция  $H$  и ее производные стремятся к нулю при бесконечном удалении от начала координат.



Численное решение (4) затруднено из-за нелинейности, высокого порядка производных и однородных граничных условий. Представим  $H$  в виде интеграла Фурье

$$H = \iint_{-\infty}^{\infty} B_{p,q} \exp [i(p\xi + q\zeta)] dp dq. \quad (5)$$

Тогда преобразованием Фурье уравнение (4) приводится к нелинейному интегральному уравнению относительно  $B_{p,q}$ . Решение этого уравнения обычным методом итераций невозможно из-за сильной счетной неустойчивости. Используя метод подавления этой неустойчивости стабилизирующим множителем, описанным в разделе 3, находим спектр  $B_{p,q}$  в интеграле (5). Когда  $n = 0$ , оказывается, что решение имеет место только при  $c = c_0 = 0,62 \pm \pm 0,02$ . Это означает, что  $c_0$  — собственное число уравнения (4) при однородных граничных условиях на бесконечности. Зная  $B$ , с помощью (5) находим  $H$ .

На рисунке дается полученный в результате расчета рельеф функции  $H$  при  $n = 0$ . Между экспериментальными и расчетными картинками поверхностей имеется близкое сходство. Особенно



интересно, что в расчетах передний фронт волны получается осциллирующим, как в эксперименте.

Полученные соотношения имеют простой физический смысл: неустойчивость, вызванная преобладанием силы тяжести над вязкостью, при искривлении поверхности (третий член уравнения (2)) приводит к нарастанию амплитуды отклонения от равновесия. Нелинейный (второй) член в (2) стремится сделать это отклонение разрывообразным (перекачка энергии в коротковолновую область). Последний вязкий член поглощает энергию, поступающую в область коротких волн, так что вся энергия, попадающая в солитон из-за неустойчивости, превращается в тепло. Видно, что такое динамическое равновесие устойчиво только относительно возмущений, локализованных внутри солитона. Разрушение солитона происходит из-за столкновений с другими солитонами. Если бы амплитуда из-за большого инкремента получалась не малой, то нелинейные члены высших степеней, не учтенные в (2), пересилили бы стабилизирующее влияние вязкости и волна бы опрокидывалась, что и наблюдается на поверхности сильно неустойчивого течения.

### 3. СЛАБОНЕОДНОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ КДВ. МЕТОД РЕШЕНИЯ НА ЭВМ

Рассмотрим ветвь потенциальных акустических колебаний. Уравнение этой ветви содержит два характерных параметра: длину дисперсии  $D$  и коэффициент вязкости. Ограничимся рассмотрением изотропной среды, в которой вязкостью можно пренебречь, и таких возмущений, характерный размер которых много больше  $D$ , а амплитуда скорости много меньше скорости звука. Тогда уравнение акустических колебаний имеет вид

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mu = -\alpha \Delta \Delta \mu - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \mu)^2. \quad (6)$$

Здесь  $\mu$  может быть, например, потенциалом скорости,  $c$  — скорость звука в среде, постоянная дисперсии  $\alpha \sim D^2 c^2$  может быть как положительной, так и отрицательной. В зависимости от знака  $\alpha$  дисперсию называем положительной или отрицательной.

Правая часть (6), учитывающая дисперсию и нелинейность, считается малой. Пользуясь этим, уравнение (6) можно упростить еще больше, сохранив при этом основные свойства. Если плотность энергии мала, то колебания в среде можно представить как набор отдельных пакетов, слабо взаимодействующих друг с другом, бегущих со скоростями, близкими к  $c$ . Из гидродинамики известно, что под влиянием нелинейности пакет становится круче в направлении движения, так что в большинстве случаев размер пакета по направлению движения много меньше поперечного размера. Тогда, если ограничиться рассмотрением отдельного такого пакета, можно положить

$$\mu \approx \mu(z - ct, r_{\perp}, t), \quad (7)$$

где ось  $z$  выбрана в направлении распространения волнового пакета, зависимость от двух последних аргументов в пакете считается слабой, производные по этим аргументам считаются малыми (порядка нелинейности и дисперсии).

Подставляя (7) в (6), получим

$$2c \frac{\partial^2 \mu}{\partial z \partial t} + c^2 \Delta_{\perp} \mu = \alpha \frac{\partial^4 \mu}{\partial z^4} - c \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2. \quad (8)$$

Здесь оставлены члены только первого порядка малости, а малые более высокого порядка, такие, как  $\partial^2 \mu / \partial t^2$ ,  $\alpha \Delta_{\perp} \mu$ , отброшены.

Уравнение (8) сохраняет следующие интегралы движения:

$$I_1 = \int \left( \frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 dr; \quad (9)$$

$$I_2 = \int \left[ \frac{\alpha}{4c} \left( \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{c}{4} (\nabla_{\perp} \mu)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^3 \right] dr. \quad (10)$$

Сохранение (10) особенно хорошо видно, если уравнение (8) записать в вариационной форме

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \mu = \frac{\delta I_2}{\delta \mu}. \quad (11)$$

В работе [7] уравнение КДВ было обобщено на слабонелинейный случай и приведено к виду

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\alpha}{2c} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right) = -\frac{c}{2} \Delta_{\perp} u, \quad (12)$$

совпадающему с (8), если положить

$$u = \partial \mu / \partial z. \quad (13)$$

На примере (12) в [7] была исследована связь между устойчивостью решения в виде одномерного солитона и знаком дисперсии. Уравнение (12) имеет решение в виде одномерного солитона, бегущего со скоростью  $-\alpha k_0^2 / 2c$ :

$$u = u_0 \equiv -\frac{3\alpha k_0^2}{2c} \operatorname{ch}^{-2} \left[ \frac{k_0}{2} \left( z + \frac{\alpha k_0^2}{2c} t \right) \right], \quad (14)$$

где  $k_0^{-1}$  — характерная ширина солитона;  $|\alpha| k_0^2 \ll c^2$  (условие применимости (6), (8), (12)).

Поскольку (12) описывает волну в системе отсчета, движущейся вдоль  $z$  со скоростью  $c$ , то (14) показывает, что при положительной дисперсии ( $\alpha > 0$ ) солитон имеет отрицательную амплитуду и движется с дозвуковой скоростью. В случае отрицательной дисперсии солитон имеет положительную амплитуду и движется со сверхзвуковой скоростью. Фазовая скорость вдоль  $z$  бесконечно малых возмущений с волновым вектором  $k$  согласно уравнению (12) равна  $\frac{c}{2} (k_{\perp} k_z)^2 + \frac{\alpha}{2c} k_z^2$ .

Таким образом, в среде с положительной дисперсией скорость бесконечно малых возмущений всегда больше скорости солитона. В случае же среды с отрицательной дисперсией существуют такие бесконечно малые возмущения, фазовая скорость которых вдоль  $z$  равна скорости солитона. Это отличие должно определять устойчивость одномерного солитона. Действительно, как было показано в [7] и затем с помощью метода обратной задачи рассеяния в [8], решение в виде одномерного солитона устойчиво в среде с отрицательной дисперсией и неустойчиво в среде с положительной дисперсией.

Методом обратной задачи рассеяния удается рассмотреть не все виды двумерных возмущений [9]. В работе [10] численно было показано, что в случае положительной дисперсии уравнения (8), (9) имеют решение в виде неодномерного солитона. Приведем метод получения такого решения в трехмерном случае. Ищем решение (9) при  $\alpha > 0$  в виде гладкой осесимметричной стационарной волны, бегущей со скоростью  $-c_1$

$$u = -2c_1 f(\zeta, \rho) \quad (0 < c_1 \ll c); \quad (15)$$

$$\zeta = \sqrt{2cc_1/\alpha} (z + c_1 t), \quad \rho = 2c_1 r_{\perp} / \sqrt{\alpha}. \quad (16)$$

Тогда из (12)–(16) получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{\partial^4 f}{\partial \zeta^4} = \frac{\partial^2 f^2}{\partial \zeta^2}. \quad (17)$$

Предположим, (17) имеет такое решение, что интеграл  $\int f^2 \rho d\rho d\zeta$  существует. Представим  $f$  в виде интеграла Фурье—Бесселя

$$f = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(p, q) \cos(q\zeta) J_0(p\rho) p dp dq; \quad (18)$$

$$F = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\zeta, \rho) \cos(q\zeta) J_0(p\rho) \rho d\rho d\zeta. \quad (19)$$

Здесь  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка, интегралы здесь и в дальнейшем берутся в пределах от 0 до  $\infty$ . Тогда, преобразуя (17) по Фурье, получим

$$F = GN, \quad G \equiv q^2/(q^2 + p^2 + q^4). \quad (20)$$

Здесь  $N$  — фурье-образ нелинейного члена

$$N_{p, q} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f^2 \cos(q\zeta) J_0(p\rho) \rho d\rho d\zeta. \quad (21)$$

Таким образом, (17) приводится к нелинейному интегральному уравнению (20).

Решить (20) обычным методом итерирования невозможно: из-за сильной счетной неустойчивости получается расходящийся ряд. Эту неустойчивость можно подавить следующим приемом: введем



ПОСТОЯННЫЕ

$$s_1 = \iint F^2 p dp dq, \quad (22)$$

$$s_2 = \iint FGN p dp dq. \quad (23)$$

Ясно, что если  $F$  удовлетворяет (20), то  $s_1 = s_2$ . Будем решать вместо (20) следующее интегральное уравнение:

$$F = (s_1/s_2)^\gamma GN \quad (1 < \gamma < 3). \quad (24)$$

Главное качественное отличие состоит в том, что степень однородности правой части уравнения (20) равна 2, а уравнения (24)— $(2 - \gamma)$ . Применяв процесс итерации к системе (18), (21)—(24), получаем быстро сходящийся ряд, причем одновременно получаем  $s_1 \rightarrow s_2$ . Это означает, что понижением степени неоднородности путем введения стабилизирующего множителя  $(s_1/s_2)^\gamma$  мы подавляем неустойчивость. Опытным путем можно удостовериться, что быстрейшая сходимостъ получается при величине  $\gamma$ , равной или близкой к 2, когда степень неоднородности становится равной 0. При  $\gamma \leq 1$  или  $\gamma \geq 3$  неустойчивость не подавляется. Из (20) видим, что в окрестностях начала координат  $F$  имеет конечную особенность вида  $p^2/(p^2 + q^2)$ . Это приводит к тому, что, как это видно из (17),  $f$  спадает на бесконечности не экспоненциально, а степенным образом  $f \sim r^{-n}$ , где  $r$  — расстояние до центра,  $n$  — размерность пространства.

Итерация проводится следующим образом: задаемся начальной пробной функцией  $F$ , затем по формуле (18) находим  $f$ , после чего по формулам (21)—(23) последовательно находим  $N$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ . Подставляя эти выражения в (24), получаем исправленное значение  $F$ , которое снова подставляем в (18), и т. д. Сходимость процесса итерации слабо зависит от начальной пробной функции.

Недавно в работе [17] было найдено точное аналитическое выражение двумерного солитонного решения уравнения (12).

Если обезразмеренное уравнение двумерного солитона записать в виде

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial \zeta^4} = \frac{1}{12} \frac{\partial^3}{\partial \zeta^2} f^2, \quad (25)$$

то, согласно [17], решение (25) примет вид

$$f = 8 \frac{1 + 4\eta^2 - 4\zeta^2}{(1 + 4\eta^2 + 4\zeta^2)^2}. \quad (26)$$

Численное решение (25) методом стабилизирующего множителя, приведенное в [10], хорошо согласуется с (26).

#### 4. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), по-видимому, важнейшее из нелинейных уравнений по имеющимся приложениям как в теории волн в плазме, так и в других областях фи-

зики. Особенно интересно применение уравнений типа НУШ в теории элементарных частиц для создания замкнутой теории поля.

НУШ получается из нелинейного уравнения Клейна — Гордона в предположении малости отношения кинетической энергии к энергии покоя и малости плотности числа частиц. Приведем пример нелинейного уравнения Клейна—Гордона:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi + \varphi + M[\varphi] = 0, \quad |M| \ll |\varphi|. \quad (27)$$

Здесь  $M$  — действительный функционал, учитывающий поправки к массе покоя (принятой здесь равной единице). Эти поправки пропорциональны высшим степеням  $\varphi$  и оператора импульса  $i\nabla$ . Внешние поля для простоты считаем отсутствующими. Основное отличие уравнения (27) от уравнения звуковых волн (6) заключается в наличии третьего члена, учитывающего влияние «массы покоя».

Уравнение (27) содержит единственный интеграл движения, имеющий смысл полной энергии:

$$\dot{H} = \frac{1}{2} \int \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + |\nabla \varphi|^2 + \varphi^2 \right] d\mathbf{r} + H_M, \quad (28)$$

где  $H_M$  — часть энергии, связанная с  $M$ .

Если  $|\Delta \varphi| \ll \varphi$  (нерелятивистские колебания), решение (27) можно представить в виде осцилляций с единичной частотой, амплитуда которых слабо зависит от времени и координат:

$$\varphi = \frac{1}{2} [\psi(\mathbf{r}, t)e^{-it} + \psi^*(\mathbf{r}, t)e^{it}]. \quad (29)$$

Проведя разложение по степеням  $\psi$  и кинетической энергии, получаем нелинейное уравнение Шредингера с точностью до численных коэффициентов

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi + |\psi|^2 \psi + M_{SH} \psi = 0. \quad (30)$$

Здесь оператор  $M_{SH}$  учитывает члены разложения более высокой степени малости.

Уравнение (30) при довольно общих предположениях относительно  $M$  сохраняет два интеграла: число частиц

$$N = \int |\psi|^2 d\mathbf{r} + N_M \quad (31)$$

и энергию

$$H = \int [|\nabla \psi|^2 - \frac{1}{2} |\psi|^4] d\mathbf{r} + H_M. \quad (32)$$

Здесь  $N_M$ ,  $H_M$  — части, соответствующие последнему члену в (30). Мы видим, что в «нерелятивистском» случае интеграл (28) распадается на два независимых интеграла движения (31) и (32).

Как (27), так и (30) имеют решение в виде трехмерных солитонов и трехмерных периодических волн. Изучение устойчивости

таких решений выявляет ряд общих свойств, присущих аналогичным решениям других уравнений.

В работе [11] было показано, что характерное время жизни солитона, описываемого уравнением Шредингера (30) при  $M = 0$ , обратно пропорционально амплитуде солитона в квадрате.

Нахождение собственной частоты колебаний методом [11], особенно в случае отсутствия сферической симметрии,— сложная задача. Для исследования устойчивости солитонов, а также неоднородных периодических волн воспользуемся более простой процедурой — энергетическим принципом, т. е. будем искать, осуществляет ли исследуемое решение минимум энергии в своих окрестностях в пространстве функции. Такой принцип применялся в [12] для исследования устойчивости магнитогидродинамического равновесия, в [13] — для исследования устойчивости ионно-звукового солитона и в других работах.

Проиллюстрируем применение энергетического принципа (вариационного метода исследования устойчивости) на примере нелинейного уравнения Шредингера вида

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi + |\psi|^\beta \psi = 0; \quad (33)$$

$$N = \int |\psi|^2 dr; \quad (34)$$

$$H = \int \left[ |\nabla \psi|^2 - \frac{2}{2+\beta} |\psi|^{2+\beta} \right] dr. \quad (35)$$

С помощью этого примера сравнительно нетрудно осуществить применение такой процедуры к солитонным решениям других уравнений.

Периодическое решение уравнения (33) в общем случае имеет вид

$$\psi = \psi_0 (r - 2kt)\sigma, \quad \sigma \equiv \exp \{i [(A^2 - k^2)t + kr]\}, \quad (36)$$

где амплитуда  $\psi_0$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \psi_0 = A^2 \psi_0 - \psi_0^{\beta+1}. \quad (37)$$

Решение (36) в координатном пространстве модулировано по амплитуде и по фазе. Амплитуды модуляции пропорциональны  $A^{2/\beta}$ .

Рассмотрим солитонное решение (33), т. е. в качестве граничных условий потребуем, чтобы в сферической системе координат  $\psi_0$  была конечна и стремилась к нулю при  $r \rightarrow \infty$ .

Решение (36) считается устойчивым, если любое другое решение уравнения (33), мало отличающееся от (36) в какой-либо момент времени, сохраняет эту близость за все последующее время.

На языке математики солитонное решение (36) осуществляет экстремум  $H$  при условии постоянства  $N$ . Это решение устойчиво, если вторая вариация  $H$  при постоянном  $N$  положительна. Легко проверить, что вторая вариация функционала (35) при условии



постоянства (34) имеет вид

$$\delta^2 H = \int (\varphi_1 \hat{L}_1 \varphi_1 + \varphi_2 \hat{L}_0 \varphi_2) d\mathbf{r}. \quad (38)$$

Здесь вариация  $\psi$  берется в виде

$$\begin{aligned} \psi &= (\psi_0 + \delta\psi)\sigma; \\ \delta\psi &= \varphi_1(\mathbf{r} - 2\mathbf{k}t, t) + i\varphi_2(\mathbf{r} - 2\mathbf{k}t, t), \end{aligned} \quad (39)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  — действительные функции;  $\hat{L}_1, \hat{L}_0$  — операторы:

$$\hat{L}_1 = -\Delta - (1 + \beta)\psi_0^\beta + A^2; \quad (40)$$

$$\hat{L}_0 = -\Delta - \psi_0^\beta + A^2. \quad (41)$$

Из (37) получаем уравнения

$$\hat{L}_0 \psi_0 = 0; \quad \hat{L}_1 \nabla \psi_0 = 0; \quad \hat{L}_1 \partial \psi_0 / \partial A = -2A \psi_0. \quad (42)$$

Условие постоянства  $N$  запишется в виде

$$N = \int \psi_0^2 d\mathbf{r} = \int |\psi_0 + \delta\psi|^2 d\mathbf{r}. \quad (43)$$

В пределах приближения, используемого для получения (38), условие (43) сводится к равенству

$$\int \psi_0 \varphi_1 d\mathbf{r} = 0. \quad (44)$$

Легко проверить, что оператор  $\hat{L}_0$  из (41), (42) имеет только неотрицательные собственные значения, чего нельзя сказать об операторе  $\hat{L}_1$  [10]. Поэтому из (38) имеем

$$\delta^2 H \geq \int \varphi_1 \hat{L}_1 \varphi_1 d\mathbf{r}. \quad (45)$$

Оператор  $\hat{L}_1$  имеет полную систему собственных значений  $E$  и собственных функций  $\chi_E$ , удовлетворяющих уравнению

$$\hat{L}_1 \chi_E = E \chi_E. \quad (46)$$

Разложим  $\psi_0$  и  $\varphi_1$  в ряд по собственным функциям оператора  $\hat{L}_1$ :

$$\psi_0 = \sum_E \psi_E \chi_E; \quad \varphi_1 = \sum_E \varphi_E \chi_E. \quad (47)$$

Тогда вместо (44), (45) имеем

$$\delta^2 H \geq \sum_E E |\varphi_E|^2; \quad (48)$$

$$\sum_E \varphi_E \psi_E = 0. \quad (49)$$

Согласно (42)  $\nabla \psi_0$  — собственная функция  $\hat{L}_1$  с нулевым собственным значением  $E = E_1 = 0$ , причем это состояние вырождено и имеет узлы в центре потенциальной ямы. Поэтому  $\hat{L}_1$  должен иметь собственную функцию с меньшим, т. е. отрицательным собственным значением  $E = E_0 < 0$ . Расчет на ЭВМ

[11], а также простым рассмотрением можно показать, что это состояние с отрицательной энергией единственное. Из (48) ввиду наличия отрицательного уровня следует, что  $\delta^2 H$  не может быть всегда положительной без дополнительного условия (49). Подставим  $\varphi_{E_0}$  из (49) в (48). Получим

$$\delta^2 H \geq \Sigma' E |\varphi_E|^2 + \frac{E_0}{|\varphi_{E_0}|^2} (\Sigma' \varphi_E \psi_E)^2. \quad (50)$$

Здесь  $E_0 < 0$  — основное собственное значение оператора  $\hat{L}_1$ ;  $\varphi_{E_0}$ ,  $\psi_{E_0}$  — коэффициенты, отвечающие этому состоянию в суммах (47). Заметим, что ввиду ортогональности  $\psi_0$  к  $\nabla\psi_0$  — собственной функции состояния с  $E = E_1 = 0$  — имеем  $\psi_E|_{E=0} = 0$ , и суммирование  $\Sigma'$  в (50) охватывает только состояния с собственными значениями  $E$  больше нуля.

С помощью неравенства Гельдера получаем

$$[\Sigma' (\varphi_E \psi_E)]^2 \leq \Sigma' (E |\varphi_E|^2) \Sigma' (|\psi_E|^2/E) \quad (E > 0). \quad (51)$$

Тогда (50) и (51) дают

$$\delta^2 H \geq -c \Sigma'' (|\psi_E|^2/E), \quad (52)$$

где  $c$  — положительная величина;  $\Sigma''$  обозначает суммирование по всем собственным значениям, кроме  $E = 0$ . Используя последнее из уравнений (42) и разложение (47), вместо (52) получаем

$$\delta^2 H \geq \frac{c}{2A} \int \psi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial A} d\mathbf{r} = \frac{c}{4A} \frac{\partial N}{\partial A}. \quad (53)$$

Зависимость  $\psi_0$  от  $A$  определяется уравнением (37), откуда следует  $N \sim A^{(4-3\beta)/\beta}$ . Мы видим, что правая часть (53) отрицательна при  $\beta > 4/3$ . Это значит, что при малой степени нелинейности солитон устойчив, а при  $\beta > 4/3$ , возможно, неустойчив. В случае устойчивости энергия солитона (35) оказывается отрицательной.

Рассмотрим теперь поведение трехмерного локализованного пакета в случае, когда (30) имеет вид

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (54)$$

Поскольку в этом случае  $N \sim 1/A$ , то согласно (53) трехмерные солитонные решения уравнения (54) неустойчивы. Как было показано в [15, 16], трехмерный пакет, описываемый уравнением (54), при  $H > 0$  расплывается, а при  $H < 0$  сжимается до тех пор, пока не появится особенность (пакет коллапсирует). Ясно, что в последнем случае нельзя пренебречь членами более высокого порядка в (30).

Таким образом, в случае, когда НУШ имеет коллапсирующее решение, необходимо принять во внимание отброшенные ранее члены разложения уравнения, откуда было получено НУШ. Может случиться, что эти члены задержат коллапс при ампли-

туда, где еще применимо «нерелятивистское» приближение. Такая задержка имеет место, например, в случае ленгмюровских волн.

Расплывание солитонных решений уравнения (54) могло бы задержаться, если бы солитоны были расположены периодически в пространстве, т. е. может оказаться, что трехмерное периодическое решение (54) устойчиво.

Для исследования этой возможности рассмотрим сначала устойчивость одномерного периодического решения (54). Оно имеет вид (ср. (36))

$$\psi = \psi_0(x - 2kt)\sigma, \quad \sigma \equiv \exp\{i[(A^2 - k^2)t + kx]\}, \quad (55)$$

где  $\psi_0$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + \psi_0^3 - A^2 \psi_0 = 0. \quad (56)$$

Мы увидим, что, как и в случае солитона, модуляция периодической волны по фазе в рамках уравнений (33), (54) никак не влияет на устойчивость волны.

Формула (56) имеет периодические решения следующих двух типов:

$$\psi_0 = A \sqrt{\frac{2}{2 - \kappa^2}} \operatorname{dn}\left(\frac{Ax}{\sqrt{2 - \kappa^2}}, \kappa\right) \quad (0 \leq \kappa \leq 1); \quad (57)$$

$$\psi_0 = A \sqrt{\frac{2\kappa^2}{2\kappa^2 - 1}} \operatorname{cn}\left(\frac{Ax}{\sqrt{2\kappa^2 - 1}}, \kappa\right) \quad (0,5 < \kappa^2 \leq 1). \quad (58)$$

Здесь  $\operatorname{dn}$ ,  $\operatorname{cn}$ -эллиптические функции Якоби с модулем  $\kappa$ .

Решение (57) допускает больше одной собственной функции оператора  $\hat{L}_1$  с отрицательной энергией. Поэтому оно неустойчиво за исключением малой области, где  $\kappa^2$  близко к 1 и (57) переходит в набор сильно удаленных солитонов. Решение (58) допускает лишь одно собственное решение с отрицательной энергией оператора  $\hat{L}_1$ . Исследуем это решение с помощью энергетического принципа.

Рассмотрим решение уравнения (54), мало отличающееся от (55), (58):

$$\psi = [\psi_0 + \varphi_1(x - 2kt, t) + i\varphi_2(x - 2kt, t)]\sigma. \quad (59)$$

Здесь действительные функции  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  много меньше  $\psi_0$  по модулю. Подставим (59) в (54). После линеаризации и разделения мнимой и действительной частей получим

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \hat{L}_0 \varphi_2, \quad \hat{L}_0 \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \psi_0^2 + A^2; \quad (60)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = -\hat{L}_1 \varphi_1, \quad \hat{L}_1 \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 3\psi_0^2 + A^2. \quad (61)$$

Предположим, что  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  периодичны по  $x$  с периодом  $L$ , кратным  $\lambda$ -периоду  $\psi_0$  и равным

$$L = I\lambda, \quad \lambda = 4\sqrt{2\kappa^2 - 1} K(\kappa)/A, \quad (62)$$

где  $I$  — большое целое число;  $K$  — полный эллиптический интеграл. Тогда (60), (61) сохраняют энергию  $H_1$ , равную

$$H_1 = \int_0^L (\varphi_1 \hat{L}_1 \varphi_1 + \varphi_2 \hat{L}_0 \varphi_2) dx. \quad (63)$$

Из (56), (60) получаем ограничение на  $\varphi_1$

$$\int_0^L \varphi_1 \psi_0 dx = 0. \quad (64)$$

Если теперь окажется, что  $H_1$  при условии (64) и при любых  $I$  всегда положительна (за исключением случая тривиального возмущения, когда  $\varphi_1 = \partial\psi_0/\partial x$ ,  $\varphi_2 = \psi_0$ ), то периодическую волну (55), (58) можно считать устойчивой, потому что тогда по теореме Лагранжа  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  все время будут оставаться малыми.

Исследование знака минимума  $H_1$  не вполне аналогично проведенному для второй вариации энергии (38) в случае солитона. Отличие заключается в следующем: решение последнего из уравнений (30)  $\partial\psi_0/\partial A$  в случае периодической волны нарастает по  $x$  и не удовлетворяет условию периодичности по  $L$ , — поэтому надо воспользоваться другим, периодическим решением этого уравнения:

$$\hat{L}_1 \psi_p = \psi_0. \quad (65)$$

Введем функцию  $\alpha(\kappa, A)$ , градиент которой ортогонален градиенту  $\lambda$ :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \kappa} \frac{\partial \lambda}{\partial \kappa} + \frac{\partial \alpha}{\partial A} \frac{\partial \lambda}{\partial A} = 0. \quad (66)$$

Тогда, если рассматривать  $\psi_0$  как функцию от  $\lambda$ ,  $\alpha$ , производная  $\partial\psi_0/\partial\alpha$  будет периодической функцией от  $x$  с периодом  $\lambda$ . Продифференцировав (56) по  $\alpha$ , получим

$$\hat{L}_1 \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} = - \frac{\partial A^2}{\partial \alpha} \psi_0, \quad (67)$$

откуда видно, что решение уравнения (65) равно

$$\psi_p = - \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} / \frac{\partial A^2}{\partial \alpha}.$$

Ввиду того что  $\hat{L}_0$  — неотрицательной оператор, получаем из (63)

$$H_1 \geq \int_0^L \varphi_1 \hat{L}_1 \varphi_1 dx. \quad (68)$$

Разлагая  $\varphi_1, \psi_0$  по собственным функциям оператора  $L_1$  с периодом  $L$  по формулам (46), (47), используя (67), аналогично (53) приходим к формуле

$$H_1 \geq \frac{c_1}{\partial A^2 / \partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^L \psi_0^2 dx. \quad (69)$$

Здесь  $c_1$  — положительное число ввиду того, что, как нетрудно проверить [11], оператор  $\hat{L}_1$  при волне (58) имеет только одно отрицательное собственное значение. Подставляя (58) в (69), получим

$$H_1 \geq \frac{c_1 I}{\partial A^2 / \partial \alpha} \frac{\partial AS}{\partial \alpha}, \quad S = \frac{E - (1 - \kappa^2)K}{\sqrt{2\kappa^2 - 1}} = \frac{\kappa^2 B(\kappa)}{\sqrt{2\kappa^2 - 1}}, \quad (70)$$

где  $E, K, B$  — полные эллиптические интегралы. Поскольку производные берутся при постоянном периоде  $\lambda$ , то с помощью (52), (60) приводим (70) к виду

$$H_1 \geq \frac{c_1 I}{2A\theta(\sqrt{2\kappa^2 - 1}K(\kappa))/\partial\kappa^2} \frac{\partial(\kappa^2 BK)}{\partial\kappa^2} \quad (0,5 \leq \kappa^2 \leq 1). \quad (71)$$

Поскольку в правой части (71) стоит положительная величина, решение (58), (55) уравнения (54) осуществляет минимум энергии и поэтому устойчиво.

Рассмотрим теперь трехмерную периодическую волну (36) с одинаковыми периодами по осям в среде с кубической нелинейностью, т. е. описываемую уравнением (33) при  $\beta = 2$ . Амплитуда такой волны удовлетворяет уравнению

$$\Delta\psi_0 = A^2\psi_0 - \psi_0^3. \quad (72)$$

В трехмерном случае устойчивой одномерной периодической волне (58) соответствует кубическая решетка, состоящая из солитонов с противоположными знаками  $\psi_0$ . Период решетки равен  $\lambda = R/A$ , подобно периоду одномерного решения (62). Повторяя вывод оценки нижней границы второй вариации от энергии волны

$$H = \int (|\nabla\psi|^2 - 1/2|\psi|^4) d\mathbf{r} \quad (73)$$

в окрестностях  $\psi_0$  при постоянном числе частиц  $N$  и длине волны  $\lambda$ , мы приходим к уравнениям, аналогичным (53)—(67), и неравенству, аналогичному (69):

$$H_1 \geq \frac{c_3}{2\partial A^2 / \partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} N_L, \quad L = I\lambda (c_3 > 0). \quad (74)$$

Здесь  $N_L$  — число частиц в части периодической волны, заключенной в кубе с ребрами длиной  $L$ , кратной периоду волны

$$N_L = \iiint_0^L \psi_0^2 d\mathbf{r} = I^3 n(R)/A, \quad (75)$$

где  $n$  — число частиц в элементарной ячейке трехмерного периодического решения уравнения (72) при  $A = 1$ , когда  $\lambda = R$ .

Функция  $\alpha(A, R)$  ортогональна к  $\lambda$  в смысле (66)

$$\lambda = R/A, \quad \alpha = A^2 + R^2. \quad (76)$$

После простых преобразований из (74)—(76) получаем

$$H_1 \geq c_3 I^3 R^2 A^{-3} \frac{\partial}{\partial R} \frac{n}{R} / 4. \quad (77)$$

Сравнивая (77) с (71), мы заключаем, что если производная  $\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{n}{R} \right)$  положительна, то периодическое знакопеременное решение уравнения (33) при  $\beta = 2$  устойчиво.

Найти зависимость  $n$  от  $R$  в трехмерном случае можно, разлагая  $\psi_0$  в тройной ряд Фурье по  $x, y, z$  с периодом, равным  $R$ , и подставляя в (72), где  $A = 1$ . Получившееся уравнение относительно коэффициентов разложения можно решить численно, пользуясь методом стабилизирующего множителя [10], после чего находим  $n(R)$  согласно формуле (75).

Проведенные расчеты показывают, что нижняя граница (77) положительна на интервале  $0 < R < 2,3$ . При больших  $R$  решетка переходит в набор слишком удаленных друг от друга солитонов, которые, как было показано раньше, неустойчивы.

Легко видеть, что устойчивые периодические волны могут образовать долгоживущие квазиклассические пакеты, амплитуда которых стремится к нулю на бесконечности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Петвиашвили В. И., Цвеллудуб О. Ю.— Докл. АН СССР, 1978, 238, с. 1321.
2. Benjamin T. B.— J. Fluid Mech., 1957, 2, p. 554.
3. Yih C. S.— Phys. Fluids, 1963, 6, p. 321.
4. Петвиашвили В. И.— Докл. АН СССР, 1977, 234, с. 787.
5. Veinney D. J.— J. Math. and Phys., 1966, 45, p. 150.
6. Roskes G. J.— Phys. Fluids, 1970, 13, p. 1440.
7. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.— Докл. АН СССР, 1970, 192, с. 753.
8. Захаров В. Е.— Письма в ЖЭТФ, 1975, 22, с. 364.
9. Newell A. C., Redekopp L. G.— Phys. Rev. Lett., 1977, 38, p. 377.
10. Петвиашвили В. И.— Физ. плазмы, 1976, 2, с. 469.
11. Вахитов И. Г., Колоколов А. А.— Изв. вузов. Радиофизика, 1973, 16, с. 1020.
12. Кадомцев Б. Б.— В кн.: Вопросы теории плазмы, т. 2. М., Атомиздат, 1973, с. 137.
13. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А.— ЖЭТФ, 1974, 66, с. 594.
14. Веденов А. А., Рудаков Л. И.— Докл. АН СССР, 1964, 159, с. 739.
15. Власов В. И., Петрищев В. А., Таланов В. И.— Изв. вузов. Радиофизика, 1971, 14, с. 1353.
16. Захаров В. Е.— ЖЭТФ, 1972, 62, с. 1745.
17. Bordag L. A., Its A. R., Matveev W. B. et al.— Phys., Lett., 1977, 63A, p. 205.

# РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОРТЕВЕГА—ДЕ ВРИЗА

В. Б. МАТВЕЕВ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие метода обратной задачи (МОЗ) интегрирования нелинейных уравнений происходит в основном по двум направлениям. С одной стороны, происходит интенсивный поиск новых уравнений, к которым применим МОЗ. С другой стороны, предпринимаются усилия для расширения самого класса решений, который в традиционной формулировке и по самой идее метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) включал лишь функции, быстроубывающие (или стремящиеся к конечному пределу) на бесконечности по «пространственным» переменным. Развитие второго направления требует решения принципиально новых обратных задач спектрального анализа и привлечения математических средств, радикально отличающихся от тех, которые используются в решении прямой и обратной задач рассеяния. Значительным успехом явилось создание теории конечнозонных периодических и условно-периодических решений уравнений, ранее проинтегрированных МОЗР. Часть результатов этой теории, относящаяся к явным формулам для конечнозонных решений, изложена ниже.

В последнее время тщательный анализ уже, казалось бы, хорошо изученных многосолитонных решений обнаружил существование у них интересных вырожденных аналогов, представляющих самостоятельный интерес — рациональных решений. Рассмотрение этих решений вскрыло ряд замечательных фактов — связь их полюсов с траекториями конечномерных динамических систем Мозера—Калоджеро, явные формулы для двумерных солитонов со степенным убыванием на бесконечности, на существование которых впервые указал В. И. Петвиашвили, и удивительный факт их невзаимодействия при столкновениях. Эти результаты также кратко описаны в настоящей статье.

Наконец, в последнем разделе приведены решения уравнения Кортевега—де Вриза (КДВ), локализованные на растущем рациональном фоне. Простой заменой переменной они преобразуются в «цилиндрические» солитоны — конечные решения осесимметричного уравнения КДВ, выражающиеся через функции Эйри.

Чтобы удержать объем статьи в разумных рамках, не рассматриваются уравнения, связанные с матричными и разностными линейными операторами. Полное представление о полученных в этом направлении результатах можно получить по обзорным статьям [1, 2] и лекциям автора [3]. Новые интересные приложения алгебраической геометрии к решению уравнения дуальности, открытые в работе Атьи и Уорда [4], также здесь не упоминаются.

Материал раздела 2 — классический. Дальнейшие подробности по этому поводу читатель найдет в монографиях [5, 6]. В разделах 3 и 4 изложены результаты работ Итса и автора [7—9]. Содержание раздела 5 воспроизводит основную идею статьи Кричевера [10]. В разделах 6, 7 изложены основные результаты работ [11, 12] и кратко упомянуты результаты Маккина, Мозера и Эро [13]. Дальнейшие результаты по этой тематике можно найти в статьях [14, 17]. В разделе 8 кратко излагается результат неопубликованной работы Бордаг и автора. С материалом раздела 8 непосредственно связаны также работы [16—18].

## 2. РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ, АБЕЛЕВЫ ИНТЕГРАЛЫ И $\theta$ -ФУНКЦИИ

Компактная риманова поверхность  $\Gamma$  (алгебраическая кривая) определяется как компактное аналитическое многообразие комплексной размерности единица. Топологической моделью такого многообразия может служить, как известно, сфера с  $g$  ручками. Число  $g$  называется родом римановой поверхности.

На компактной римановой поверхности рода  $g \geq 1$  всегда можно выбрать (неоднозначно) базис из  $2g$  ориентированных

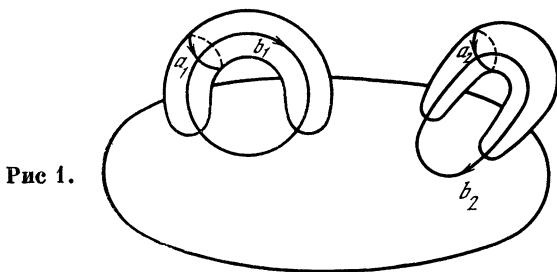


Рис 1.

циклов  $a_j$  и  $b_j$  (базис одномерной группы гомологий  $H_1(\Gamma)$ , образующих так называемое каноническое рассечение поверхности).

На сфере с двумя ручками ( $g = 2$ ) это рассечение можно построить, как показано на рис. 1, причем эта конструкция канонического рассечения тривиально обобщается на случай сферы с  $g$  ручками.

Обозначим через  $a_j^+$  левый,  $a_j^-$  — правый берега разреза по циклу  $a_j$ ;  $b_j^+$  — левый,  $b_j^-$  — правый берега разреза по  $b_j$ . Понятия «правый и левый берега» при этом однозначно определяются ориентацией циклов  $a_j, b_j$ .

Разрезая поверхность  $\Gamma$  по всем циклам  $a_j$  и  $b_j$ , мы получим многообразие  $\hat{\Gamma}$  с краем

$$\partial \hat{\Gamma} = \sum_{j=1}^g (a_j^+ + b_j^+ - a_j^- - b_j^-). \quad (1)$$



Можно доказать, что всякую компактную риманову поверхность можно получить как риманову поверхность алгебраической функции  $\omega(z)$ , т. е. функции, определяемой уравнением  $P(\omega, z) = 0$ , где  $P$  — многочлен от своих аргументов. Простейшим и наиболее важным с точки зрения приложений является класс гиперэллиптических поверхностей, заданных уравнением

$$\omega^2 = P(z) = \prod_{j=1}^N (z - E_j). \quad (2)$$

Такие поверхности наиболее естественно реализуются как двулистные поверхности наложения расширенной комплексной плоскости.

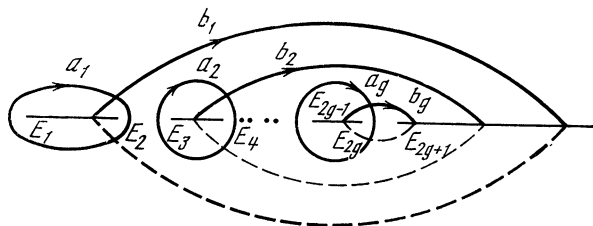


Рис. 2

При  $N = 2g + 1$  род поверхности равен  $g$ , для ее построения можно взять два экземпляра комплексной плоскости с разрезами по отрезкам  $[E_{2j-1}, E_{2j}]$  и  $[E_{2j+1}, \infty]$  и склеить их по разрезам. Система  $a$ - и  $b$ -циклов при этом может быть реализована, как показано на рис. 2. Пунктиром обозначены части циклов, лежащие на втором листе.

В частности, при  $g = 1$   $P(z)$  — полином третьего порядка и риманова поверхность  $\Gamma$  топологически эквивалентна тору. В этом случае имеется всего один  $a$ -цикл и один  $b$ -цикл.

Если  $P$  — полином порядка  $2g + 2$ , то риманова поверхность функции  $\omega$  строится так же, как и выше, с точностью до замены точки  $\infty$  на  $E_{2g+2}$ . При этом род поверхности по-прежнему равен  $g$ . Всякую риманову поверхность алгебраической функции можно реализовать как многолистную поверхность наложения сферы Римана (расширенной комплексной плоскости). При этом род  $g$  можно вычислить по формуле Гурвица:  $g$  равняется полусумме кратностей точек ветвления минус число листов плюс 1. (Кратность точки ветвления — это число листов, которые сливаются в ней.)

Назовем  $I$ -форму  $\Omega$  на римановой поверхности  $\Gamma$  абелевым дифференциалом, если в окрестности любой точки  $P_j \in \Gamma$  она представима в виде  $f_j(z_j)dz_j$ , где  $f_j(z)$  — функция, мероморфная в некотором круге на плоскости  $S$  с центром в  $O$ , а  $z_j$  — локальный параметр в окрестности точки  $P_j$ , такой, что  $P(z_j)_{z_j=0} = P_j$ . Если в этом определении все функции  $f_j$  голоморфны (каждая в своем параметрическом круге), говорят, что  $\Omega$  — голоморф-

фная дифференциальная форма, или абелев дифференциал первого рода.

Примеры. А. На римановой поверхности  $\omega^2 = \prod_{j=1}^{2g+1} (z - E_j)$  в окрестности точек  $E_j$  (или, вернее,  $\omega = 0, z = E_j$ ) в качестве локального параметра можно взять  $z_j = \sqrt{z - E_j}$ , в точке  $\infty$   $z_\infty = 1/\sqrt{z}$ , а в остальных точках  $z_0$  можно использовать  $z - z_0$ .

При этом формы  $\Omega_m$ , представимые вне окрестностей точек  $E_j$  и  $\infty$  в виде  $\Omega_m = z^m dz / \sqrt{\prod (z - E_j)}$ , как нетрудно видеть, являются мероморфными формами, допускающими в окрестности  $E_j$  следующее локальное представление:

$$\Omega_m = 2(z_j^2 + E_j)^m dz_j / \sqrt{\prod_{k \neq j} (z_j^2 - E_j - E_k)}.$$

Если  $m \leq 1$ , формы  $\Omega_m$  голоморфны. При  $m \geq g$  формы  $\Omega_m$  имеют полюс в точке  $\infty$ .

Б. На римановой поверхности кривой

$$\tilde{\omega}^4 = (z - E_1)(z - E_2)(z - E_3)(z - E_4)$$

формы  $\gamma_1 = z dz / \tilde{\omega}^3$ ,  $\gamma_2 = dz / \tilde{\omega}^3$  и  $\gamma_3 = dz / \tilde{\omega}^2$  голоморфны.

Чтобы убедиться в этом, нужно учесть, что локальные параметры в окрестности точек ветвления  $E_j$  можно выбрать в виде  $z_j = \sqrt[4]{z - E_j}$  и написать соответствующие локальные представления для форм  $\gamma_j$ .

Отметим, что риманова поверхность алгебраической функции  $\tilde{\omega}(z)$  четырехлистно накрывает расширенную комплексную плоскость (сферу Римана) и имеет род  $g = 3$ .

Можно доказать, что на любой римановой поверхности  $\Gamma$  рода  $g$  существует ровно  $g$  линейно независимых абелевых дифференциалов первого рода.

Абелевым интегралом  $J(P)$  на поверхности  $\Gamma$  называют интегралы вида  $\int_P^P \Omega$ , где  $\Omega$  — абелев дифференциал.  $J(P)$  представляет, очевидно, многозначную аналитическую функцию точки с локальными представлениями вида  $J = c_j \ln z_j + f_j(z_j)$ , где  $f_j$  — мероморфная функция.

По характеру особенностей абелевы интегралы принято классифицировать следующим образом. Интегралы  $J(P)$  без особенностей называются абелевыми интегралами первого рода. Абелевы интегралы, не имеющие других особенностей, кроме полюсов, называются интегралами второго рода. Наконец, все остальные интегралы называются абелевыми интегралами третьего рода.

Важно отметить, что абелевы интегралы второго рода с нулевыми  $a$ -периодами (т. е. нормированные условием  $\oint_{a_k} dJ = 0$ )

с точностью до постоянного слагаемого определяются заданием своих главных частей в полюсах (теорема Римана).

Можно всегда построить на компактной римановой поверхности базис  $dU_j$  из голоморфных абелевых дифференциалов со свойством  $\oint_{a_k} dU_j = \delta_{kj}$ . Такой базис называется нормированным.

Матрица  $B_{jk} = \oint_{b_k} dU_j$  называется матрицей  $B$ -периодов. Матрица  $B$ -периодов всегда симметрична и имеет положительно определенную мнимую часть. На кривой (2) дифференциалы  $dU_j$  имеют вид (при  $N = 2g + 1$ )

$$dU_j = \frac{1}{\sqrt{P(z)}} (c_{1j}z^{g-1} + c_{2j}z^{g-2} + \dots + c_{gj}) dz, \quad (3)$$

а условие нормировки определяет  $c_{kj}$  как решения системы линейных алгебраических уравнений. Существует стандартная конструкция, позволяющая строить базис  $dU_j$  на произвольной компактной римановой поверхности.

$N$ -мерная  $\theta$ -функция определяется формулой

$$\theta(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{q} \in z^N} \exp[\pi i (B\mathbf{q}, \mathbf{q}) + 2\pi i (\mathbf{p}, \mathbf{q})], \quad (4)$$

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_nq_n,$$

где  $B$  —  $N \times N$ -матрица, а суммирование ведется по решетке  $z^N$  всех векторов  $\mathbf{q} \in R^N$  с целочисленными компонентами,  $\mathbf{p} \in C^N$ .

$\theta$ -функция Римана определяется формулой

$$\theta = \theta(U(P) - \mathbf{e}).$$

Здесь  $\mathbf{e}$  — произвольный вектор,  $\mathbf{e} \in C^g$ ;  $U(P) = \int_{P_0}^P dU$ , где

$dU$  — векторно-значный дифференциал с компонентами  $dU_j$ , а интегрирование ведется от точки  $P_0$  до текущей точки  $P$  римановой поверхности; в качестве  $B$  берется матрица  $B$ -периодов римановой поверхности  $\Gamma$ .

$\theta$ -функция Римана однозначна на поверхности  $\hat{\Gamma}$  (т. е. на  $\Gamma$ , разрезанной по циклам  $a_k$  и  $b_k$ ) и имеет (если она не обращается тождественно в нуль) ровно  $g$  нулей  $P_j$ , которые удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{j=1}^g U(P_j) = \mathbf{e} - \mathbf{k}, \quad k_m = \sum_{j \neq m} \int_{a_j} U_m dU_j - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} B_{mm}. \quad (5)$$

Величины  $k_m$  называются римановыми константами и для гиперэллиптических поверхностей могут быть вычислены по более простой формуле

$$k_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g B_{mj} - \frac{m}{2}. \quad (6)$$

Верно и обратное утверждение, т. е. точки  $P_j$ , удовлетворяющие системе (5), являются нулями  $\theta$ -функции Римана.

Задача нахождения точек  $P_j$  из системы (5) носит название проблемы обращения Якоби. В случае  $g = 1$  это классическая задача обращения эллиптического интеграла, решение которой дает  $\mathcal{P}$ -функция Вейерштрасса. В общем случае ее решение выражается через  $g$ -мерные  $\theta$ -функции [5].

### 3. КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ВРИЗА

Известно, что построение решения уравнения КДВ

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}, \quad (7)$$

имеющего вид бегущей волны  $u = u(x - vt)$ , двумя квадратурами сводится к задаче обращения эллиптического интеграла. Как следствие,  $u$  выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса  $u = 2\mathcal{P}(x - vt)$ . При этом непрерывный спектр (зоны устойчивости) для ассоциированного оператора Шредингера

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t) \quad (8)$$

устроен очень специально. Имеется конечная зона устойчивости, совпадающая с отрезком  $[E_1, E_2]$ , и бесконечная зона  $[E_3, \infty)$ , где числа  $E_1, E_2, E_3$  явно выражаются через инварианты функции Вейерштрасса.

Хорошо известно также, что в общем случае спектр оператора Шредингера с периодическим потенциалом состоит из счетной последовательности зон устойчивости, разделенных лагунами, длины которых быстро убывают с увеличением номера. Пример  $u = 2\mathcal{P}(x)$  подсказывает, что естественными периодическими начальными условиями, позволяющими явно проинтегрировать КДВ, являются конечнозонные периодические потенциалы, т. е. такие, у которых лишь конечное число лагун не вырождено в точку. Набор специальных данных, по которым однозначно восстанавливается такой потенциал, состоит из чисел  $E_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 2g + 1$ ), являющихся границами зон устойчивости, и набора из  $g$  точек  $P_m$  двулистной поверхности  $\Gamma$ , соответствующей кривой  $\omega^2 = \Pi(z - E_j)$ . Проекции точек  $P_m$  на комплексную плоскость  $\pi(P_m)$  совпадают с лежащими в невырожденных лагунах соб-

ственными числами  $\lambda_m$  задачи

$$Hy = \lambda y, \quad y(0) = y(T) = 0, \quad u(x) = u(x + T).$$

Отметим, что  $\pi(P_m) \neq \pi(P_n)$ , если  $m \neq n$ . Набор данных  $\{E_j, P_m\}$  позволяет восстановить потенциал по формуле

$$u(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \theta(gx + 1) + c, \quad (9)$$

где

$$c = \sum_{j=1}^{2g+1} E_j - 2 \sum_{v=1}^g \oint_{a_v} z dU_v, \quad g_j = 2ic_{1j}; \quad (10)$$

$$1 = - \sum_{m=1}^g \int_{\infty}^{P_m} dU - k = \sum_{k=1}^g U(P_m) - k. \quad (11)$$

Развитие начального условия (9) по уравнению КДВ состоит в том, что точки  $P_j$  приобретают зависимость от  $t$ . Характер этой зависимости таков, что вектор  $1$  — линейная функция от времени

$$1(t) = vt + 1(0), \quad v_j = 8i \left( c_{1j} \frac{\sum E_j}{2} + c_{2j} \right). \quad (12)$$

Видно, что  $l_j$  аналогичны логарифмам нормировочных множителей в методе обратной задачи рассеяния для уравнения КДВ. Формула (12) завершает описание решения уравнения КДВ с конечно зонным начальным условием.

Отметим, что в приведенных выше формулах параметры  $E_j$  можно считать комплексными числами, а точки  $P_m$  располагать произвольным образом на поверхности  $\Gamma$ , лишь бы выполнялось условие  $\pi(P_m) \neq \pi(P_n)$  (при  $m \neq n$ ); формулы (9)–(12) по-прежнему задают решение уравнения КДВ, являющееся, вообще говоря, комплексной условно-периодической функцией от  $x$  и  $t$ . При этом базисные частоты явно вычисляются по числам  $E_j$ . Можно показать, что функция  $u(x, t)$  не зависит от выбора пути, по которому берутся интегралы  $U(P_m)$ , в силу свойства периодичности абстрактной  $\theta$ -функции, построенной по матрице  $B$ :

$$1) \theta(p + q) = \theta(p), \quad q \in z^g;$$

$$2) \theta(p + B^j) = \exp(-\pi i B_{jj} - 2\pi i P_j) \theta(p),$$

где  $B^j$  —  $j$ -й столбец матрицы  $B$ .

Уравнение Шредингера  $H\psi = z\psi$  с потенциалом (9) также решается в явном виде

$$\psi = \frac{\theta(U(P) + xg + 1) \theta(1)}{\theta(U(P) + 1) \theta(xg + 1)} e^{i\omega(P)x}, \quad z = \pi(P). \quad (13)$$

Здесь

$$\omega(P) = \int_{E_{2g+1}}^P \frac{z_g + b_1 z^{g-1} + \dots + b_g}{2 \sqrt{\Pi(z - E_j)}} dz, \quad U(P) = \int_{\infty}^P dU;$$

числа  $b_j$  определяются из системы линейных уравнений

$$\oint_{a_k} d\omega(P) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, g),$$

означающей, что все  $a$ -периоды интеграла  $\omega(P)$  равны нулю. Формула (13) определяет пару линейно-независимых решений уравнения Шредингера, соответствующих выбору точки  $P$  на верхнем или нижнем листе римановой поверхности  $\Gamma$ . При  $P \rightarrow \infty$  из структуры формулы ясно, что  $\psi(x, P) \sim e^{i\sqrt{z}x}$ , так как отношение  $\theta$ -функций стремится к единице,  $U(\infty) = 0$  по модулю периодов, а  $\omega(P) = \sqrt{z} + O(1/\sqrt{z})$  (по модулю периодов).  $\psi(x, P)$  есть мероморфная всюду, за исключением  $\infty$ , функция от  $P$  с простыми полюсами в точках  $P_m$ . Условие  $\pi(P_m) \neq \pi(P_n)$  гарантирует, что  $\theta(U(P) + 1)$  не обращается в нуль тождественно. (Выражаясь языком алгебраической геометрии, можно сказать, что условие  $\pi(P_m) \neq \pi(P_n)$  задает дивизор  $D = \sum_{m=1}^g P_m$  общего положения.) Кроме того, ясно, что  $\psi(0, P) = 1$ . Три условия — асимптотика на бесконечности, структура полюсов и нормировка в нуле — вместе с требованием однозначности и локальной мероморфности  $\psi$  являются характеристическими — в силу теорем единственности, справедливых для компактных римановых поверхностей, существует лишь одна функция  $\psi$ , удовлетворяющая этим требованиям. Формула (13) показывает, как эффективно найти  $\psi$  исходя из этих условий.

Само решение обратной задачи можно описать так. Из спектрального анализа оператора Шредингера с конечнозонным спектром выясняется [7] описанная выше аналитическая структура функции  $\psi$  и доказывается единственность функции с такими аналитическими свойствами. Затем  $\psi$  восстанавливается по явной формуле (13). После этого потенциал вычисляется из уравнения Шредингера

$$n(x) = \lim_{z \rightarrow \infty} [\psi_{xx} + z\psi] \psi^{-1}.$$

Это вычисление приводит к формуле (9).

Идея первоначального восстановления  $\psi$ -функции по спектральным данным и последующего нахождения по ней коэффициентов линейного уравнения, которому она удовлетворяет, оказалась полезной и в «рассеивательных» вариантах метода обратной задачи и успешно применяется в последнее время. Эта идея впервые применена в работе [8] и получила существенное дальнейшее развитие в работах Кричевера (см. раздел 5).

#### 4. СВЯЗЬ КОНЕЧНОЗОННЫХ РЕШЕНИЙ С $N$ -СОЛИТОННЫМИ

Пусть все числа  $E_j$  в формулах раздела 3 вещественны и упорядочены по возрастанию значка  $j$ , как на рис. 2. Совершим предельный переход  $E_{2m}, E_{2m-1} \rightarrow -\alpha_m$ ,  $\alpha_m = \kappa_m^2$ ,  $\kappa_m > 0$ ,  $E_{2g+1} \rightarrow 0$ . Предельные значения дифференциалов  $dU_j$  вычисляются в явном виде:

$$dU_j = - \frac{\kappa_j dz}{2\pi \sqrt{z(z + \alpha_j)}}. \quad (14)$$

Для соответствующих векторов  $g$  и  $v$  в пределе получаем

$$g_j = -i\kappa_j/\pi, \quad v_j = 4i\kappa_j^3/\pi. \quad (15)$$

Далее для элементов матрицы  $B$ -периодов имеем

$$iB_{jj} \rightarrow -\infty, \quad \lim B_{mk} = \frac{i}{\pi} \ln \left| \frac{\kappa_m + \kappa_k}{\kappa_m - \kappa_k} \right|. \quad (16)$$

Если вспомнить асимптотику при  $t \rightarrow \pm \infty$   $g$ -солитонных решений уравнения КДВ, становится ясно из (16), что предельные значения недиагональных элементов матрицы  $B$ -периодов определяют фазовые сдвиги при столкновениях солитонов. Ясно, что из-за обращения в бесконечность диагональных элементов матрицы  $B$  и присутствия их как в определении самой  $\theta$ -функции, так и в ее аргументе (вектор  $l$ ) в сумме по  $z^g$  будут отличны от нуля лишь слагаемые, для которых  $g$  — вектор, составляющие которого — нули и единицы. Таким образом, под знаком  $\ln$  в определении  $u(x, t)$  будет стоять конечная сумма экспонент, соответствующая представлению Хироты для  $g$ -солитонного решения уравнения КДВ. Дальнейшие подробности по поводу этих вычислений можно найти в [3] или [9].

Совершенно аналогично, хотя вычисления становятся более громоздкими, можно рассмотреть случай промежуточного вырождения, когда лишь часть отрезков  $[E_{2m-1}, E_{2m}]$  стянута в точки. При этом возникают  $N$ -солитонные решения на  $n$ -зонном фоне. Мы не будем давать здесь их описание.

В заключение этого пункта отметим гипотезу, обоснование которой дало простой по сравнению с формулой (9) и содержащий все конечнозонные потенциалы рецепт построения большого семейства конечнозонных периодических потенциалов: сумма сдвигов  $\sum_n u(x + nT)$   $N$ -солитонного потенциала  $u(x)$  есть  $N$ -зонный периодический потенциал. Эта гипотеза справедлива на потенциалах  $u(x) = -N(N+1)/\text{ch}^2 x$ , так как  $N(N+1)\mathcal{P}(x)$  есть действительно  $N$ -зонный потенциал.

## 5. ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНОЗОННЫХ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАХАРОВА — ШАБАТА

Уравнения Захарова—Шабата имеют вид

$$\frac{\partial L_1}{\partial t} - \frac{\partial L_2}{\partial y} - [L_1, L_2] = 0, \quad (17)$$

где  $L_1$  и  $L_2$  — дифференциальные операторы по  $x$  с коэффициентами (вообще говоря, матричными), зависящими от  $x, y, t$ . Старшие коэффициенты постоянны. Мы ограничимся случаем уравнения Кадомцева—Петвиашвили, наиболее интересным с точки зрения приложений. В этом случае операторы  $L_1$  и  $L_2$  имеют вид

$$L_1 = \frac{d^2}{dx^2} + u(x, y, t), \quad L_2 = \frac{d^3}{dx^3} + v_1(x, y, t) \frac{d}{dx} + v_2(x, y, t). \quad (18)$$

Уравнение (17) эквивалентно системе трех скалярных уравнений, из которых легко исключить функции  $v_1$  и  $v_2$  и получить для  $u$  уравнение Кадомцева—Петвиашвили

$$\frac{3}{4} u_{yy} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ u_t + \frac{1}{4} (u_{xxx} + 6uu_x) \right] = 0. \quad (19)$$

Предположим, что уравнения  $L_1\psi = \psi_y$ ,  $L_2\psi = \psi_t$  имеют общее решение в виде формального ряда

$$\psi(x, y, t, z) = \exp(zx + z^2y + z^3t) \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi_j(x, y, t)}{z^j} \right] \quad (20)$$

с гладкими коэффициентами  $\chi_j$ . Тогда из условия совместности  $\psi_{ty} = \psi_{yt}$  вытекает, что оператор  $M$ , стоящий в левой части (17), переводит функцию  $\psi$  в нуль:  $M\psi = 0$ . Поскольку  $M$  есть дифференциальный оператор по  $x$  конечного порядка, то, приравнявая в последнем уравнении коэффициенты при положительных степенях  $z$  нулю, мы убедимся, что  $M = 0$ . (Достаточно вычислить коэффициент при старшей степени  $z$ , равный коэффициенту при старшей степени оператора дифференцирования по  $x$  в  $M$ , чтобы понять очевидность равенства  $M = 0$ .)

Ясно также, что коэффициенты  $u, v_1, v_2$  выражаются через функции  $\chi_j$  и их производные по  $x$

$$u = -2\chi_{1x}, \quad v_1 = -\frac{1}{3}\chi_{1x}, \quad v_2 = \frac{1}{3}(\chi_1\chi_{1x} - \chi_{1xx} - \chi_{2x}). \quad (21)$$

Таким образом, если нам удастся построить функцию  $\psi(x, y, t, p)$ , которую в окрестности отмеченной точки  $P_0$  можно разложить в асимптотический ряд (20), допускающий почленное дифференцирование, и удовлетворяющую паре уравнений  $L_1\psi = \psi_y$ ,  $L_2\psi = \psi_t$ , мы получим решение уравнения Кадомцева—Петвиашвили по формуле  $u = -2\chi_{1x}$ .

Оказывается, на каждой компактной римановой поверхности  $\Gamma$  рода  $g$  существует функция  $\psi$  с требуемыми свойствами и набором



из  $g$  простых полюсов  $P_j$ , находящихся «в общем положении», а в остальном выбираемых произвольно. Таким образом, каждой компактной римановой поверхности рода  $g$  с отмеченной точкой

$P_0$  и дивизору  $D = \sum_{j=1}^g P_j$  общего положения<sup>1</sup> отвечает некоторое решение уравнения Кадомцева—Петвиашвили.

**К о н с т р у к ц и я  $\psi(x, y, t, P)$ .** Определим абелевы интегралы  $\omega_1(P)$ ,  $\omega_2(P)$ ,  $\omega_3(P)$  с нулевыми  $a$ -периодами и единственным полюсом в  $P_0$ , задавая их главные части в  $P_0$  (локальный параметр в окрестности  $P_0$  обозначим  $z^{-1}$ ):

$$\begin{aligned} \omega_1(P) &= z + O(z^{-1}), & \omega_2 &= z^2 + O(z^{-1}), \\ \omega_3 &= z^3 + O(z^{-1}) & (z \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (22)$$

Введем векторы  $\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3$  с составляющими

$$\begin{aligned} G_j^1 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_j} d\omega_1, & G_j^2 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_j} d\omega_2, \\ G_j^3 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_j} d\omega_3. \end{aligned} \quad (23)$$

Функция  $\psi$ , удовлетворяющая всем перечисленным требованиям и голоморфная по  $P$ , вне точек  $P_j$  и  $P_0$  единственна и задается формулой

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\theta(U(P) - \mathbf{e}(x, y, t)) \theta(-\mathbf{e}(0, 0, 0))}{\theta(U(P) - \mathbf{e}(0, 0, 0)) \theta(-\mathbf{e}(x, y, t))} \exp(x\omega_1 + y\omega_2 + t\omega_3), \\ U(P) &= \int_{P_0}^P dU, & \mathbf{e}(x, y, t) &= \mathbf{G}^1 x + \mathbf{G}^2 y + \mathbf{G}^3 t + \mathbf{e}(0, 0, 0), \\ \mathbf{e}(0, 0, 0) &= \sum_{j=1}^g U(P_j) + \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (24)$$

Несложное вычисление асимптотики функции  $\psi$  приводит теперь к явной формуле для решения уравнения Кадомцева—Петвиашвили

$$u = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \theta(-\mathbf{e}(x, y, t)) - 2c. \quad (25)$$

Постоянная  $c$  вычисляется из асимптотики интеграла  $\omega_1(P)$ :  $\omega_1(P) = z + 2cz^{-1} + O(z^{-2})$  (по модулю периодов). На конкретных кривых  $\Gamma$  интегралы  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  описываются вполне эффективно, поэтому то же самое можно сказать о характере формулы (25). Проверку уравнений  $L_2\psi = \psi_t, L_1\psi = \psi_y$  мы опускаем.

На компактных римановых поверхностях существуют особые точки — точки Вейерштрасса  $Q_W$ , в которых можно задать по-

<sup>1</sup> Существует простой критерий, позволяющий проверить, находится ли дивизор в общем положении [5]. На гиперэллиптических кривых он сводится к условию  $\pi(P_i) \neq \pi(P_j)$  ( $i \neq j$ ).

люс (не любого!) порядка, меньшего или равного роду поверхности, как единственную особенность мероморфной функции на  $\Gamma$ . Для прочих точек  $\Gamma$  отличной от константы мероморфной функции с единственным полюсом малого порядка не существует. Число этих точек  $N_{QW}$  оценивается через род  $g$ :  $2g + 2 \leq N_{QW} \leq (g - 1)g(g + 1)$ . Для гиперэллиптических поверхностей точки Вейерштрасса совпадают с точками ветвления  $E_i$ ,  $\infty$ , каждой из которых соответствует мероморфная функция  $1/(z - E_i) = f_{E_j}(z)$  или  $z$  с полюсом второго порядка в этой точке (локальный параметр близ  $E_i$  есть  $\tau = \sqrt{z - E_j}$ ). В силу теоремы единственности Римана абелев интеграл  $\omega_2$  является мероморфной функцией, если  $P_0 = E_j$ ,  $\omega_2 = f_{E_j}$  или  $P_0 = \infty$ ,  $\omega_2 = z$ , и, следовательно, его  $B$ -периоды равны нулю. Ясно, что при этом функция  $u(x, y, t)$  теряет зависимость от  $y$  и становится решением уравнения КДВ. Можно показать, что такая ситуация реализуется лишь на гиперэллиптических поверхностях. Если существует мероморфная функция с полюсом третьего порядка в  $P_0$  и не имеющая других особенностей, периоды интеграла  $\omega_3$  обращаются в нуль и функция (25) задает решения уравнения нелинейной струны. Пример такой ситуации дает кривая  $\omega^4 = (z - E_1) \times (z - E_2)(z - E_3)(z - E_4)$ , если положить  $P_0 = E_j$ .

Обобщение описанной схемы на операторы  $L_1, L_2$  произвольных порядков тривиально: нужно в асимптотическом условии (20) заменить  $z^2$  и  $z^3$  на полиномы, порядки которых и старшие коэффициенты совпадают с порядками и старшими коэффициентами операторов  $L_1$  и  $L_2$ , и соответственно модифицировать определения абелевых интегралов  $\omega_2$  и  $\omega_3$ .

## 6. РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КДВ

Рациональные решения уравнения КДВ, убывающие при  $x \rightarrow \pm \infty$ , порождаются начальным условием  $u(x, 0) = N(N + 1)x^{-2}$  и его сдвигами по высшим уравнениям КДВ. Приведем явный вид этих решений, соответствующий  $N = 1, 2, 3, 4, 5$ . Обозначим  $z = xt^{-1/2}$ . Тогда

$$N = 1, \quad u = -2 [\ln z]_{xx};$$

$$N = 2, \quad u = -2 \left[ \ln \left( 1 + \frac{z^3}{12} \right) \right]_{xx};$$

$$N = 3, \quad u = -2 \left[ \ln \left( 1 - \frac{z^3}{12} - \frac{z^6}{720} \right) \right]_{xx};$$

$$N = 4, \quad u = -2 \left[ \ln \left( z + \frac{z^7}{12 \cdot 140} + \frac{z^{10}}{302400} \right) \right]_{xx};$$

$$N = 5, \quad u = -2 \left[ \ln \left( 1 + \frac{z^3}{6} - \frac{z^6}{720} - \frac{z^9}{84 \cdot 720} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{z^{12}}{60 \cdot 84 \cdot 720} - \frac{z^{15}}{3600 \cdot 588 \cdot 720} \right) \right]_{xx}.$$

Для произвольного  $N$  ответ имеет следующую структуру:  $u(x, t) = -2t^{-2/3} [\ln f(z)]_{xx}$ ,  $f(z)$  — полином, порядок которого равен  $N(N+1)/2$ . При этом для  $N = 3m$ ,  $N = 3m + 2$   $f$  на самом деле есть полином от  $z^3$ . Само вычисление полинома  $f(z)$  можно производить различными способами [11, 13], которые мы не будем здесь описывать. Отметим важный факт: решения уравнения КДВ, соответствующие начальному условию  $N(N+1)/x^2$ , можно получить из  $N$ -солитонного решения

$$u = -2 [\ln \det M]_{xx}, \quad M_{ij} = \delta_{ij} + c_i c_j (k_i + k_j)^{-1} \exp[-x(k_i + k_j)],$$

$$c_j = c_j(0) e^{-4k_j^3 t},$$

в котором следует положить  $k_j = jk$ , нормировочные множители определить из условия  $\det M|_{t=0} = (1 - e^{2kx})^{N(N+1)/2}$ , а затем устремить параметр  $k$  к нулю. При этом нормировочные множители в допредельном выражении оказываются комплексными и зависят от  $k$ . Читатель легко проделает эти вычисления для  $N = 1, 2$ .

Разлагая полином  $f(z)$  как полином от  $x$  по его корням, мы увидим, что описанные выше решения уравнения КДВ имеют вид

$$u = 2 \sum_{i=1}^{N(N+1)/2} \frac{1}{(x - x_i(t))^2}.$$

Оказывается, что функции  $x_i(t)$  (вообще говоря, комплексные, как видно из приведенных выше формул) являются траекториями конечномерной динамической системы, представляющей «высший аналог» для системы  $N(N+1)/2$  частиц с гамильтонианом  $H = \sum P_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i < j} (x_i - x_j)^2$ . Уравнения движения этой последней до-

пускают представление Лакса  $L_t = [L, A]$ , где  $L$  и  $A$  — матрицы конечного порядка [13]. Величины  $\text{Sp} L^k$  дают полный обзор инволютивных интегралов этой системы, в частности  $H = \text{Sp} L^2$ . Система с гамильтонианом  $\text{Sp} L^3$  при подходящих начальных условиях имеет в качестве траекторий в точности полюса уравнения КДВ  $x_i(t)$ . Решения общего положения для системы с гамильтонианом  $H$  можно получить, рассматривая совершенно аналогично полюса рациональных решений уравнения Кадомцева — Петвиашвили [15]. Впрочем, траектории системы с гамильтонианом  $H$  легко вычисляются независимо от их связи с уравнением Кадомцева — Петвиашвили. Имеется аналогичная связь решений уравнения КДВ с начальным условием  $N(N+1)\mathcal{P}(x)$  и системы  $N(N+1)/2$  частиц, парное взаимодействие которых есть эллиптическая функция Вейерштрасса.

**7. РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ  
УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА—ПЕТВИАШВИЛИ  
И ДВУМЕРНЫЕ СОЛИТОНЫ**

Применяя схему Захарова — Шабата [19] к уравнению Кадомцева — Петвиашвили

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x = \pm 3u_{yy}, \quad (26)$$

мы найдем (в случае знака минус) решение, зависящее от  $3N$  параметров  $c_n, p_n, q_n$ :

$$u = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det A, \quad A_{nm} = \delta_{nm} + c_n(y, t) \frac{\exp[(p_n + q_m)x]}{p_n + q_m};$$

$$c_n(y, t) = c_n(0) \exp [(-p_n^2 + q_n^2)y - 4(p_n^3 + q_n^3)t]. \quad (27)$$

Введем обозначения:  $p_n + q_n = \kappa_n$ ;  $p_n - q_n = \nu_n$ ;  $c_n(0) = -a_n \kappa_n$ . В этих переменных матрица  $A$  имеет вид

$$A = \exp \left( -\frac{\kappa_n - \kappa_m}{2} x + \frac{\nu_n - \nu_m}{2} y \right) B_{nm};$$

$$B_{nm} = \delta_{nm} - \frac{2c_n \kappa_n}{\nu_n - \nu_m + \kappa_m + \kappa_n} \exp [\kappa_n(x - \nu_n y) - (3\nu_n^2 + \kappa_n^2)t].$$

Ясно, что  $\det A = \det B$ . Переход к пределу  $\kappa_n \rightarrow 0$ ,  $a_n = 1 - \xi_n \kappa_n + O(\kappa_n^2)$ ,  $\xi_n = \text{const}$  приводит к следующему представлению для решения:

$$u_- = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det \tilde{B}, \quad \tilde{B} = \delta_{nm}(x - \nu_n y - \xi_n - 3\nu_n^2 t) +$$

$$+ (1 - \delta_{nm}) \frac{2}{\nu_n - \nu_m}. \quad (28)$$

Заменяя  $y$  на  $iy$ , мы получим аналогичную формулу для решения  $u_+$  уравнения (26) со знаком плюс.

Решения  $u_+, u_-$ , вообще говоря, являются рациональными функциями от  $x, y$  и  $t$ , комплекснозначными и имеющими особенности при вещественных  $x, y$  и  $t$ . Однако, полагая при  $N = 2$  в выражении для  $u_+$   $\nu_2 = -\bar{\nu}_1$ ,  $\xi_2 = \bar{\xi}_1$ ,  $\text{Re} \nu_1 \neq 0$ , мы найдем, что

$$\det \tilde{B} = 4/(\nu_1 + \bar{\nu}_2)^2 + |x - i\nu_1 y - \xi_1 - 3\nu_1^2 t|^2 > 0, \quad (29)$$

т. е.  $u_+$  — несингулярная вещественная функция с асимптотической  $u = O(r^{-2})$ ,  $r \rightarrow \infty$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ . Соответствующее решение описывает двумерный солитон, распространяющийся по плоскости  $x, y$  со скоростью

$$v = (v_x, v_y), \quad v_x = 3|\nu_1|^2, \quad v_y = -6 \text{Im} \nu_1. \quad (30)$$

При  $N = 2k$ ,  $\nu_{k+n} = -\bar{\nu}_n$ ,  $\xi_{k+n} = \bar{\xi}_n$ , полагая  $t \rightarrow \infty$ , можно показать, что решение распадается в сумму одиночных двумер-

ных солитонов со скоростями  $v_x^j = 3|v_j|^2$ ,  $v_y^j = -6\text{Im}v_j$ , причем в отличие от одномерных солитонов соответствующие фазовые сдвиги равны нулю. Таким образом, двумерные солитоны вообще не взаимодействуют.

## 8. О ТОЧНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ РАСТУЩИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА КДВ И ИХ ПРИМЕНЕНИИ

Непосредственно видно, что уравнение КДВ

$$u_t + 12uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (31)$$

имеет растущее по  $x$  рациональное решение  $x/12t$ ; аналогичные решения  $u = (x - \gamma y + \beta) [G(t - t_0)]^{-1}$ ,  $u = -(x - t)^2 (2y^2)^{-1} + 1/6$  имеются для уравнения (26). Интерес этих решений в случае КДВ с математической точки зрения обусловлен необычной для МОЗ спектральной структурой оператора Шредингера с потенциалом  $u(x, t)$ : непрерывный спектр заполняет всю ось, а собственные функции выражаются через функции Эйри. Рассмотрение решений, локализованных на фоне  $x/12t$ , интересно и с физической точки зрения. Преобразование Луговцовых [16] переводит такие решения уравнения КДВ в локализованные решения осесимметричного КДВ

$$u_t + uu_x + u_{xxx}/2 + u/2t = 0, \quad (32)$$

описывающего распространение цилиндрических солитонов в плазме.

Приведем явные формулы для соответствующих решений уравнений КДВ, полученные применением преобразования Бэклунда. Положим  $u = -\omega_x$ . Функция  $\tilde{\omega}$ , связанная с  $\omega$  соотношениями (преобразованием Бэклунда)

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_x &= -\omega_x - k^2 + (\tilde{\omega} - \omega)^2, \\ \tilde{\omega}_t &= -\omega_t + 4[k^2\tilde{u} - u(\tilde{\omega} - \omega)^2 - u_x(\tilde{\omega} - \omega)], \end{aligned} \quad (33)$$

также определяет решение КДВ (31). При этом, как известно [20], если для некоторой функции  $\omega$  удастся найти  $\tilde{\omega}$  при всех  $k$ , многократное применение преобразования Бэклунда индуцирует иерархию решений, нетривиально отличающихся друг от друга. При этом нет надобности каждый раз решать систему (33): любое решение  $\tilde{\omega}_2$ , полученное повторным применением преобразования Бэклунда, может быть выражено в виде суперпозиции первоначального решения  $\omega$  и двух решений  $\tilde{\omega}(k_1)$  и  $\tilde{\omega}(k_2)$ :

$$\tilde{\omega}_2 = \omega - (k_2^2 - k_1^2)/[\tilde{\omega}(k_2) - \tilde{\omega}(k_1)]. \quad (34)$$

Беря в качестве исходного решения  $u = 0$ ,  $\omega = 0$ , мы получили бы из этой процедуры  $N$ -солитонные решения. Полагая  $u = x/12t$ ,

$\omega = -x^2/24t$  и решая систему (33) для  $\tilde{\omega}(k)$ , найдем

$$\tilde{\omega} = -\frac{x^2}{24t} - \frac{1}{t^{1/3}} \frac{d}{d\rho} \ln \left[ c_1 \sqrt{\rho} Z_{1/3}^{(1)} \left( \frac{2}{\sqrt{54}} \rho^{2/3} \right) + \right. \\ \left. + c_2 \sqrt{\rho} Z_{1/3}^{(2)} \left( \frac{2}{\sqrt{54}} \rho^{2/3} \right) \right];$$

$$\rho = (x - 6k^2t) t^{-1/3};$$

$$\tilde{u} = \frac{x}{12t} + \frac{1}{t^{2/3}} \frac{d^2}{d\rho^2} \ln \left[ c_1 \sqrt{\rho} Z_{1/3}^{(1)} \left( \frac{2}{\sqrt{54}} \rho^{2/3} \right) + \right. \\ \left. + c_2 \sqrt{\rho} Z_{1/3}^{(2)} \left( \frac{2}{\sqrt{54}} \rho^{2/3} \right) \right].$$

Дальнейший анализ показывает, что решения, полученные применением четного числа преобразований Бэклунда (34) при любом выборе решения уравнения Эйри, приводят к решениям, ведущим себя как  $x/12t + O(x^{-2})$  при  $x \rightarrow \infty$  и фиксированном  $t$ , т. е. к «многосолитонным» решениям уравнения (31). Отметим также, что, применяя преобразование Бэклунда [21], переводящее решение уравнения КДВ в решение МКДВ, мы получим новые решения этого уравнения, выражающиеся через функции Эйри.

Укажем в заключение, что В. С. Дрюма указал [18] пару  $L, A$  для уравнения (32) и нашел специальное решение (односолитонного типа), выражающееся через функцию Эйри для уравнения (32) (личное сообщение).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. — УМН, 1976, 31, № 1, с. 55.
2. Кричевер И. М. — УМН, 1977, 32, № 6, с. 183.
3. Matveev V. B. — Abelian functions and solutions. Preprint N 373. Wrocław Univ., 1976, p. 1.
4. Atiyah M., Ward R. — Commun. Math. Phys., 1977, 55, N 2, p. 119.
5. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М., Гостехиздат, 1948.
6. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М., ИЛ, 1960.
7. Итс А. Р., Матвеев В. Б. — ТМФ, 1975, 23, № 1, с. 51.
8. Матвеев В. Б. — УМН, 1975, 30, № 6, с. 201.
9. Итс А. Р., Матвеев В. Б. — В кн.: Проблемы математической физики, № 8. Л., Изд-во ЛГУ, 1976, с. 62.
10. Кричевер И. М. — Докл. АН СССР, 1976, 227, № 2, с. 291.
11. Бордаг Л. А., Матвеев В. Б. — ТМФ, 1978, 34, № 2, с. 174.
12. Bordag L. A., Its A. R., Manakov S. V. e. a. — Preprint, Karl-Marx Univ., Leipzig, KМУ-QFT, 04—77; Phys. Lett., 1977, 63a, N 3, p. 205.
13. Airault H., McKean H., Moser J. — Commun. Pure and Appl. Math., 1977, 30, N 3, p. 95.
14. Adler M., Moser J. — MRC Techn. Summary Report, N 1751, 1977 May.
15. Кричевер И. М. — Функц. анализ, 1978, 12, № 1, с. 38.
16. Луговцов А. А., Луговцов Б. А. — В кн.: Динамика сплошной среды, № 1. Новосибирск, 1969, с. 195.

17. *Maxon S., Viecelli I.*— Phys. Fluids, 1974, 17, p. 1614.
18. *Дрюма В. С.*— Изв. АН МССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук, 1976, № 3, с. 87.
19. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.*— Функц. анализ, 1974, 8, № 3, с. 43.
20. *Walquist H. D., Estabrook F. B.*— Phys. Rev. Lett., 1973, 31, N 23, p. 1386.
21. *Lamb G.*— Phys. Lett., 1974, 48A, N 1, p. 17.

## ФУНКЦИЯ ГРИНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ<sup>1</sup>

Л. А. ДИКИЙ

В 1967 г. Гарднер, Грин, Крускал и Миура [3] установили замечательное свойство уравнения Кортевега—де Вриза (КДВ)  $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$ : задача интегрирования этого уравнения тесно связана со спектральной задачей для оператора Шредингера, в котором роль потенциальной энергии играет функция  $u$ , т. е.  $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$ . Очень скоро выяснилось (Гарднер [4], Захаров и Фадеев [5]), что уравнение КДВ описывает вполне интегрируемую гамильтонову систему. Лакс объяснил, что в основе всех свойств уравнения КДВ лежит тот факт, что оно может быть записано в операторной форме  $L_t = [P, L]$ , где  $P$  — также некоторый дифференциальный оператор. В данном случае  $P = \frac{d^3}{dx^3} - \frac{3}{4} \left( u \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} u \right)$ . Возникла задача отыскания всех уравнений, которые представимы в такой «лаксовой» форме и, тем самым, обладают теми же свойствами интегрируемости, что и уравнение КДВ. Это значит, что нужно найти пары дифференциальных операторов  $P$  (обозначим его порядок  $N$ ) и  $L$  (порядка  $n$ ), такие, что коммутатор  $[P, L]$  есть оператор меньшего, чем  $n$ , порядка. При этом коэффициенты оператора  $P$  должны каким-то несложным образом выражаться через коэффициенты оператора  $L$  (обычно требуют, чтобы это были многочлены от коэффициентов  $L$  и их производных). Тогда лаксово уравнение  $L_t = [P, L]$  будет искомой системой уравнений на коэффициенты оператора  $L$ .

В настоящее время известно много физически интересных систем такого типа. Есть несколько общих методов отыскания  $P, L$ -пар. Первый из них, основанный на анализе обратной задачи теории рассеяния, предложен Захаровым и Шабатом [6], второй

<sup>1</sup> Результаты, о которых будет идти речь, получены в совместных работах И. М. Гельфанда и автора [1, 2].

дан Кричевером [7] в продолжение работ Новикова. Мы предлагаем еще один общий метод, который одновременно с уравнениями позволяет строить гамильтонов формализм — скобки Пуассона, инвариант Пуанкаре (симплектическую форму), находить первые интегралы и доказывать, что они в инволюции, т. е. их скобки Пуассона равны нулю. Известно, что существование большого количества первых интегралов в инволюции тесным образом связано с интегрируемостью гамильтоновой системы.

Следствием лаксовой записи уравнения является то, что спектр оператора  $L$  и все, что выражается через спектр, является сохраняющейся величиной, т. е. первым интегралом уравнений. Однако собственное значение  $L$  является неудовлетворительным первым интегралом. Во-первых, далеко не всегда ясно, что под этим понимать для произвольного оператора  $L$ . К тому же собственное значение зависит от краевых условий и очень неявно выражается через коэффициенты оператора  $L$ . Значительно лучше след, но не оператора  $L$ , так как  $L$  следа не имеет, а обратного оператора  $(L - z)^{-1} = \mathbf{R}(z)$  ( $z$  — комплексный параметр), т. е.  $\text{Sp}\mathbf{R}(z) = \int R(x, x; z) dx$ , где  $R$  — функция Грина, т. е. ядро указанного обратного интегрального оператора. Этот след есть также первый интеграл движения, так как выражается через спектр. Но он обладает к тому же замечательным свойством локализуемости:  $\text{Sp}\mathbf{R}(z)$  разлагается в асимптотический ряд по степеням  $z^{-1}$ , причем коэффициенты этого ряда имеют структуру  $\int f dx$ , где  $f$  есть многочлены от коэффициентов оператора  $L$  и их производных (будем называть такие многочлены дифференциальными). Эти многочлены совершенно универсальны, зависят лишь от порядка  $n$  и не зависят от краевых условий. Более того, как мы увидим, эти дифференциальные многочлены позволяют строить оператор  $P$ .

1. Начнем с простейшего случая  $n = 2$ , т. е. с оператора Шредингера  $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$ . Функция Грина оператора  $(L - z)^{-1}$ , т. е. ядро обратного оператора, как известно, есть при  $x < y$  произведение двух решений уравнения  $R(x, y; z) = \varphi(x; z)\psi(y; z)$ . Элементарно проверяется, что значения функции Грина на диагонали  $R(x, x; z) = R$  удовлетворяют уравнению

$$-R''' + 4(u - z)R' + 2u'R = 0. \quad (1)$$

Все дальнейшее получается уже из этого важного уравнения. Если его умножить на  $R$ , то оно интегрируется один раз:

$$2R''R + (R')^2 + 4(u - z)R^2 = c(z). \quad (2)$$

Примем  $c(z) = -1$ . Уравнение имеет решение в виде асимптотического ряда  $R = \sum_{k=0}^{\infty} R_k z^{-k-1/2}$ . Легко видеть, что  $R_k$  получается рекуррентно. Находим

$$R_0 = 1/2, \quad R_1 = 1/4u, \quad R_2 = 1/16(3u^2 - u''), \quad \dots \quad (3)$$



Коэффициенты  $R_k$  — дифференциальные многочлены от  $u$ ;  $J_k = \int R_k dx$  являются первыми интегралами любого лаковского уравнения, которое может быть построено по  $L$  и оператору  $P$ , «почти коммутирующему» с  $L$  (в вышеописанном смысле). Теперь надо построить операторы  $P$ .

Возьмем оператор первого порядка

$$\bar{P} = R \frac{d}{dx} - \frac{1}{2} R'. \quad (4)$$

(Поскольку под  $R$  понимается ряд по степеням  $z^{-1}$ , под  $\bar{P}$  также надо понимать такой ряд; коэффициенты — операторы первого порядка.) Вычислим коммутатор

$$[\bar{P}, L] = Ru' + 2R' \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2} R''' = -2R'(L - z)$$

(мы воспользовались (1)). Иначе

$$[\bar{P}(L - z)^{-1}, L] = -2R',$$

$P = \bar{P}(L - z)^{-1}$  — по-прежнему ряд по степеням  $z^{-1}$ , коэффициенты которого — дифференциальные операторы, но уже не первого, а возрастающих порядков. Их коммутаторы с  $L$  суть операторы умножения на функции  $-2R'_k$ , т. е. если мы напишем

разложение  $P = \sum_{k=1}^{\infty} P_k z^{-k-1/2}$ , то  $R_k$  и есть искомые  $P$ -операторы в пару к  $L$ . Найдем, например,  $P_1$  и  $P_2$

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{1}{2z^{1/2}} + \frac{u}{4z^{3/2}} \right) \frac{d}{dx} - \frac{1}{2} \frac{u'}{4z^{3/2}} \right] \left( -\frac{d^2}{dx^2} + u - z \right)^{-1} = \\ & = -\frac{1}{2z^{3/2}} + \frac{1}{2z^{5/2}} \left( \frac{d^3}{dx^3} - \frac{3}{4} \frac{d}{dx} u - \frac{3}{4} u \frac{d}{dx} \right) + \dots \\ & \dots = \frac{1}{z^{3/2}} P_1 + \frac{1}{z^{5/2}} P_2 + \dots \end{aligned}$$

и  $[P_2, L] = -2R'_2 = -1/8(6uu' - u''')$ . Уравнение Лакса имеет вид  $L_t = [P_2, L]$  или  $u_t = -1/8(6uu' - u''')$ , т. е. является уравнением КДВ. Итак, формула

$$P = \left( R \frac{d}{dx} - \frac{1}{2} R' \right) \left( -\frac{d^2}{dx^2} + u - z \right)^{-1} \quad (5)$$

дает производящую функцию для  $P$ -операторов Лакса  $P_k$ , а  $-2R'$  есть производящая функция для правых частей соответствующих уравнений

$$u_t = -2R'_k. \quad (6)$$

Более общие операторы получаются как нелинейные комбинации  $\sum c_k P_k$ , а соответствующие уравнения  $u_t = -2\sum c_k R'_k$ . Производящие функции типа (5) впервые были написаны Новиковым и Дубровиным [8].

Если уравнение имеет коммутационный вид Лакса, то, как уже говорилось,  $\text{Sp}(L - z)^{-1}$  (след интегрального оператора существует) есть инвариант, или первый интеграл уравнения. Проверим это:

$$\begin{aligned} d/\text{Sp}(L - z)^{-1} / dt &= \text{Sp}(L - z)^{-1} L_t (L - z)^{-1} = \text{Sp}(L - z)^{-1} \times \\ &\times (PL - LP)(L - z)^{-1} = \text{Sp}(L - z)^{-1} [P(L - z) - (L - z)P] \times \\ &\times (L - z)^{-1} = \text{Sp}(L - z)^{-1} P - \text{Sp}P(L - z)^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Если разложить  $\text{Sp}(L - z)^{-1} = \int R dx$  в асимптотический ряд, то получим, что  $J_k = \int R_k dx$  есть последовательность первых интегралов.

Перейдем к построению гамильтоновой структуры. Центральным местом здесь является доказательство того, что вариационные производные  $\frac{\delta}{\delta u} \int R_k dx$  пропорциональны  $R_{k-1}$ :

$$\frac{\delta}{\delta u} \int R_k dx = \left(k - \frac{1}{2}\right) R_{k-1} \quad (7)$$

или для произвольных функций  $\frac{\delta}{\delta u} \int R dx = -\frac{\partial R}{\partial z}$ . Для доказательства варьируем операторное равенство  $\mathbf{R}(L - z) = 1$ , умножим справа на  $\mathbf{R}$  и возьмем след:

$$\delta \mathbf{R}(L - z) + \mathbf{R} \delta u = 0,$$

$$\delta \mathbf{R}(L - z) \mathbf{R} + \mathbf{R} \delta u \mathbf{R} = 0,$$

$$\text{Sp} \delta \mathbf{R} + \text{Sp} \delta u \mathbf{R}^2 = 0.$$

Но  $\mathbf{R}^2 = \partial \mathbf{R} / \partial z$ , поэтому

$$\delta \int R(x, x; z) dx + \int \delta u \frac{\partial R(x, x; z)}{\partial z} dx = 0,$$

$$\frac{\delta}{\delta u} \int R dx = -\frac{\partial R}{\partial z},$$

что и требовалось. Обозначив  $H = -2 \int R_{k+1} dx / (k + 1/2)$ , запишем уравнение (6) как

$$u_t = \frac{d}{dx} \frac{\delta}{\delta u} H. \quad (8)$$

Пусть теперь  $F[u]$  — любой функционал вида

$$\int f(u, u', \dots) dx,$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F[u] &= \int \sum_i \frac{\partial f}{\partial u^{(i)}} \dot{u}^{(i)} dx = \int \sum_i \frac{\partial f}{\partial u^{(i)}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{i+1} \frac{\delta H}{\delta u} dx = \\ &= \int \sum_i \left(-\frac{d}{dx}\right)^i \frac{\partial f}{\partial u^{(i)}} \left(\frac{\delta H}{\delta u}\right)' dx = \int \frac{\delta F}{\delta u} \left(\frac{\delta H}{\delta u}\right)' dx. \end{aligned}$$

Назовем выражение  $\int \frac{\delta F_1}{\delta u} \left( \frac{\delta F_1}{\delta u} \right)' dx$  для любых двух функционалов  $F_1, F_2$  скобками Пуассона  $\{F_1, F_2\}$ . Тогда

$$dF/dt = \{H, F\}. \quad (9)$$

Это уравнение имеет гамильтонову форму. Надо только доказать, что введенные скобки Пуассона обладают свойствами таковых: косо́й симметрией и тождеством Якоби. Доказательство последнего не совсем тривиально, здесь мы его не проводим. Указанные скобки Пуассона впервые введены Гарднером, Захаровым и Фаддеевым в 1971 г. [4, 5]. Из того, что  $J_l = \int R_l dx$  — первые интегралы, следует, что  $\{H, J_l\} = 0$ , значит  $\{J_k, J_l\} = 0$  при любых  $k, l$ , т. е. все эти первые интегралы в инволюции.

Равенство  $\{J_k, J_l\} = 0$  означает, что для всех  $k, l$  существует такой дифференциальный многочлен  $T_{k,l}$ , что

$$\frac{\delta J_k}{\delta u} \left( \frac{\delta J_l}{\delta u} \right)' = \frac{d}{dx} T_{k,l} \quad (10)$$

(интеграл от дифференциального многочлена равен нулю тогда и только тогда, когда этот дифференциальный многочлен является производной от некоторого другого).

Рассмотрим уравнение  $u_l = \sum_{k=0}^n c_k R_k'$ . Его стационарные решения удовлетворяют обыкновенному уравнению порядка  $2n-2$

$$\sum_{k=0}^n c_k R_k = 0 \quad (11)$$

(это уравнение имеет вариационную форму  $\delta H/\delta u = 0$ , где

$H = \sum_{k=0}^n c_k R_{k+1}/(k + 1/2)$ ). Поэтому это гамильтонова система. Легко

указать первые интегралы этой системы. Именно: величины

$\sum_{k=0}^n c_k T_{k+1, l+1}/(k + 1/2)$  при всех  $l$  будут таковыми в силу (10).

Из них независимы лишь те, у которых  $l = 1, \dots, n-1$ .

Мы указали первые интегралы в числе, равном половине порядка системы (11). Можно показать, что гамильтоновы формализмы нестационарного и стационарного уравнений связаны таким образом, что из инволютивности  $J_l$  следует инволютивность построения первых интегралов стационарной задачи. Тогда по теореме Лиувилля отсюда вытекает интегрируемость системы в квадратурах. Явное выражение решений через  $\theta$ -функции дано Новиковым, Дубровиным, Итсом и Матвеевым [8, 9].

2. Перейдем ко второму элементарному примеру: дифференциальный оператор теперь первого, а не второго порядка, но с матричными коэффициентами. Пусть  $L = I \frac{d}{dx} + U$ , где  $I, U$  —

матрицы порядка  $m$ , при этом  $I$  — единичная матрица, а  $U = \|u_{ik}\|$ ,  $u_{ii} = 0$ ;  $i = 1, \dots, m$ . Строим функцию Грина  $R(x, y; z)$ , т. е. ядро оператора  $(L - zA)^{-1}$ , здесь  $A$  — диагональная невырожденная матрица с неравными между собой постоянными элементами;  $R(x, y; z)$  при  $x < y$  есть некоторая матрица  $\| \varphi_i(x) \times \times \psi_j(y) \|$ , где  $\varphi$  — решение системы  $(L - zA)\varphi = 0$ , а  $\psi$  — решение сопряженной системы  $(L^* - zA)\psi = 0$ ,  $L^* = -I \frac{d}{dx} + U^*$ ,  $U^*$  — транспонированная матрица  $U$ . Легко проверить, что  $R = R(x, x; z)$  удовлетворяет уравнению

$$R' = -[U - zA, R]. \quad (12)$$

Это аналог уравнения третьего порядка (1) и также является основным уравнением теории. Нужно показать, что существует

асимптотическое разложение диагонали резольвенты  $R = \sum_0^{\infty} R_k z^{-k}$ ,

где  $R_0$  — диагональная матрица с постоянными членами, а элементы остальных матриц — дифференциальные многочлены от  $u_{ik}$ . Если прямо подставить этот ряд в (12), то мы будем рекуррентно находить недиагональные члены матриц  $R_k$  и производные от диагональных членов. Не очевидно, что существуют дифференциальные многочлены, имеющие такие производные. Нужен аналог (2) проинтегрированной формы (1). В полном смысле такого аналога нет, но следствием (12) являются уравнения

$$\text{Sp } R^l = c_l \quad (l = 1, 2, \dots), \quad (13)$$

где  $c_l$  — некоторые константы. Если взять уравнения при  $l = 1, \dots, m$ , то отсюда получаются рекуррентные соотношения для диагональных элементов, не требующие интегрирования. Набор чисел  $c_l$  ( $l = 1, \dots, m$ ) полностью определяет ряд (или, что то же самое, матрицу  $R_0$ ).

Строим производящую функцию для  $P$ -операторов. В данном случае это дифференциальный матричный оператор нулевого порядка, так как коммутатор операторов первого и нулевого порядка есть оператор нулевого порядка. Возьмем в качестве производящей функцию  $R$ . Имеем

$$[R, L] = -R' + [R, U] = [U - zA, R] + [R, U] = z[R, A].$$

Тогда лаксово уравнение  $L_t [P_k, L]$  превращается в

$$U_t = [R_{k+1}, A]. \quad (14)$$

Чтобы записать это уравнение в гамильтоновой форме, нужно и здесь установить вариационное тождество, аналогичное (7).

Это делается точно так же; получается  $\frac{\delta}{\delta U} \int \text{Sp } AR dx = -\frac{\partial}{\partial z} R^*$ , где  $\delta/\delta U$  есть матрица из  $\delta/\delta u_{ik}$ . Иначе

$$\frac{\delta}{\delta U} \int \text{Sp } AR_{k+1} dx = kR_k^*. \quad (15)$$

Если положить  $H = \int \text{Sp} A R_{k+2} dx / (k + 1)$ , то (14) примет вид

$$U_l = [(\delta H / \delta U)^*, A]. \quad (16)$$

По сравнению с (8) здесь к  $\delta H / \delta U$  вместо  $d/dx$  применен другой оператор — транспонирование и коммутирование с  $A$ . Это кососимметрический оператор относительно скалярного произведения  $\int \text{Sp} \xi^* \eta dx$ , где  $\xi, \eta$  — матричные функции. Скобки Пуассона теперь такие: если  $F = \int f dx, G = \int g dx$ , где  $f, g$  — скалярные функции, то  $\{F, G\} = \int \text{Sp} \frac{\delta F}{\delta U} \left[ \frac{\delta G}{\delta U}, A \right] dx$ .

Докажем, что скобки Пуассона величин  $J_k = \int \text{Sp} A R_k dx$  при любых двух значениях  $k$  равны нулю. Это будет означать, что все эти величины — первые интегралы нашего уравнения (14) или (16) в инволюции.

Заметим, что для любых матриц  $\text{Sp}[B, C]D = \text{Sp}[C, D]B$ . Запишем (12) для двух членов разложения в ряд

$$R'_{k-1} = -[U, R_{k-1}] + [A, R_k], \quad R'_{l-1} = -[U, R_{l-1}] + [A, R_l].$$

Умножим первое из них на  $R_{l-1}$ , второе — на  $R_{k-1}$ , сложим, возьмем след и проинтегрируем по  $x$ . Будем иметь

$$\begin{aligned} \int \text{Sp} R_{l-1} [A, R_k] dx &= - \int \text{Sp} R_{k-1} [A, R_l] dx = \\ &= \int \text{Sp} R_l [A, R_{k-1}] dx. \end{aligned}$$

Отправляясь от очевидного равенства  $[A, R_0] = 0$ , рекуррентно получим, что все  $\int \text{Sp} R_l [A, R_k] dx = 0$  или в силу (15)  $\{J_{l+1}, J_{k+1}\} = 0$  для любых  $l, k$ .

Итак, построена гамильтонова система с бесконечным набором первых интегралов в инволюции. Стационарная теория строится точно так же, как и в предыдущем случае. Заметим, что матричный случай при  $m = 2$  содержит такие важные уравнения, как нелинейное уравнение Шредингера и модифицированное уравнение КДВ.

3. Переходим к общему случаю дифференциального оператора любого порядка с матричными коэффициентами. Сформулируем без доказательств основные результаты.

Дифференциальный оператор

$$L = \sum_{k=0}^n U_k \left( \frac{d}{dx} \right)^k, \quad (17)$$

где  $U_k = \|u_{k,ij}\|$  — матрицы порядка  $m$ ;  $U_n$  — постоянная диагональная невырожденная матрица с неравными между собой диагональными элементами. Диагональные элементы  $U_{n-1}$  равны нулю. По общей схеме исследования нужно написать уравнение, которому удовлетворяет  $R(x, x; z)$  — диагональ ядра (матричного)

оператора, обратного к  $L - zI$ , где  $I$  — единичный оператор, т. е. уравнение, аналогичное (1) или (12) в двух предыдущих частных случаях. Здесь придется наряду с  $R = R(x, x; z)$  ввести еще величины

$$S_q = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^q R(x, y; z)|_{y=x} \quad (S_0 = R) \quad (18)$$

и написать систему уравнений для всей совокупности величин. Сформулируем теоремы, которые можно доказать.

**Т е о р е м а 1.**  $S_q$  разлагаются в асимптотические ряды по степеням  $z^{-1/n}$ , коэффициенты которых — дифференциальные многочлены от величин  $u_{k,ij}$ :

$$S_q = \sum_{r=-q}^{\infty} S_{q,r} z^{(-r-n+1)/n}. \quad (19)$$

При этом первый коэффициент  $S_{q,-q}$  есть постоянная диагональная матрица  $C_q$ ;  $n$  таких матриц можно выбирать произвольно, например, при  $q = 0, 1, \dots, n-1$ , остальные через них выражаются:  $C_{q+n} = C_q$ .

**Т е о р е м а 2.** Величины  $S_q$  удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{k=0}^n \sum_{\alpha=0}^k (-1)^{k-\alpha} \binom{k}{\alpha} U_k S_{k+q-\alpha}^{(\alpha)} = z S_q; \quad (20)$$

$$\sum_{k=0}^n \sum_{\alpha=0}^{k+q} (-1)^k \binom{k+q}{\alpha} S_{k+q-\alpha} U_k^{(\alpha)} = z S_q \quad (q = 0, 1, \dots).$$

Заметим, что эти уравнения выполняются при всех  $q$ , но замкнутая система получается, если взять  $q = 0, \dots, n-1$ , тогда будем иметь  $2n$  уравнений относительно величин  $S_0, S_1, \dots, S_{2n-1}$ . Из этой системы можно рекуррентно находить все коэффициенты разложения (19) начиная с произвольных постоянных матриц  $C_q$ . Правда, мы получаем не сами коэффициенты, а выражения для их производных, но по теореме 1 мы знаем, что эти выражения интегрируются в классе дифференциальных многочленов.

**Т е о р е м а 3.** Если обозначить

$$P = \sum_{l=1}^n \sum_{r=l}^n \sum_{\alpha=0}^{r-l} (-1)^{r-l} \binom{r-l}{\alpha} S_{r-l-\alpha} U_r^{(\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{l-1} (L-z)^{-1}, \quad (21)$$

то

$$[P, L] = \sum_{l=1}^n \sum_{r=l}^n \sum_{\alpha=0}^{r-l} (-1)^{r-l} \left[ \binom{r-l}{\alpha} S_{r-l-\alpha} U_r^{(\alpha)} - (-1)^\alpha \binom{r}{\alpha} U_r \times \right. \\ \left. \times S_{r-l-\alpha}^{(\alpha)} \right] \left(\frac{d}{dx}\right)^{l-1}. \quad (22)$$

Смысл этой теоремы состоит в том, что формула (21) дает выражение производящей функции  $P$ -операторов, т. е. таких диффе-

ренциальных операторов, коммутатор которых с  $L$  имеет порядок, меньший  $n$ . Оператор  $P$  имеет ту же структуру, что и оператор (5) в скалярном случае при  $n = 2$  — произведение оператора порядка  $n - 1$  на  $(L - z)^{-1}$ . При разложении его по степеням  $z^{-1/n}$  получится последовательность операторов  $P_k$  возрастающих порядков.

Теперь мы можем построить лагранжево уравнение  $L_t = [P_k, L]$ . Оно имеет вид

$$U_{l-1} = \sum_{r=l}^n \sum_{\alpha=0}^{r-l} (-1)^{r-l} \left[ \binom{r-l}{\alpha} S_{r-l-\alpha, k} U_r^{(\alpha)} - (-1)^\alpha \binom{r}{\alpha} U_r S_{r-l-\alpha, k} \right] \\ (l = 1, \dots, n). \quad (23)$$

**Т е о р е м а 4.** *Величины*

$$J_m = \int \text{Sp } S_{0, m} dx$$

*являются первыми интегралами системы (23).*

Для того чтобы придать уравнению гамильтонову форму, и здесь нужна будет теорема о вариационных производных.

**Т е о р е м а 5.** *Имеет место соотношение*

$$\frac{\delta}{\delta U_k} \int \text{Sp } S_0 dx = - \sum_{\alpha=0}^k \binom{k}{\alpha} \left( \frac{d}{dx} \right)^\alpha \frac{\partial S_{k-\alpha}^*}{\partial z}. \quad (24)$$

Эта теорема позволяет выразить правые части (23) через вариационные производные. Получается следующее.

**Т е о р е м а 6.** *Система (23) может быть записана в форме*

$$\dot{u}_r = \sum_{s=0}^{n-1-r} l_{rs} \left( \frac{\delta J_k}{\delta U_s} \right)^*, \quad (25)$$

где  $l_{rs}$  — матричные дифференциальные операторы, действующие по формуле

$$l_{rs} X = \sum_{\gamma=0}^{n-1-r-s} \left\{ \binom{\gamma+r}{r} U_{r+s+\gamma-1} \left( \frac{d}{dx} \right)^\gamma X - \right. \\ \left. - \binom{\gamma+s}{s} \left( - \frac{d}{dx} \right)^\gamma (X U_{r+s+\gamma+1}) \right\}. \quad (26)$$

**С л е д с т в и е.** Если  $F$  — функционал вида  $F = \int f dx$ , где  $f[u]$  — дифференциальный многочлен от  $u_{k,ij}$ , то в силу уравнения (25)

$$dF/dt = [F, J_k]. \quad (27)$$

Здесь мы обозначили: для  $F = \int f dx$ ,  $G = \int g dx$

$$\{F, G\} = \int \sum_{r, s} \frac{\delta F}{\delta U_r} l_{rs} \frac{\delta G}{\delta U_s} dx. \quad (28)$$

**Теорема 7.** *Билинейное выражение (28) обладает всеми свойствами скобок Пуассона в пространстве функционалов: косою симметрией и тождеством Якоби.*

Теорема 6 и ее следствие означают, что построенное уравнение гамильтоново с гамильтонианом  $J_k = \int \text{Sp} S_{0,k} dx$ .

Теорема 4 показывает, что  $\{J_k, J_m\} = 0$  при любых  $k, m$ . Отсюда следует

**Теорема 8.**  $J_m (m = 1, 2, \dots)$  образуют систему первых интегралов уравнения (23) или (25) в инволюции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Дикий Л. А.— УМН, 1975, 30, № 5, с. 67.
2. Гельфанд И. М., Дикий Л. А.— Функц. анализ, 1977, 11, № 2, с. 11.
3. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.— Phys. Rev. Lett., 1967, 19, p. 1095.
4. Gardner C. S.— J. Math. Phys., 1971, 12, p. 1548.
5. Захаров В. Е., Фадеев Л. Д.— Функц. анализ, 1974, 5, № 4, с. 18.
6. Захаров В. Е., Шабат А. В.— Функц. анализ, 1974, 8, № 3, с. 43.
7. Кричевер И. М.— УМН, 1977, 32, № 6, с. 183.
8. Дубровин Б. А., Новиков С. П.— ЖЭТФ, 1974, 67, с. 2131.
9. Итс А. В., Матвеев В. Б.— Функц. анализ, 1975, 9, № 1, с. 69.

## НЕЛИНЕЙНАЯ ВОЛНА НАМАГНИЧЕННОСТИ В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ КАК СВЯЗАННОЕ СОСТОЯНИЕ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ СИСТЕМЫ

А. М. КОСЕВИЧ, Б. А. ИВАНОВ, А. С. КОВАЛЕВ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье изложены результаты теоретических исследований, которые проводятся в последние годы в Физико-техническом институте низких температур АН УССР в связи с изучением нелинейной механики кристаллов и различных нелинейных волн в конденсированных системах. Эти исследования начались разработкой асимптотического метода нахождения самолокализованных решений уравнений колебаний ангармонического кристалла [1] и привели авторов к определенной точке зрения на ряд макроскопических задач в нелинейной среде. Мы начнем с постановки некоторых вопросов общего характера, ответы на которые мы надеялись получить, решая конкретные модельные задачи.



## Уединенная волна как связанное состояние большого числа бозонов

Основные успехи теории нелинейных волн за последние десять — пятнадцать лет связаны с решением ряда проблем, в основном физики макроскопических явлений. Эти явления часто свойственны системам, описываемым некоторыми классическими полями. Но обычно макроскопические поля являются классическим пределом квантовых бозе-систем, пределом, отвечающим большой плотности элементарных бозевых возбуждений в анализируемой среде.

Наиболее интересными объектами в нелинейных системах являются уединенные волны, или солитоны, т. е. локализованные в конечной области пространства возмущения системы. Но согласно теории элементарных возбуждений (квазичастиц) макроскопического поля локализованные в пространстве возмущения должны отвечать связанным состояниям квазичастиц. Поэтому уже давно возникла точка зрения на солитон как на связанное состояние большого числа бозонов.

Авторы неоднократно подчеркивали этот подход [2—6], вводя для характеристики локализованных решений нелинейных уравнений параметры, выражающиеся в терминах связанных бозе-частиц. Сформулированная точка зрения легче всего обосновывается и подтверждается при рассмотрении систем, в которых число соответствующих бозонов сохраняется [2, 7]. Но она оказывается оправданной и в том случае, когда число квазичастиц не сохраняется [3].

Перевод солитонных решений на язык связанных квазичастиц соответствует квазиклассическому квантованию макроскопических полей и позволяет сформулировать ряд вопросов, разъяснение которых приводит к более глубокому пониманию физической природы нелинейных явлений.

### Проблема связанного состояния квазичастиц в трехмерном случае

Ясно, что связанное состояние квазичастиц возможно лишь в том случае, когда их взаимодействие имеет характер притяжения. Но даже при наличии притяжения проблема связанного состояния частиц решается по-разному в одномерной модели и в трехмерном случае. В одномерном случае спектр энергии двух притягивающихся частиц всегда обладает по крайней мере одним дискретным уровнем, отвечающим связанному состоянию пары частиц. В трехмерном пространстве возникают определенные ограничения на «связывание» частиц с квадратичным законом дисперсии. Связанное состояние пары частиц (а также трех, четырех и т. д. частиц) образуется только в том случае, если эффективный потенциал притяжения превышает некое пороговое значение.

Однако, по-видимому, можно сделать следующее общее утверждение, касающееся любых бозонов в трехмерной среде: если величина потенциала притяжения недостаточна для образования связанных пар, то найдется такое число частиц, начиная с которого сгусток частиц будет обеспечивать самосогласованное связанное состояние (кластер) даже в таком потенциале притяжения.

При малом потенциале притяжения в связанное состояние должно входить большое число частиц. Поэтому изучение подобного состояния допустимо в рамках квазиклассического описания соответствующего поля, т. е. на языке макроскопических нелинейных уравнений. Следовательно, вопрос о «связывании» частиц поля совпадает с вопросом о существовании и устойчивости трехмерного солитонного решения этих уравнений. Если такой солитон существует, то он проявляет себя как «капля квазичастиц» в газе элементарных возбуждений системы [4, 5, 8].

## 2. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ И КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ

В качестве физической системы, важной в прикладном отношении и оказавшейся весьма удобным объектом исследований, мы избрали ферромагнетик с чисто обменным взаимодействием и одноионной анизотропией. Удобство этой системы для наших исследований заключается в том, что в настоящее время одновременно существуют, с одной стороны, феноменологическая классическая теория магнитоупорядоченного кристалла как сплошной среды, описываемой полем вектора намагниченности, а с другой стороны — квантовая теория магнетика как дискретной спиновой системы, описание которой базируется на так называемом гейзенберговом гамильтониане. Параметры феноменологической теории очень простыми соотношениями связаны с параметрами гамильтониана Гейзенберга, и поэтому имеется редкая возможность одновременного описания сложных нелинейных явлений в одной и той же системе как на классическом, так и на квантовом языках.

### Описание состояния ферромагнетика в терминах намагниченности

Состояние ферромагнетика при макроскопическом рассмотрении описывается с помощью вектора плотности намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  как функции координат и времени. В исходной для нас теории ферромагнетизма длина вектора  $\mathbf{M}$  не меняется и совпадает с так называемой номинальной намагниченностью:  $M^2 = M_0^2 = \text{const}$ , где  $M_0 = 2\mu_0 s/a^3$ ;  $\mu_0$  — магнетон Бора ( $\mu_0 > 0$ );  $s$  — спин атома;  $a^3$  — атомный объем.

Пользуясь неизвестностью величины вектора  $\mathbf{M}$ , удобно записать его компоненты в виде

$$M_x = M_0 \sin \theta \cos \varphi, \quad M_y = M_0 \sin \theta \sin \varphi, \quad M_z = M_0 \cos \theta. \quad (1)$$

Таким образом, движение намагниченности сводится к некоторому неоднородному гироскопическому вращению вектора  $\mathbf{M}$ .

Конкретизация модели, позволяющая определять движение вектора  $\mathbf{M}$ , заключается в установлении (или постулировании) зависимости энергии ферромагнетика от распределения намагниченности в теле. Запишем энергию ферромагнетика в виде

$$E = \int w d\tau, \quad (2)$$

где  $d\tau$  — элемент объема, а  $w$  — функция вектора  $\mathbf{M}$  и его пространственных производных. Тогда в простейшем варианте

$$w = \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \beta (M_0^2 - M_z^2), \quad (3)$$

где  $\alpha$  — обменная постоянная,  $\beta$  — постоянная анизотропии ( $\beta > 0$ ), а ось  $z$  совпадает с осью анизотропии (с «легкой осью»).

Заметим, что, относясь к плотности энергии (3) как к характеристике реального ферромагнетика, мы должны помнить, что в ней не учтена магнитная дипольная энергия. Пренебрежение магнитодипольным взаимодействием в нашей задаче, по-видимому, допустимо в случае  $\beta \gg 4\pi$  [9].

В основном (равновесном) состоянии ферромагнетика намагниченность параллельна оси анизотропии, когда либо  $\theta = 0$ , либо  $\theta = \pi$ . Мы будем исходить из равновесного состояния  $\theta = 0$ .

### Уравнения поля намагниченности и их интегралы движения

Уравнения динамики намагниченности  $\mathbf{M}$  (уравнения Ландау—Лифшица без релаксации) в угловых переменных  $\theta$  и  $\varphi$  имеют вид [10]

$$\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{2\mu_0}{\hbar M_0} \frac{\delta w \{ \varphi, \theta \}}{\delta \varphi}, \quad \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2\mu_0}{\hbar M_0} \frac{\delta w \{ \varphi, \theta \}}{\delta \theta}, \quad (4)$$

где  $w \{ \varphi, \theta \}$  — плотность энергии (2), выраженная с помощью (1) через  $\theta$  и  $\varphi$ :

$$w \{ \varphi, \theta \} = \frac{1}{2} \alpha M_0^2 [(\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla \varphi)^2] + \frac{1}{2} \beta M_0^2 \sin^2 \theta. \quad (5)$$

Уравнениям (4) можно сопоставить функцию Лагранжа с плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar M_0}{2\mu_0} (1 - \cos \theta) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - w \{ \varphi, \theta \}, \quad (6)$$

рассматривая сами уравнения (5) как уравнения для двух полей  $\theta(\mathbf{r}, t)$  и  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ , обладающих плотностью функции Лагранжа (5).

Уравнения (4) обладают интегралом движения

$$N = \frac{1}{2\mu_0} \int (M_0 - M_z) d\tau = \frac{M_0}{2\mu_0} \int (1 - \cos \theta) d\tau, \quad (7)$$

имеющим смысл числа спиновых отклонений (числа магнонов), соответствующих заданному распределению намагниченности.

Предположение о целочисленном значении  $N$  отвечает квазиклассическому квантованию поля намагниченности в ферромагнетике (по предположению  $N \gg 1$ ).

Мы будем интересоваться локализованными неоднородными состояниями ферромагнетика, в которых намагниченность отклоняется от равновесного значения лишь в конечной области пространства, т. е. будем искать такие решения уравнений (4), у которых  $\theta = 0$ , а градиент  $\nabla\varphi$  ограничен на бесконечности.

Уравнения (4) допускают локализованные решения вида

$$\theta = \theta(\mathbf{r} - \mathbf{V}t), \quad \varphi = \psi(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) + \omega t, \quad (8)$$

где  $\mathbf{V}$  — постоянная скорость перемещения локализованного состояния, а  $\omega$  — постоянная частота прецессии вектора  $\mathbf{M}$  в системе координат, движущейся со скоростью  $\mathbf{V}$ .

Функции  $\theta(\mathbf{r})$  и  $\psi(\mathbf{r})$  находятся из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} \Delta\theta - \sin\theta \cos\theta \left[ 1 + \frac{\alpha}{\beta} (\nabla\psi)^2 \right] + \frac{\sin\theta}{\omega_0} (\omega - \mathbf{V}\nabla\psi) &= 0; \\ \frac{\alpha}{\beta} \nabla(\sin^2\theta \nabla\psi) - \frac{\mathbf{V}}{\omega_0} \nabla \cos\theta &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\hbar\omega_0 = 2\mu_0\beta M_0$  — частота однородного ферромагнитного резонанса.

Таким образом, существуют двухпараметрические решения уравнений (4), описывающие перемещающуюся с постоянной скоростью нелинейную волну намагниченности (два параметра — это  $\mathbf{V}$  и  $\omega$ ).

Любому локализованному решению отвечает определенное конечное значение  $N$ , поэтому такому решению мы можем сопоставить связанное состояние  $N$  магнонов.

Локализованные решения, помимо  $N$ , характеризуются еще одним векторным интегралом движения, являющимся импульсом поля намагниченности. Этот интеграл движения легко находится на основании лагранжевого формализма теории поля, и в нашем случае он равен

$$\mathbf{P} = - \frac{\hbar M_0}{2\mu_0} \int (\nabla\varphi) (1 - \cos\theta) d\tau. \quad (10)$$

Импульс поля намагниченности можно рассматривать как суммарный импульс связанных магнонов в локализованной волне.

### Гамильтоновы уравнения движения для двухпараметрических самолокализованных состояний

Имея конкретные двухпараметрические решения уравнений (4), мы можем использовать формулы (7) и (10) для установления соотношений, связывающих параметры  $\omega$  и  $\mathbf{V}$  с интегралами движения  $N$  и  $\mathbf{P}$ . Следовательно, мы сможем выразить энергию самоло-

кализированных состояний через  $N$  и  $P$ :  $E = E(N, P)$ . Ниже это будет сделано в явном виде.

Но мы хотели бы обратить внимание на то, что, даже не имея явных решений уравнений (4), но учитывая их локализацию, можно установить определенные дифференциальные соотношения между  $\omega$ ,  $V$  и  $N, P$ .

Рассмотрим изменение энергии (2) при малых вариациях функций  $\theta$  и  $\psi$ , используя выражение (5) и возможность интегрировать по частям, опуская обращающиеся в нуль внеинтегральные члены:

$$\delta E = M_0^2 \int \{-\alpha \Delta \theta + \sin \theta \cos \theta [\beta + \alpha (\nabla \psi)^2]\} \delta \theta d\tau + M_0^2 \int \alpha (\sin^2 \theta \nabla \psi) \nabla \delta \psi d\tau. \quad (11)$$

Учтем уравнения (4) и перепишем (11) в следующем виде:

$$\delta E = (M_0 \hbar / 2\mu_0) \omega \int \sin \theta \delta \theta d\tau - V (M_0 \hbar / 2\mu_0) \int \{(1 - \cos \theta) (\nabla \delta \psi) + \sin \theta (\nabla \psi) \delta \theta\} d\tau. \quad (12)$$

Принимая во внимание, что

$$\delta N = (M_0 / 2\mu_0) \int \sin \theta \delta \theta d\tau, \\ \delta P = -(M_0 \hbar / 2\mu_0) \int \{(1 - \cos \theta) (\nabla \delta \psi) + \sin \theta (\nabla \psi) \delta \theta\} d\tau,$$

мы приходим к соотношению

$$\delta E = \hbar \omega \delta N + V \delta P. \quad (13)$$

Таким образом, для любой самолокализованной волны намагниченности вида (8) справедливы дифференциальные соотношения

$$\hbar \omega = dE(N, P) / dN, \quad V = \partial E(N, P) / \partial P. \quad (14)$$

Первое из соотношений (14) определяет квантовомеханический смысл величины  $\omega$ : при увеличении числа магнонов в связанном состоянии на единицу энергии состояния возрастает на  $\hbar \omega(N, P)$ . Следовательно,  $\hbar \omega(N, P)$  является минимальной энергией квазичастицы в ферромагнетике, содержащем связанное состояние большого числа магнонов.

Второе соотношение (14) устанавливает характерную для механики частиц связь между скоростью и импульсом, вытекающую из уравнения Гамильтона

$$dX/dt = \partial \mathcal{H}(P, X) / \partial P, \quad (15)$$

где  $X$  — координата частицы ( $V = dX/dt$ ), а  $\mathcal{H}(P, X)$  — ее функция Гамильтона.

В нашей задаче энергия локализованной волны не зависит от положения ее «центра тяжести», и поэтому второе уравнение Гамильтона, сопряженное (15), а именно

$$dP/dt = -\partial \mathcal{H}(P) / \partial X = -\partial E(P, N) / \partial X = 0,$$

представляет собой запись закона сохранения импульса волны.

### 3. НЕЛИНЕЙНАЯ ЛОКАЛИЗОВАННАЯ ВОЛНА НАМАГНИЧЕННОСТИ В ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЕ

Изучение локализованных решений для нелинейной волны намагниченности естественно начинать со случая, когда они зависят лишь от одной пространственной координаты и времени (плоская волна в трехмерном пространстве или волна в одномерном ферромагнетике).

#### Область существования двухпараметрического локализованного решения

Пусть решения уравнений (4) зависят от координаты  $\xi$  и времени <sup>1</sup>. Тогда дифференциальные уравнения в частных производных (4) становятся обыкновенными и возможно их полное интегрирование. Из второго уравнения (4) в предположении об ограниченности  $d\psi/d\xi$  на бесконечности следует

$$\frac{d\psi}{d\xi} = -\frac{\beta V}{2\alpha\omega_0} \frac{1}{\cos^2(\theta/2)}. \quad (16)$$

После подстановки (16) в первое из уравнений (4) мы получаем нелинейное уравнение для  $\theta$ , которое допускает явное решение, описывающее локализованную волну намагниченности. Это решение, естественно, зависит от двух параметров  $V$  и  $\omega$ , входящих в систему уравнений (4).

Но прежде чем выписать само решение, отметим, что оно существует при тех значениях параметров  $V$ ,  $\omega$ , которые удовлетворяют неравенству

$$\frac{\alpha}{\beta} \kappa^2(V, \omega) = 1 - \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{V}{2\omega_0}\right)^2 > 0. \quad (17)$$

На плоскости  $(V, \omega)$  область существования локализованного решения находится под параболой  $\kappa(V, \omega) = 0$  (линия  $A\omega_0A$  на рис. 1). Для выяснения физического смысла этой параболы рассмотрим длинноволновой предел закона дисперсии свободного магнона <sup>2</sup>

$$\tilde{\omega}(k) = \omega_0(1 + \alpha k^2/\beta), \quad (18)$$

где  $\tilde{\omega}(k)$  — частота магнона в лабораторной системе, а  $k$  — его волновой вектор. Легко проверить, что в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью магнона  $v = d\tilde{\omega}/dk = 2\alpha\omega_0 k/\beta$ , час-

<sup>1</sup> Мы ввели обозначение  $\xi$ , так как пространственные координаты не входят явно в функцию Лагранжа (6) и направление волны может быть произвольным по отношению к направлению оси анизотропии (ось  $z$ ).

<sup>2</sup> Под свободным магномом мы понимаем гармонически зависящее от координаты и времени решение линеаризованных по  $\theta$  уравнений (4)  $\theta = \theta_0 = \text{const}$ ,  $\varphi = \omega t - kx$ .

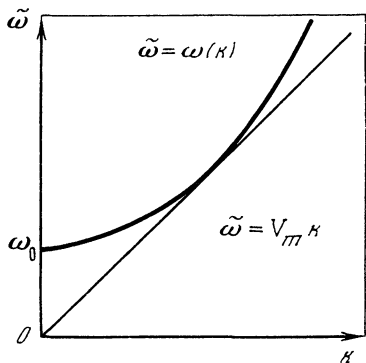
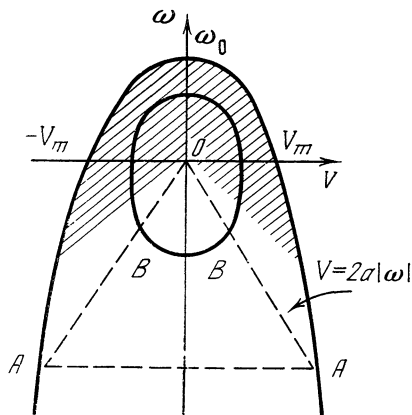


Рис. 1. Область существования одномерного самолокализованного колебания

Рис. 2. Закон дисперсии спиновых волн в нелинейном приближении

тота магнона  $\omega = \tilde{\omega} - kv$  удовлетворяет равенству  $\kappa(v, \omega) = 0$ , где  $\kappa$  определяется выражением (17). Таким образом, парабола  $A\omega_0A$  на рис. 1, ограничивающая область существования локальных решений, соответствует краю сплошного спектра линейного уравнения. Заметим, что скорость  $V_m = 2\omega_0\sqrt{\alpha/\beta}$ , при которой кривая  $A\omega_0A$  пересекает ось  $\omega = 0$ , есть минимальная фазовая скорость магнонов с законом дисперсии (18) (рис. 2).

### Анализ двухпараметрических солитонов

Вернемся теперь к явной записи локализованного решения. Наиболее компактная запись для функции  $\theta = \theta(\xi - Vt)$  получается, если перейти от параметров  $V$  и  $\omega$  к интегралам движения  $P$  и  $N$  по формулам (10) и (7):

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sh}^2(N/N_1) + \sin^2(\pi P/2P_0)}{\operatorname{ch}^2 \kappa(\xi - Vt) - \sin^2(\pi P/2P_0)}. \quad (19)$$

Здесь  $N_1 = (2a^2 M_0/\mu_0)\sqrt{\alpha/\beta}$  и  $P_0 = \pi \hbar a^2 M_0/\mu_0$  (обычно в ферромагнетиках  $N_1 \gg 1$ , а  $P_0 \sim \hbar/a$ ).

Из выражения (19) следует, что при  $N_1 \gg N$  найденное решение локализовано в области  $\Delta \xi \sim 1/\kappa$ , где

$$\kappa(P, N) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \operatorname{th} \frac{N}{N_1} \left[ 1 + \frac{\sin^2(\pi P/2P_0)}{\operatorname{sh}^2(N/N_1)} \right]. \quad (20)$$

При  $N \gg N_1$  область локализации выглядит так:

$$\Delta \xi = \frac{1}{\kappa} \frac{N}{N_1} \approx \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{N}{N_1}. \quad (21)$$

В узкой области вблизи границы  $\kappa(\omega, V) = 0$  выражение (19) упрощается;  $\operatorname{tg}(\theta/2)$  можно заменить его аргументом, а  $P$  и  $N$  устремить к нулю, оставляя конечным отношение  $(P/N)$ . При этом в основном приближении отношение  $(P/N)$  совпадает с импульсом свободного магнона, движущегося со скоростью  $V$ :  $\hbar k = Vm_0^*$ , где  $m_0^*$  — эффективная масса свободного магнона, равная  $\hbar\beta/2\alpha\omega_0$ . Функция  $\theta(\xi - Vt)$  приобретает стандартный солитонный вид

$$\theta = V \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \left[ 1 + \left( \frac{V}{V_m} \right)^2 \right]} \frac{\kappa}{\operatorname{ch} \kappa(\xi - Vt)} \quad \left( \kappa \ll V \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right), \quad (22)$$

а изменение фазы такое же, как и у свободного магнона, движущегося с групповой скоростью  $V$ . Солитон (22) представляет основной член асимптотического разложения решения по малому параметру  $\kappa$ , полученного в работе [11].

Для того чтобы выяснить характер решения при разных значениях  $N$  и  $P$ , выпишем соотношения между параметрами  $V$ ,  $\omega$  и  $P$ ,  $N$ :

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \left( \cos \frac{\pi P}{2P_0} / \operatorname{ch} \frac{N}{N_1} \right)^2 - \left( \sin \frac{\pi P}{2P_0} / \operatorname{sh} \frac{N}{N_1} \right)^2; \quad (23)$$

$$\frac{V}{V_m} = \sin \frac{\pi P}{P_0} / \operatorname{sh} \frac{2N}{N_1}. \quad (24)$$

Из этих выражений вытекает, что линия, соответствующая постоянному числу  $N$ , представляет эллипс, охватывающий начало координат  $\omega = V = 0$  (линия  $BB$  на рис. 1). С ростом  $N$  эллипс стягивается вокруг начала координат. Одновременно меняется вид решения. В отличие от (22) нелинейная волна намагниченности при  $N \gg N_1$  имеет вид движущегося со скоростью  $V$  участка длиной  $L \approx \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{N}{N_1}$ , на котором  $\theta \simeq \pi$  и который ограничен с обеих сторон переходными областями шириной  $l_0 \approx \sqrt{\alpha/\beta}$ . Размер перемагниченной области  $L$  растет пропорционально  $N$ , и в особой точке  $\omega = V = 0$  ( $N = \infty$ ) это решение превращается в уединенную покоящуюся доменную стенку

$$\operatorname{tg}(\theta/2) = \exp \left[ V \sqrt{\beta/\alpha} (\xi - \xi_0) \right].$$

Так как мы пренебрегли магнитодипольным взаимодействием, то в нашей модели может существовать лишь неподвижная доменная стенка.

Изменению  $P$  при постоянном  $N$  соответствует движение по эллипсу  $BB$  от полуоси  $V = 0$ ,  $\omega > 0$  ( $P = 0$ ) к полуоси  $V = 0$ ,  $\omega < 0$  ( $P = P_0$ ).

Решение с  $P = 0$  ( $V = 0$ ,  $\omega > 0$ ) соответствует неподвижному самолокализованному колебанию

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\omega_0 - \omega}{\omega}} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sqrt{1 - \frac{\omega}{\omega_0}} \xi \right).$$



Оно было получено в [5]. Его функциональное отличие от (19) связано с отсутствием галилеевой инвариантности у исходных динамических уравнений (4). Движущийся магнитный солитон без прецессии ( $\omega = 0$ ,  $V < V_m$ ) был описан в работе [12].

Хотя формально решение (19) существует во всей области внутри параболы  $\kappa(\omega, V) = 0$  на рис. 1, сами динамические уравнения (4), из которых было получено (19), имеют физический смысл лишь в длинноволновом приближении, когда размеры всех пространственных неоднородностей велики по сравнению с  $a$ . Можно показать, что длинноволновое приближение остается справедливым для решения (19) при всех  $\omega > 0$  и при  $V > -2a\omega$  для отрицательных частот (эта область заштрихована на рис. 1).

### Периодическая зависимость энергии связанного состояния от импульса

Перейдем теперь к анализу энергии движущегося самолокализованного колебания. Подставляя найденное решение (16), (19) в выражение (5) для энергии, находим

$$E(P, N) = 4a^2 M_0^2 \alpha \kappa(P, N), \quad (25)$$

где  $\kappa(P, N)$  определяется выражением (20).

Введем энергию, приходящуюся на одну частицу в нелинейной локализованной волне  $\varepsilon = E/N$ . Тогда легко убедиться, что во всей области существования самолокализованного колебания выполняется неравенство

$$\varepsilon(P, N) = E/N < \hbar \tilde{\omega}(k), \quad P = N \hbar k. \quad (26)$$

Неравенство (26) дает основание трактовать самолокализованное колебание как связанное состояние большого числа магнов.

Можно доказать и другое неравенство

$$E(P, N) < E(P - \hbar q, N - 1) + \hbar \tilde{\omega}(q), \quad (27)$$

фактически означающее отсутствие черенковского излучения при любых допустимых скоростях движения связанного состояния (в том числе и при  $V > V_m$ ).

Раскладывая выражение (25) по малым  $P$  ( $P \ll P_0$ ), можно ввести эффективную массу связанного состояния  $N$  магнов

$$E = E_0(N) + P^2/2m^*, \quad m^* = m_0^*(N_1/2) \operatorname{sh}(2N/N_1). \quad (28)$$

Естественно, что при  $N \ll N_1$  оказывается, что  $m^* \simeq Nm_0^*$  ( $m_0^*$  — введенная выше эффективная масса свободного магна).

При малых  $P$  из (24) следует также линейная связь  $P$  и  $V$ :

$$P = m^*(N)V.$$

Любопытной особенностью выражения (25) является наличие периодической зависимости  $E$  от  $P$  с периодом  $2P_0$ . Импульс

волны превращается в квазиимпульс, которому формально соответствует возникновение некоторой структуры в непрерывной магнитной среде с характерным линейным размером  $\Delta x = a(\mu_0/a^3 M_0)$ . Фактически появление такого линейного размера связано с наличием максимально возможной плотности магновов, т. е. плотности числа перевернутых спинов вдоль одномерного магнетика.

### 【Сопоставление со спиновыми комплексами Бете

Представляет интерес сравнение наших результатов с точным квантовым расчетом энергии связанного состояния  $N$  магновов с суммарным импульсом  $P$ , проведенным Бете [13]. Поскольку Бете изучал изотропную ферромагнитную цепочку атомов со спином  $1/2$ , в наших формулах следует положить  $\beta = 0$  и  $s = 1/2$ . Кроме того, сравнивая энергию длинноволнового одномагнитного возбуждения в квантовой задаче [13] с энергией свободного магнона в нашей модели, необходимо выразить феноменологическую константу  $\alpha$  через величину обменного интеграла для соседних спинов  $I$ :

$$\alpha = \frac{a^2}{4\mu_0 M_0} I. \quad (29)$$

С учетом (29) при  $\beta = 0$  и  $s = 1/2$  энергия (25) переходит в выражение

$$E(P, N) = (2I/N) \sin^2(aP/2\hbar), \quad (30)$$

в точности совпадающее с энергией, полученной Бете.

Таким образом, в рассмотренной нами задаче квазиклассическое квантование дает выражение для энергии, в точности совпадающее с результатами последовательного квантовомеханического расчета.

## 4. ТРЕХМЕРНЫЙ МАГНИТНЫЙ СОЛИТОН («МАГНОННАЯ КАПЛЯ»)

В этом разделе мы проанализируем трехмерные самолокализованные волны, т. е. такие возбужденные состояния ферромагнетика, в которых отклонение намагниченности от равновесного значения локализовано по всем направлениям в пространстве.

### Прецессионный солитон с неподвижным центром тяжести

Начнем с исследования неподвижного самолокализованного колебания. В одномерном случае оказалось, что  $\nabla\psi$  пропорционален скорости нелинейной волны  $V$ . Поэтому для неподвижного солитонного решения и в трехмерном случае можно положить  $\nabla\varphi = 0$ .

Следует ожидать, что в отсутствие магнитодипольного взаимодействия наименьшей энергией обладает центрально-симметричное решение, и можно искать решение в виде

$$\theta = \theta(r), \quad \varphi = \omega t. \quad (31)$$

При подстановке (31) в (4) мы получаем следующее уравнение для  $\theta(r)$ :

$$\frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dr} \right) - \sin\theta \cos\theta + \frac{\omega}{\omega_0} \sin\theta = 0. \quad (32)$$

Несмотря на то что мы не можем проинтегрировать уравнение (31) аналитическими методами, вопрос о существовании самолокализованных решений этого уравнения удастся проанализировать качественно, используя метод фазовой плоскости.

Оказывается, что, во-первых, самолокализованные решения уравнения (32) существуют при  $0 < \omega < \omega_0$ . Во-вторых, решения, исчезающие на бесконечности ( $\theta(\infty) = 0$ ) и имеющие нулевую производную в начале координат ( $\theta'(0) = 0$ ), возможны только при дискретных значениях

$$\theta(0) = \theta_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

В-третьих, только наименьшему из этих дискретных значений отвечает монотонно убывающее с ростом  $r$  решение уравнения (32). Именно это последнее решение мы нашли путем численного интегрирования<sup>3</sup> уравнения (32).

Полученное решение описывает вполне определенную неоднородную прецессию намагниченности, происходящую с угловой частотой  $\omega$ .

### Распределение намагниченности в самолокализованном состоянии

Вид распределения намагниченности при различных  $\omega$  мы проанализируем [5], обсуждая кривые на рис. 3.

*Кривая 1* ( $\omega = 0,1 \omega_0$ ). При малых  $\omega$  существует область, в которой  $\theta \approx \pi$ . Размер этой области  $R$  уменьшается с увеличением

$$R = 2\sqrt{\alpha/\beta} \omega_0/\omega.$$

Изменение намагниченности происходит в малом по сравнению с  $R$  интервале значений переменной  $r$  ( $|R - r| \sim \sqrt{\alpha/\beta}$ ). В этом интервале распределение намагниченности близко к распределению намагниченности в плоской доменной границе

$$\cos\theta(r) \approx \text{th} [\sqrt{\beta/\alpha} (r - R)].$$

<sup>3</sup> Численные расчеты были выполнены в Вычислительном центре ФТИНТ АН УССР А. А. Моторной и В. И. Хатунцевым под руководством К. В. Маслова.

Кривые 2 ( $\omega = 0,5\omega_0$ ) и 3 ( $\omega = \omega_* = 0,915\omega_0$ ). При дальнейшем увеличении частоты амплитуда самолокализованного колебания монотонно уменьшается.

Кривая 4 ( $\omega = 0,99\omega_0$ ). При  $\omega_0 - \omega \ll \omega_0$  амплитуда самолокализованного колебания с ростом  $\omega$  продолжает уменьшаться

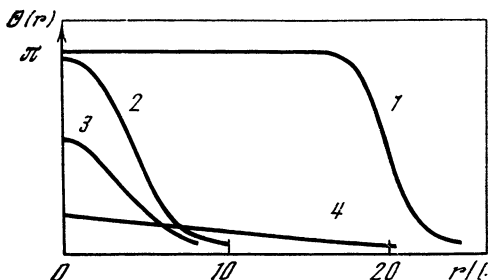


Рис. 3. Распределение намагниченности в самолокализованном колебании при различных значениях параметра

как  $\sqrt{(\omega_0 - \omega)/\omega_0}$ , а размер области локализации растет как  $\sqrt{\omega_0/(\omega_0 - \omega)}$ . Самолокализованное колебание сильно «размазано» в пространстве.

### Стабильность магнного комплекса

Весьма характерны для трехмерного локализованного состояния зависимость энергии  $E$  и числа связанных магнонов  $N$  от параметра  $\omega$ . Эти зависимости мы представим в виде кривых  $\omega = \omega(N)$  (рис. 4) и  $E = E(N)$  (рис. 5).

Оказалось, что  $\omega(N)$  и  $E(N)$  являются двузначными функциями  $N$ . График функции  $\omega(N)$  имеет вертикальную касательную при

$$\omega = \omega_* \approx 0,915 \omega_0, \quad N = N_* \approx 9,08 N_3,$$

где  $N_3 = 4\pi s(\alpha/\beta a^2)^{3/2}$ ,  $N_3 \gg 1$ , а параметр  $N_3$  — характерное число магнонов для трехмерного самолокализованного колебания.

Вид кривых на рис. 4 и 5 имеет непосредственное отношение к вопросу об устойчивости полученных нами решений. Используя метод Вахитова и Колоколова [14], мы убедились, что необходимым условием устойчивости решения относительно малых возмущений является выполнение неравенства  $d\omega(N)/dN < 0$ . Таким образом, верхние ветви самолокализованных колебаний на рис. 4 и 5 являются неустойчивыми относительно малых возмущений.

Однако квазиклассическое квантование позволяет сделать более сильные утверждения об устойчивости самолокализованных колебаний. Действительно, легко показать, что при  $N$ , близких к  $N_*$ , т. е. когда  $N - N_* \ll N$ , энергия описывается функцией

$$E(N) = E(N)_* + \hbar\omega_*(N - N_*) \pm A(N - N_*)^{3/2},$$

где  $E(N_*) = 1,034\hbar\omega_0$ ,  $A = \text{const.}$

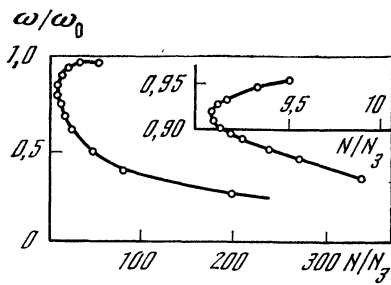


Рис. 4. Связь числа магнов в самолокализованном колебании со значением  $\omega$ . Точками обозначены результаты численного счета

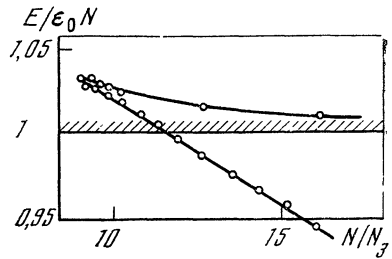


Рис. 5. Зависимость энергии самолокализованного колебания от числа спиновых отклонений

Следовательно, для всех состояний верхней ветви и состояний нижней ветви при  $N_* \leq N < N_0$  ( $N_0 = 11,3 N_3$ ) энергия, приходящаяся на один магнон, больше минимальной энергии свободного магнона, т. е. лежит выше края непрерывного спектра, а именно

$$E(N)/N < \hbar\omega_0.$$

Ясно, что стабильными относительно произвольных возмущений являются состояния, для которых запрещен энергетический распад на состояния непрерывного спектра, т. е. для которых  $E(N)/N < \hbar\omega_0$ . Таким образом, состояния нижней ветви с  $N < N_3$  являются метастабильными: они устойчивы относительно малых возмущений, но, вообще говоря, могут распадаться на состояния непрерывного спектра.

### Движение трехмерного солитона

Перейдем к исследованию движущихся самолокализованных колебаний при малых скоростях их движения ( $V \ll V_m$ ). Оказывается, что в квадратичном по скорости  $V$  приближении достаточно полное исследование решений уравнений (4) может быть проведено в общем виде без их численного интегрирования.

Будем искать решения в виде (8), сделав дополнительное предположение о виде функции  $\theta(\mathbf{r}, t)$ :

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \theta_0(R) + \eta(R),$$

где  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{V}t$ ,  $R = |\mathbf{R}|$ , а  $\theta_0(r)$  — центрально-симметричное решение уравнения (32), описывающее неподвижный солитон. Будем считать, что  $\psi(\mathbf{R})$  и  $\eta(\mathbf{R})$  малы в меру малости  $V$ , и линеаризуем уравнения (9) по  $\psi$  и  $\eta$ :

$$\frac{\alpha}{\beta} \nabla (\sin^2 \theta_0 \nabla \psi) = -\sin \theta_0 \left( \frac{V}{\omega_0} \nabla \theta_0 \right); \quad (33)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \Delta - 1 + 2 \sin^2 \theta_0 + \frac{\omega}{\omega_0} \cos \theta_0\right) \eta = \\ = \sin \theta_0 \left(\frac{V}{\omega_0} \nabla \psi\right) + \frac{\alpha}{\beta} \sin \theta_0 \cos \theta_0 (\nabla \psi)^2. \quad (34)$$

С помощью решений этих уравнений можно вычислить импульс движущегося самолокализованного колебания и зависимость его энергии от скорости.

Уравнение (33) является неоднородным линейным уравнением относительно  $\nabla \psi$ , а уравнение (34) — неоднородным линейным уравнением относительно  $\eta$ . Оказывается, что решения соответствующих однородных уравнений не дают вклада в обсуждаемые ниже зависимости, поэтому достаточно проанализировать частные решения этих уравнений, пропорциональные их правым частям.

Из (33) следует, что градиент  $\nabla \psi$  пропорционален скорости ( $\nabla \psi \sim V$ ), а тогда из (34) вытекает, что значение  $\eta$  пропорционально квадрату скорости ( $\eta \sim V^2$ ). Эти оценки помогают отобрать нужные члены в разложениях для интересующих нас физических величин, если мы будем ограничиваться первыми неисчезающими членами по степеням скорости (напоминаем, что скорость считается малой).

Энергия локализованного решения и число связанных магнонов в нем с точностью до  $V^2$  равны

$$E(\omega, V) = E(\omega, 0) + \frac{\hbar \omega M_0}{2\mu_0} \int \sin \theta_0(r) \eta \, d\tau + \\ + \frac{1}{2} \alpha M_0^2 \int \sin^2 \theta_0(r) (\nabla \psi)^2 \, d\tau; \quad (35)$$

$$N(\omega, V) = N(\omega, 0) + \frac{M_0}{2\mu_0} \int \sin \theta_0(r) \eta \, d\tau, \quad (36)$$

где  $E(\omega, 0)$  и  $N(\omega, 0)$  — это энергия неподвижного солитона и число магнонов в нем.

Импульс движущегося солитона достаточно записать в линейном по скорости приближении

$$\mathbf{P} = -\frac{\hbar M_0}{2\mu_0} \int [1 - \cos \theta_0(r)] \nabla \psi \, d\tau. \quad (37)$$

Используя разложения (35) — (37), а также уравнения движения намагниченности, нетрудно установить следующее соотношение:

$$E(\omega, V) = E(\omega, 0) + \hbar \omega [N(\omega, V) - N(\omega, 0)] + \frac{1}{2} \mathbf{P} V. \quad (38)$$

Зависимость энергии связанного состояния *заданного* числа магнонов ( $N = \text{const}$ ) от скорости (или от импульса) может быть построена на основании (36) и (38)

$$E(N, \mathbf{P}) = E(N, 0) + \frac{1}{2m_*} \mathbf{P}^2, \quad (39)$$

где  $m_*$  — эффективная масса магнонного комплекса.

Из (38) и (39) следует

$$P = m_* V.$$

Для нахождения эффективной массы движущегося локализованного решения необходимо иметь явный вид функции  $\psi(\mathbf{R})$ . Представим эту функцию в виде

$$\psi(\mathbf{R}) = \frac{(\mathbf{VR})}{R} \Phi(R). \quad (40)$$

Запись уравнения, вытекающего из (33) и описывающего  $\Phi(\mathbf{R})$ , не представляет труда. Однако оно оказывается довольно громоздким, и мы не будем его приводить. Мы ограничимся выражением для эффективной массы самолокализованного состояния

$$m_* = \frac{2\pi\hbar M_0}{3\mu_0} \int_0^\infty \sin \theta_0(R) \left( \frac{d\theta_0}{dR} \right) \Phi(R) R^2 dR,$$

предполагая, что функция  $\Phi(R)$  найдена.

Нам хотелось бы отметить два любопытных, с нашей точки зрения, обстоятельства, одно из которых обнаружилось при анализе одномерной системы, а другое выльдет как некий вывод, относящийся к трехмерному случаю.

1. Если формально считать исходные уравнения для намагниченности одномерного магнетика точными, то в результате квазиклассического квантования нелинейной волны и описания ее в механических терминах появляется периодическая зависимость энергии связанного состояния магнонов от их суммарного импульса. Импульс волны превращается в квазиимпульс.

Необычность этого результата состоит в том, что импульс волны вычисляется как импульс поля намагниченности, а намагниченность описывается дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Такое описание поля намагниченности явно предполагает однородность пространства и отсутствие в нем геометрической структуры. Само квазиклассическое квантование, основанное только на существовании интеграла движения  $N$ , связано с учетом дискретности магнитного момента и, казалось бы, не затрагивает чисто пространственных свойств системы. Однако анализ показывает, что основное состояние одномерного ферромагнетика как бы обладает некоторой структурой, проявляющейся при распространении в магнетике связанного спинового комплекса. Эта структура характеризуется линейным размером, равным  $\Delta x = \mu_0/M_1$ , где  $\mu_0$  — магнетон Бора, а  $M_1$  — номинальная намагниченность одномерного ферромагнетика (магнитный момент единицы длины). Мы видим простой физический смысл такого «параметра» структуры: он определяет максимальную плотность числа перевернутых спинов вдоль одномерного магнетика (т. е.

максимальную плотность «упаковки» магнонов и в координатном пространстве). Предположение о фиксированном значении номинальной намагниченности одномерного магнетика  $M_1$  и о наличии «кванта» магнитного момента  $\mu_0$  однозначно определяет эту плотность.

2. Анализируя вопрос о существовании связанных состояний магнонов в трехмерном ферромагнетике, мы показали, что, даже если в ферромагнетике не могут образовываться связанные состояния двух магнонов, всегда возможно образование связанных состояний большого числа магнонов. Нам представляется полезным сформулировать этот результат в более общем виде.

Амплитуда взаимодействия длинноволновых магнонов  $U$  определяется энергией магнитной анизотропии, и условие  $\beta \ll \alpha/a^2$  можно качественно интерпретировать как условие малости энергии взаимодействия магнонов по сравнению с шириной энергетической зоны свободного магнона  $\delta\varepsilon \sim (\alpha/a^2)\mu_0 M_0$ . Известно, что связанные состояния квазичастиц образуются только в том случае, если амплитуда их притяжения  $U$  превосходит некоторое критическое значение  $U_k$ , где  $U_k \sim \delta\varepsilon$ . Неравенство  $\beta \ll \alpha/a^2$  для магнонов в ферромагнетике с «легкой осью» означает, что  $U \ll U_k$ , и поэтому неудивительно отсутствие связанных состояний двух магнонов.

Однако, как мы показали, в ферромагнетике с малой анизотропией существуют связанные состояния  $N$  магнонов с  $N \geq N_0$ ,  $N_0 \sim (\alpha/\beta a^2)^{3/2}$ , что можно переписать как  $N \geq N_0 \sim (U_k/U)^{3/2}$ .

Поэтому, по-видимому, можно сделать следующее общее утверждение, касающееся любых бозевских квазичастиц в трехмерном кристалле: если величина потенциала притяжения бозонов  $U$  недостаточна для образования связанных пар ( $U < U_k$ ), то могут образоваться связанные состояния  $N$  частиц при  $N \geq N_k \sim (U_k/U)^{3/2}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Косевич А. М., Ковалев А. С.— ЖЭТФ, 1974, 67, с. 1793.
2. Ковалев А. С., Косевич А. М.— ФНТ, 1976, 2, с. 913.
3. Богдан М. М., Косевич А. М.— ФНТ, 1976, 2, с. 794.
4. Иванов Б. А., Косевич А. М.— Письма в ЖЭТФ, 1976, 24, с. 495.
5. Иванов Б. А., Косевич А. М.— ЖЭТФ, 1977, 72, с. 2000.
6. Иванов Б. А.— ФНТ, 1977, 3, с. 1036.
7. Dashen R., Hasslacher B., Neveu A.— Phys. Rev., 1975, D11, p. 3424.
8. Friedberg R., Lee T. D., Sirlin A.— Phys. Rev., 1976, D13, p. 2739.
9. Елеонский В. М., Кирова Н. Н., Кулагин И. Е.— ЖЭТФ, 1976, 71, с. 2349.
10. Хуберт А. Теория доменных стенок в упорядоченных средах. М., «Мир», 1977.
11. Волжан Е. Б., Гиоргадзе И. П., Патарая А. Д.— ФТТ, 1976, 18, с. 2546.
12. Ахизер И. А., Боровик А. Е.— ЖЭТФ, 1967, 51, с. 508.
13. Bethe H.— Z. Phys., 1931, 71, S. 205.
14. Вахитов Н. Г., Колоколов А. А.— Изв. вузов. Радиофизика, 1973, 16, с. 1020.



# УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Е. И. ЯКУБОВИЧ

1. Устойчивость стационарных или автомодельных волн в нелинейных средах приводит, как известно, к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами. В связи с этим может показаться, что сколько-нибудь общее определение инкрементов для произвольных возмущений невозможно.

Здесь имеется, однако, одно обнадеживающее обстоятельство: переменные коэффициенты в этих задачах не произвольные. Этим уже воспользовался однажды Пуанкаре применительно к задачам небесной механики. Позднее многие исследователи повторяли его соображения для анализа устойчивости стационарных волн по отношению к медленно меняющимся возмущениям.

Цель настоящей статьи — показать, что эта непроизвольность коэффициентов в уравнениях для возмущений позволяет резко упростить исследование устойчивости для значительно более широкого класса задач, чем это делалось до сих пор.

Физической основой всех последующих выкладок является то обстоятельство, что волны возмущения, мало искажая среду, распространяются в тех же условиях, что и сильные стационарные волны.

Чтобы не быть голословным, рассмотрим простой, но все же достаточно важный случай определения устойчивости стационарных волн для нелинейного волнового уравнения

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\ddot{\Phi} = F(\Phi).$$

Стационарные волны, устойчивость которых мы будем рассматривать, есть частные решения вида

$$\Phi = u(x - at) = u(\xi).$$

Уравнение для них

$$u_{\xi\xi} = F(u)/\beta, \quad (1)$$

$$\text{где } \beta = 1 - a^2/c^2.$$

Хотя об этих решениях все известно, приведем для удобства дальнейшего изложения некоторые выражения для стационарных волн

$$u_{\xi}^2 = 2 \left[ \frac{1}{\beta} \int_0^u F(u) du + C \right] = 2K(u), \quad (2)$$

т. е.  $K_u = \frac{1}{\beta} F'(u)$ . Отсюда видно, что возможны три типа стац-

онарных волн, отвечающие трем типам наборов нулей функции  $K(u)$ : а) перепад — два соседних кратных нуля, б) солитон — соседние кратный нуль и простой нуль, в) периодическая стационарная волна — два соседних простых нуля.

2. Перейдем к изучению устойчивости. Уравнение для возмущения  $e(\mathbf{r}_\perp, \xi, t)$  будет

$$\Delta_\perp e + \beta e_{\xi\xi\xi} - \frac{1}{c^2} \ddot{e} + 2 \frac{a}{c^2} \dot{e}_\xi = \frac{dF}{du}(\xi) e.$$

После преобразования Лапласа по  $t$  и Фурье по  $\mathbf{r}_\perp$  уравнение для образа  $\bar{e}$  становится обыкновенным, но с переменными коэффициентами

$$\beta \bar{e}_{\xi\xi\xi} + 2 \frac{as}{c^2} \bar{e}_\xi = \left[ F_u(\xi) + k_\perp^2 + \frac{s^2}{c^2} \right] \bar{e} + g.$$

Здесь  $g$  — выражение, зависящее от начальных условий, которое мы опустим, так как для решения (а тем более для изучения устойчивости) достаточно исследовать однородное уравнение.

Поскольку принципиальные трудности анализа связаны с переменностью коэффициента  $F_u(\xi)$ , а не с тонкостями конвективной и абсолютной неустойчивостей, мы не станем рассматривать слагаемое  $2(as/c^2) \bar{e}_\xi$ , да и вообще случай  $a \neq 0$ . Кто все же желает исследовать случай скорости  $a \neq 0$ , может произвести замену

$$\bar{e} = y \exp\left(-\frac{as}{\beta c^2} \xi\right)$$

с соответствующими изменениями граничных условий и получить уравнение для  $y$

$$y_{\xi\xi\xi} = \frac{1}{\beta} \left[ F_u(\xi) + k_\perp^2 + \frac{s^2}{c^2 - a^2} \right] y,$$

которое отличается от соответствующего уравнения для  $a = 0$  лишь масштабными коэффициентами  $\beta$  и  $c^2 - a^2$  (и, конечно, граничными условиями).

Итак,

$$y_{\xi\xi\xi} = [F_u(\xi) + \lambda] y \quad (\lambda = k_\perp^2 + s^2/c^2). \quad (3)$$

Вид функции  $F_u(\xi)$  весьма сложен. Ведь сама  $u(\xi)$  есть, вообще говоря, специальная функция от  $\xi$ . Уравнения с произвольным коэффициентом  $F_u(\xi)$  не решаются. Однако, как уже упоминалось, функция  $F_u(\xi)$  не произвольная, и это можно использовать.

Пуанкаре заметил, что при  $\lambda = 0$  возмущенное решение должно быть решением исходного уравнения. Следовательно, оно будет отличаться от  $u$  только изменением произвольных постоянных. Отсюда при  $\lambda = 0$  общим решением для  $y$  будет суперпозиция производных от  $u$  по произвольным постоянным

$$y(\xi)_{\lambda=0} = A \frac{\partial u}{\partial c_1} + B \frac{\partial u}{\partial c_2}.$$

Естественно, что Пуанкаре легко получил  $y(\xi, \lambda)$  в виде ряда по степеням малого  $\lambda$  и, ограничиваясь конечным числом членов, нашел само  $\lambda$  из граничных условий для возмущения.

3. Ну а как быть, если нас в отличие от Пуанкаре интересуют не только медленные возмущения, а любые, не только малые  $\lambda$ .

Для этого общего случая мы тоже воспользуемся произвольностью  $F_u(\xi)$  и применим такой прием.

Вместо независимой переменной  $\xi$  возьмем за новую независимую переменную  $u = u(\xi)$ . Теперь производные от  $y$  по  $\xi$  равны

$$y_\xi = u_\xi y_u, \quad y_{\xi\xi} = u_{\xi\xi} y_u + u_\xi^2 y_{uu}, \quad (4)$$

или, подставляя сюда соотношения (1) и (2) для  $u_{\xi\xi}$  и  $u_\xi^2$ , получим

$$2K y_{uu} + K_u y_u = (K_{uu} + \lambda) y. \quad (5)$$

В замене уравнения (3) этим уравнением и содержится весь смысл преобразования.

Исследовать его гораздо проще исходного. Во-первых, для написания (5) не надо знать  $u(\xi)$ . Напомним, что для нахождения  $u(\xi)$  надо уметь обращать иногда довольно сложные интегралы, а теперь нам достаточно знать лишь первый интеграл (2). Во-вторых, коэффициенты в (5) — простые функции от  $u$ : это потенциальная энергия  $K(u)$ , нелинейность  $F(u) = K_u$  и ее производная  $F_u = K_{uu}$ . Например, для наиболее популярной у физиков полиномиальной нелинейности коэффициенты в (5) будут полиномами от  $u$ . В то же время в исходном уравнении (3) коэффициентами будут гиперэллиптические функции от  $\xi$ .

Коснемся слегка неоднозначности  $\xi$  как функции  $u$ . Одному и тому же значению  $u$  могут отвечать разные значения  $\xi$ . Природа этой неоднозначности станет очевидной, если взглянуть на соотношение (2). Производная  $u_\xi$  как функция  $u$  имеет точки ветвления в нулях  $K(u)$ . Значит, чтобы и  $y(u(\xi))$  имела возможность при разных  $\xi$  иметь разные значения, достаточно, чтобы для  $y$  нули  $K(u)$  тоже были особыми точками. Но это как раз и видно из уравнения (5), так как  $K(u)$  там — коэффициент при старшей производной. Таким образом,  $y(u)$  может иметь ту же степень неоднозначности, что и  $u_\xi(u)$ .

Рассмотрим граничные условия для  $y(u)$ . Если раньше мы исследовали локализованные возмущения

$$y(\xi) \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \pm \infty, \quad (6)$$

то сейчас

$$y(u) \rightarrow 0 \text{ при } \begin{cases} u \rightarrow 0, \\ u \rightarrow u_1, \end{cases} \quad (7)$$

где 0 и  $u_1$  — предельные значения  $u(\xi)$  при  $\xi$ , стремящемся к  $\pm \infty$  соответственно. Для периодической функции  $u(\xi)$  периодичность возмущения означает, что либо  $y(u)$  — целая функция  $u$ , либо в одной или двух особых точках она ведет себя как  $u_\xi(u)$ .

4. Для конкретных исследований удобно ограничиться полиномиальной нелинейностью.

В качестве простейшего примера рассмотрим устойчивость перепада для кубичной нелинейности  $F = 2au + 3bu^2 + 4cu^3$  ( $a, b, c$  — постоянные). Для перепада необходимо наличие у  $K$  двух кратных нулей, т. е.  $K = cu^2(u - u_1)^2$ .

Уравнение для возмущения будет

$$y_{uu} + \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{u - u_1} \right) y_u = \frac{2a + 6bu + 12cu^2 + \lambda}{2cu^2(u - u_1)^2} y.$$

Для таких уравнений известно<sup>1</sup>, что в особых точках ( $u$  нас это  $u = 0, u = u_1, u = \infty$ )  $y$  ведет себя как степень  $u^\sigma, (u - u_1)^\sigma, u^{-\sigma}$ . Показатели степеней легко находятся из квадратичных уравнений, происхождение которых очевидно. Для  $u = 0$

$$\sigma(\sigma - 1) + \sigma = (2a + \lambda)/2cu_1^2 = (2a + \lambda)/2a.$$

Здесь мы учли, что  $cu_1^2 = a$ . Отсюда  $\sigma_{1,2} = \pm \sqrt{1 + \lambda/2a}$ .

Для  $u = u_1$

$$\sigma(\sigma - 1) + \sigma = (2a + 6bu_1 + 12cu_1^2 + \lambda)/2cu_1^2 = 1 + \lambda/2a,$$

$$\sigma_{1,2} = \pm \sqrt{1 + \lambda/2a},$$

т. е. показатели здесь такие же, как и в особой точке  $u = 0$ . И, наконец, при  $u \rightarrow \infty$  имеем

$$\sigma(\sigma - 1) = 6,$$

$$\text{т. е. } \sigma_1^\infty = 3, \sigma_2^\infty = -2.$$

Таким образом, вблизи точки  $u = 0$

$$y(u) = u^{\sqrt{1+\lambda/2a}} f_1(u) + u^{-\sqrt{1+\lambda/2a}} f_2(u),$$

где  $f_{1,2}(u)$  при  $u \rightarrow 0$  аналитические функции, стремящиеся к некоторым постоянным  $c_{1,2}$  при  $u \rightarrow 0$ . Вблизи точки  $u = u_1$

$$y(u) = (u - u_1)^{\sqrt{1+\lambda/2a}} f_3(u - u_1) + (u - u_1)^{-\sqrt{1+\lambda/2a}} f_4(u - u_1),$$

где  $f_{3,4}$  стремятся к постоянным  $c_{3,4}$  при  $u \rightarrow u_1$ .

Вспомним теперь граничные условия (7). Из них следует, что если  $\text{Re} \sqrt{1 + \lambda/2a} > 0$ , то произвольные постоянные надо выбрать такими, что

$$y(u) = u^{\sqrt{1+\lambda/2a}} f_1 \text{ при } u \rightarrow 0,$$

$$y(u) = (u - u_1)^{\sqrt{1+\lambda/2a}} f_3 \text{ при } u \rightarrow u_1.$$

Если это проделано, то новая функция  $W = [u(u - u_1)]^{-\sqrt{1+\lambda/2a}} y$  не будет иметь особенностей в точках  $u_1^0 = 0$  и  $u = u_1$ , а на беско-

<sup>1</sup> Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1950.

нечности будет вести себя как

$$W \sim c_5 u^{-3-2\sqrt{1+\lambda/2a}} + c_6 u^{2-2\sqrt{1+\lambda/2a}}.$$

Такие свойства функции  $W$  почти сразу же дают спектр возможных значений  $\lambda$ . Именно, неизвестный параметр  $\lambda$  для локализованных  $y$  — действительный. Тогда  $\sigma$  либо чисто действительное, либо чисто мнимое. Для локализованных  $y$   $\sigma$  не может быть чисто мнимым, но тогда в единственной особой точке функции  $W(u = \infty)$  у нее чисто действительный показатель. Он поэтому может быть только целым и неотрицательным.

Итак,

$$2(1 - \sqrt{1 + \lambda/2a}) = 0, 1, 2,$$

что соответствует  $\lambda = 0, -3/4 \cdot 2a, -2a$  или

$$s^2 + c^2 k_{\perp}^2 = 0, \quad s_{\perp}^2 + c^2 k_{\perp}^2 = -3/2 c^2 a, \quad s^2 + c^2 k_{\perp}^2 = -2c^2 a$$

(граница сплошного спектра).

Для нахождения этих дисперсных кривых нам не потребовалось ни решение  $u(\xi)$ , ни решение  $u(u)$ ! Существенно необходимы были только знания  $K(u)$  и ее производных, да и то только вблизи нулей  $K$ , и граничных условий для  $y$ . И вообще для предлагаемого метода исследования устойчивости не требуется знать решение  $u(\xi)$  (решения  $u(u)$ , разумеется, могут пригодиться).

5. Обсудим теперь область приложения метода. Ясно, что вместо волнового уравнения могло быть любое нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных. Необходимо только, чтобы в него явно не входили независимые переменные и чтобы для стационарных волн были известны все первые интегралы (решение знать не надо). Можно рассматривать, таким образом, уравнения Кортевега—де Вриза, Буссинеска, уравнения для встречных волн в нелинейной оптике и т. д.

Интересно, что при некоторых нелинейностях уравнения для возмущения после предлагаемой замены (4) решаются сразу. Так, например, для  $F(u) = \sin u$  и стационарной волны типа «перепад» уравнение (7) оказывается уравнением Лежандра.

А возможны ли обобщения? Хочется обратить внимание на одно, на наш взгляд, интересное обстоятельство. Кажалось бы, метод применим только к одномерным стационарным волнам и не применим, скажем, к исследованию устойчивости сферических или цилиндрических солитонов, так как в нелинейные уравнения будет явно входить координата  $r$ :

$$\Phi_{rr} + \frac{2}{r} \Phi_r - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} = F(\Phi).$$

Эта координата присутствует, естественно, и в уравнении для

возмущения

$$y_{rr} + \frac{2}{r} y_r = (F_u + \lambda) y,$$

и неясно, что делать с коэффициентом  $2/r$ .

Будем, однако, упрямо проводить нашу замену:

$$u_r^2 y_{uu} + \left( u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right) y_u = (F_u + \lambda) y,$$

но коэффициент при  $y_u$  равен  $F(u)$ ! Явная зависимость от  $r$  выпала:

$$u_r^2 y_{uu} + F(u) y_u = (F_u + \lambda) y.$$

Если знать зависимость  $u_r^2$  от  $u$ , можно провести исследование этого уравнения<sup>2</sup>. К сожалению, здесь находится следующая, далеко не последняя трудность на этом пути. Может быть, кому-нибудь удастся его пройти.

---

<sup>2</sup> Фактически нам надо знать лишь поведение коэффициентов уравнения вблизи их особых точек, а также вблизи нулей функции  $u_r^2(u)$ .

## ЗАТУХАНИЕ ЛАНДАУ, ВЕТРОВЫЕ ВОЛНЫ И СВИСТОК

А. А. АНДРОНОВ, А. Л. ФАБРИКАНТ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе речь пойдет об аналогии между механизмами возбуждения и поглощения волн и колебаний в электронных системах и гидродинамике и акустике.

«Взаимопомощь» гидродинамики и электромагнитной теории происходит практически с самого возникновения последней. И если вначале — это попытки построения гидродинамических моделей фундаментальных явлений [1, 2], то теперь в основном происходит обратный процесс: обогащение гидродинамики методами

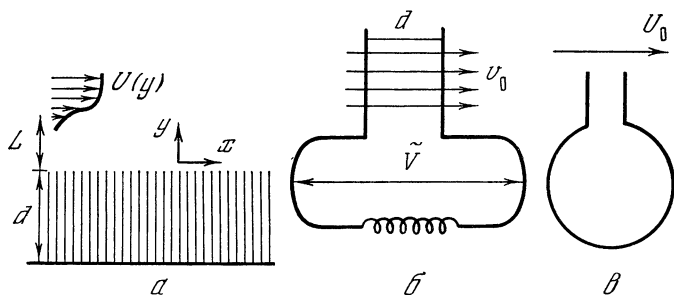


Рис. 1. Акустические и электронные генераторы  
 а — ЛВВ; б — монотрон; в — свисток

физики плазмы, электроники и т. д. [3]. Аналогия между гидродинамическими и электродинамическими явлениями в потоках частиц в том аспекте, о котором пойдет речь ниже, началась с работы Кейза [4] и обсуждалась затем Тимофеевым [5] (см. также [6]). Мы увидим, что эта связь электродинамических и гидродинамических явлений глубже, чем это отмечалось ранее. Конечно, имеются особенности, специфичные именно для гидродинамики и не имеющие электродинамических аналогов.

Рассмотренная здесь аналогия достаточно эвристична, указывает пути дальнейших обобщений, дает естественную классификацию гидродинамических явлений, явно указывая в ряде случаев на физический смысл процессов; она помогает выработать «физический взгляд» на гидродинамические явления взамен часто применяемого формально-математического подхода.

Мы собираемся показать близость механизма затухания (усиления) Ландау медленных электромагнитных волн потоками электронов и майлсовского механизма усиления поверхностных волн. Обсуждая аналогичные электронные и акустические приборы (лампы с бегущей волной (ЛБВ), свисток и монотрон (рис. 1) и др.), мы выясним сходство и различие механизмов возбуждения колебаний в них. Наконец, мы отметим общность нелинейных явлений в потоках жидкости и плазменных пучках и рассмотрим, что эта «плазменно-гидродинамическая» аналогия дает для ветровых волн.

## 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН С ЭЛЕКТРОННЫМИ ПОТОКАМИ

Напомним известные результаты [7, 8] теории усиления (затухания) электромагнитных полей в электронных системах. Ограничимся самым простым случаем: одномерные системы и продольные поля.

### Линейная теория

Чтобы найти величину затухания или нарастания монохроматического продольного поля

$$\mathbf{E} = (0, 0, E_z), \quad E_z = E_0 \exp(i\omega t - ikz) \quad (1)$$

в системе свободных электронов с функцией распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(v_z)$ , необходимо решить линеаризованное кинетическое уравнение

$$i(\omega - kv_z)f + \frac{eE_z}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} = 0, \quad (2)$$

найти ток  $j = e \int f v_z dv_z$  и определить проводимость

$$\sigma = - \frac{e^2}{m} \int \frac{\partial f_0 / \partial v_z}{i(\omega - kv_z)} dv_z. \quad (3)$$

Условие усиления поля (1) будет  $\text{Re } \sigma < 0$ . В частности, мы можем считать, что  $\text{Re } \sigma$  определяет мнимую поправку (инкремент)  $\gamma$  к частоте волны  $\omega$ :  $\gamma = -\text{Im } \omega \sim -\text{Re } \sigma$ .

Правило обхода особенности в интеграле (3) (правило Ландау) получается при решении начальной задачи методом Лапласа [9]. При этом рассматривается растущее ( $\text{Im } \omega < 0$ ) поле, а при аналитическом продолжении решения на действительные  $\omega$  контур



интегрирования в (3) должен деформироваться, отступать при приближении особенностей подынтегрального выражения, оставаясь все время сверху последних. Это дает правило обхода Ландау при действительных  $\omega$  и  $k$ : контур интегрирования в (3) должен обходить особенность  $\omega = kv_z$  сверху. Символически это можно записать в виде

$$\frac{1}{\omega - kv_z} = P \frac{1}{\omega - kv_z} - i\pi\delta(\omega - kv_z), \quad (4)$$

где  $P$  — знак главного значения;  $\delta$  — функция Дирака.

В результате  $\text{Re } \sigma$  определяется полувычетом подынтегрального выражения

$$\text{Re } \sigma = - \frac{\pi e^2}{m} \left( \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right)_{v_z = \omega/k}.$$

Отметим, что то же самое правило обхода и то же выражение для  $\text{Re } \sigma$  в этом случае можно получить, если ввести в правую часть (2) член вида  $-\nu f$ , моделирующий столкновения, а затем устремить  $\nu$  к нулю.

Таким образом, знак  $\text{Re } \sigma$  определяется производной от функции распределения по скоростям при синхронизме скорости частиц и фазовой скорости волны. Это связано фактически с тем, что величина работы, совершаемой слабой волной над частицами, определяется тем, каких частиц при  $v_z \approx v_\phi \equiv \omega/k$  больше: обгоняющих волну или отстающих от нее. Если обгоняющих частиц больше ( $\partial f_0 / \partial v_z > 0$ ), то волна нарастает. В результате в холодной плазме, на фоне которой движется «теплый» пучок (рис. 2), волны 1 и 3 затухают, а волна 2 растет.

Если пучок становится моноскоростным  $f \rightarrow \delta(v_z - v_0)$ , то  $\text{Re } \sigma \rightarrow \infty$  при  $\omega/k \simeq v_0$  и соотношение  $\gamma \sim -\text{Re } \sigma$  уже не годится, так как оно справедливо при  $\text{Re } \sigma \ll \text{Im } \sigma$ . В этом случае можно, однако, рассмотреть дисперсионное уравнение продольных волн в плазме с таким пучком. Это уравнение ( $\varepsilon_l = 0$ , см. ниже) можно привести к виду

$$(\omega^2 - \omega_p^2) (\omega - kv_0)^2 = \omega_b^2 \omega^2,$$

где  $\omega_p$  — плазменная частота неподвижной плазмы,  $\omega_b$  — плазменная частота пучка, а  $v_0$  — его скорость. При  $\omega_b = 0$  это пересекающиеся дисперсионные кривые волн в плазме и в пучке. Вырождение в точке пересечения снимается при  $\omega_b \neq 0$ , и в окрестности этой точки  $k = \omega/v_0$  возникает неустойчивость. При  $\omega_b \ll \omega_p$  ее максимальный инкремент [6]

$$\gamma \equiv -\text{Im } \omega = \frac{\sqrt{3}}{4} \omega_p \left( \frac{\omega_b}{\omega_p} \right)^{1/3}.$$

Эта пучковая неустойчивость называется «гидродинамической», поскольку в этом случае весь пучок как целое принимает участие в создании инкремента (в отличие от кинетической неустойчивости

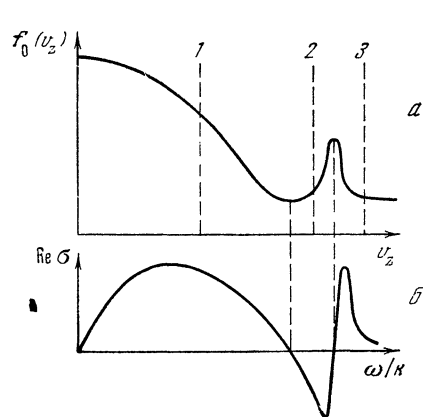


Рис. 2. Функция распределения частиц по скоростям  $f_0(v_z)$  и проводимость  $\sigma$  в плазме с пучком электронов

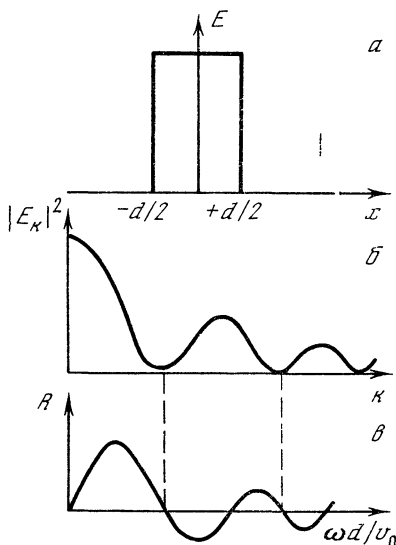


Рис. 3. Электрическое поле  $E$ , спектр мощности поля  $|E_k|^2$  и сопротивление  $R$  моноотрона

теплого пучка (см. рис. 2), где «работают» лишь резонансные частицы:  $v_z = \omega/k$ ). Именно «гидродинамическая» неустойчивость такого типа используется в лампах с бегущей волной для усиления СВЧ-колебаний.

Так описывается усиление в системах заряженных частиц для монохроматических плоских волн. Рассмотрим теперь немонахроматические поля, связанные с системами конечных размеров. Примером такой системы может служить электронный промежуток — плоский конденсатор, пронизываемый пучком электронов, к которому приложено гармоническое напряжение  $\bar{V}$  (см. рис. 1, б). Электрическое поле такого промежутка гармоническое во времени, но имеет сплошной пространственный спектр (рис. 3). Ясно, что для нахождения проводимости  $\sigma_{\text{пр}}$  промежутка необходимо проинтегрировать работу, совершаемую отдельными спектральными компонентами поля, поэтому

$$\text{Re } \sigma_{\text{пр}} \propto \int \text{Re } \sigma(\omega, k) |E_k|^2 dk.$$

Поскольку  $\text{Re } \sigma(\omega, k)$  при фазовых скоростях, близких к скорости пучка ( $\omega/k \approx v_0$ ), знакопеременна (см. рис. 2), ясно, что знак  $\text{Re } \sigma_{\text{пр}}$  зависит от того, каких составляющих в спектре  $|E_k|^2$  больше: тех, у которых  $\omega/k > v_0$ , или тех, у которых  $\omega/k < v_0$ , т. е. фактически от производной  $(\partial |E_k|^2 / \partial k)_{k=\omega/v_0}$ . Это легко можно получить и непосредственно, если рассмотреть моноскоростной пучок, у которого  $\sigma(\omega, k) = -\frac{\omega_b^2}{v_0} \frac{\partial}{\partial k} \delta(\omega - kv_0)$ . В результате

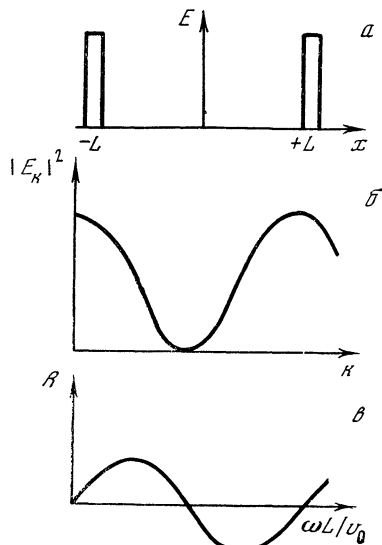


Рис. 4. Структура электрического поля  $E$ , спектр мощности поля  $|E_k|^2$  и сопротивление  $R$  клистрона

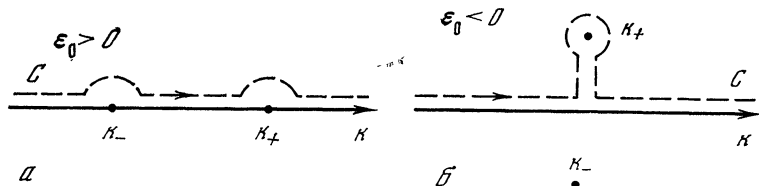


Рис. 5. Путь интегрирования в комплексной плоскости  $k$  для монотрона в плазме

придем к известному выражению для сопротивления электронного промежутка (монотрона)

$$R = \frac{4\pi d}{\omega S} \frac{\omega_b^2}{\omega^2} \frac{\varphi_0 \sin \varphi_0 + 2 \cos \varphi_0 - 2}{\varphi_0}, \quad (5)$$

где  $S$  — площадь пластин монотрона;  $\varphi_0 = \omega d/v_0$  — «угол пролета» — параметр, от которого зависит знак сопротивления (см. рис. 3).

На рис. 4 приведены структура поля, пространственный спектр и сопротивление для другого СВЧ-прибора — пролетного клистрона [10, 11]. Мы видим, что в этих системах производная от спектра поля в точке резонанса играет ту роль, которую играла производная функции распределения частиц в случае монохроматической волны.

Полный импеданс  $Z = R + iX$  для электронного промежутка можно найти, например, методом Фурье. Фактически только этот метод и может быть использован ниже в гидродинамических задачах. Поэтому и при рассмотрении монотрона мы воспользуемся им же, хотя такой путь расчета нетрадиционен (ср. [10–12]).

Вычисляя из уравнения Пуассона с зарядом, сосредоточенным на пластинах промежутка, и с диэлектрической проницаемостью пучка  $\epsilon_l = 1 - \omega_b^2/(\omega - kv_0)^2$  разность потенциалов между пластинами, получим [12, 13]

$$Z = \frac{8}{i\omega S} \int \frac{\sin^2(kd/2)}{k^2 \epsilon_l(\omega, k)} dk. \quad (6)$$

Сопротивление промежутка  $R = \text{Re } Z$  определяется полюсами подынтегрального выражения при  $\epsilon_l = 0$  на действительной оси  $k$  в точках  $k_{\pm} = \omega/v_0 \pm \omega_p/v_0$ . Правило обхода (сверху, рис. 5, а) этих полюсов можно получить тем же способом, как и правило Ландау, решая начальную задачу. Другой способ — ввести малую диссипацию в диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_l$ . При  $\omega_p \rightarrow 0$  оба полюса сливаются в один (второго порядка), и мы получаем выражение (5) для  $R$ .

Рассмотрим теперь электронный промежуток, помещенный в плазму с пучком. Плазма с пучком — неустойчивая система даже без учета влияния промежутка. Мы, однако, будем считать, что в монотрон влетает невозмущенный пучок, а развитие пучковой неустойчивости начинается лишь с момента влета и определяется возмущениями поля, наводимыми зарядом на пластинах.

Диэлектрическая проницаемость пучка в плазме [6]

$$\epsilon_l = 1 - \omega_p^2/\omega^2 - \omega_b^2/(\omega - kv_0)^2$$

при  $\omega < \omega_p$  не имеет нулей на действительной оси  $k$ . Из (6), казалось бы, следует  $R = 0$ . Однако из физических соображений очевидно, что при  $\omega_b \rightarrow 0$  структура высокочастотного поля в промежутке будет отличаться от поля «классического» монотрона лишь множителем  $\epsilon_0^{-1} = (1 - \omega_p^2/\omega^2)^{-1}$ . Поэтому сопротивление промежутка в этом случае должно отличаться от сопротивления в отсутствие плазмы на множитель  $\epsilon_0^{-2}$ . Почему же мы не получили этого результата?

Дело в том, что контур интегрирования в (6) не есть действительная ось  $k$ . При  $\epsilon_0 < 0$  мы снова должны решать начальную задачу, пользуясь методом Лапласа. Аналитически продолжая решение из нижней полуплоскости  $\omega$ , мы должны деформировать контур интегрирования в (6) так, чтобы он все время был выше полюсов:  $k = k_{\pm} = \omega/v_0 \pm i\omega_l/v_0 \sqrt{-\epsilon_0}$ . В результате при действительных  $\omega$  мы приходим к контуру на рис. 5, б. Сопротивление  $R$  определяется вычетом в полюсе  $k_+ = \omega_p/v_0 + i\omega_b/v_0 \sqrt{|\epsilon_0|}$ .

С уменьшением  $\omega_b$  полюса  $k_{\pm}$  двигаются к действительной оси, так что в пределе  $\omega_b \rightarrow 0$  мы будем иметь один полюс второго порядка на действительной оси, сопротивление промежутка будет отличаться от значения (5) лишь множителем  $|\epsilon_0|^{-2}$ .

Этот пример применения правила Ландау нам кажется наиболее интересным, так как на действительной оси нет «подозрительных» точек. Ясно, что контур на рис. 5, б не может быть получен из

контура вдоль действительной оси с помощью учета малой диссипации. Его, однако, можно получить, рассматривая граничную задачу для промежутка, предполагая, что влетающий в промежуток пучок невозмущен.

Отметим, что развитие пучковой неустойчивости (соответствующей полюсу  $k_+$ ) здесь играет ту же роль, какую в «классическом» монотроне играет группировка электронов — собственные колебания пучка. Таким образом, для возникновения  $R < 0$  в промежутке важно наличие собственных колебаний пучка; являются же они затухающими или нарастающими — несущественно.

Мы увидим ниже, что именно электронный промежуток в плазме с пучком является наиболее близким электронным аналогом свистка. В свистке возмущения давления на открытом конце резонатора взаимодействуют с неустойчивыми возмущениями в гидродинамическом потоке. Поэтому исследованная выше модификация монотрона поможет нам понять механизм работы свистка.

### Нелинейные эффекты

При резонансном взаимодействии монохроматических плоских волн с электронами наиболее сильное взаимодействие возникает прежде всего для электронов со скоростями порядка фазовой скорости волны. В результате основным нелинейным эффектом здесь является искажение функции распределения частиц в окрестности резонансного уровня и установление так называемого «плато» [7, 8] — такого распределения электронов, в котором  $df/dv \rightarrow 0$  и, следовательно, декремент затухания или инкремент неустойчивости стремится к нулю.

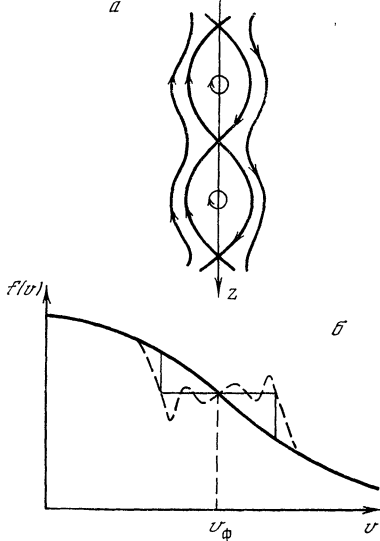
На рис. 6 показано установление «плато» в пучке под действием монохроматической волны. Здесь изображены осцилляции функции распределения из-за движения электронов по фазовым траекториям. С течением времени происходит фазовое перемешивание [7, 8], и вместо осцилляции устанавливается «плато». Характерное время установления  $\tau_0 = \Omega_0^{-1}$ , где  $\Omega_0 = \sqrt{2} eE_0/k$  — частота колебаний электронов по замкнутым фазовым траекториям ( $E_0$  — амплитуда волны).

На рис. 7 показано установление «плато» в поле со сплошным спектром фазовых скоростей. Так называемое квазилинейное уравнение, описывающее установление «плато» в этом случае, — это уравнение фоккер-планковского типа с коэффициентом диффузии, пропорциональным спектру мощности поля  $|E_k|^2$ . Время установления плато  $\tau_0$  — это характерное время диффузии электронов в пространстве скоростей на величину порядка ширины области взаимодействия  $\Delta v$ .

Таким образом, за счет нелинейных эффектов в области резонанса ( $v \approx \omega/k$ ) инкремент (или декремент) волны обращается в нуль за время установления «плато»  $\sim \tau_0$ . Ситуация изменяется, если имеются релаксационные процессы, восстанавливающие

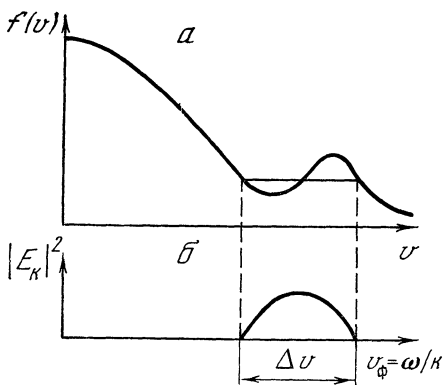
**Рис. 6.** Динамика функции распределения частиц по скоростям в поле монохроматической плазменной волны

- a* — траектории частиц в фазовом пространстве;  
*б* — установление «плато» (пунктир — осцилляции функции распределения, приводящие к перемешиванию фаз)

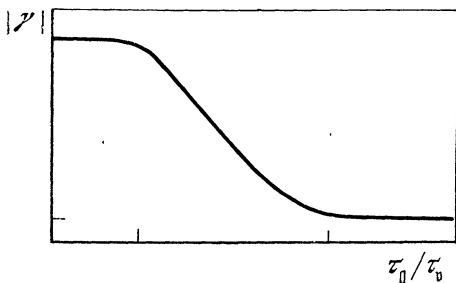


**Рис. 7.** Квазилинейная релаксация функции распределения

*a* — установление «плато»;  
*б* — спектр возбуждаемых плазменных волн



**Рис. 8.** Декремент затухания плазменных волн



равновесный вид функции распределения. Тогда вместо «плато» установится конечный наклон  $\partial f/\partial v \neq 0$ , величина которого зависит от соотношения времени установления плато  $\tau_0$  и характерного времени  $\tau_p$  релаксационных процессов в системе электронов. В результате инкремент зависит от амплитуды поля. Качественный характер этой зависимости дан на рис. 8.

Иная ситуация возникает для систем типа электронного промежутка. Здесь поле ограничено в пространстве: электроны влетают в поле, а затем вылетают из него. Нелинейная группировка электронов происходит в переменном поле на ограниченном отрезке времени. При этом процессы релаксации в системе электронов не играют практически никакой роли.

Часто в таких случаях структуру и частоту переменного поля можно считать заданными. Тогда, рассматривая движение электронов в заданном поле, можно найти зависимость проводимости от амплитуды поля, а также найти оптимальные параметры системы. Такое исследование наиболее просто для клистрона, поскольку нелинейная группировка электронов здесь происходит в области, свободной от поля [10, 11].

### 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН С ГИДРОДИНАМИЧЕСКИМ ПОТОКОМ

Задача исследования обмена энергией колебаний и волн с течением возникает в гидродинамике естественным образом. Различного рода течения являются одним из основных источников энергии для всевозможных волновых движений в океане и атмосфере. Неудивительно поэтому, что колебания неоднородных течений жидкости и газа обсуждаются уже давно.

Для прояснения физического смысла различного рода эффектов взаимодействия волн с потоками необходимо рассмотреть простые и наглядные ситуации. В частности, естественно выделить системы, где волна и поток в достаточной степени независимы, так что связь между ними можно считать в некотором смысле малой. В физике плазмы столь простая ситуация возникает, например, когда на фоне неподвижной плазмы, «несущей» волну, движется слабый пучок неравновесных частиц. Поскольку в классической гидродинамике скорость в данной точке определяется однозначно, то здесь невозможна одномерная система, где неравновесные частицы существовали бы на фоне неподвижной «несущей» среды. Частицы среды, движущиеся с разными скоростями, должны быть разнесены в пространстве. Поэтому в гидродинамике простейшие задачи такого типа двумерны.

Возможны два достаточно простых типа гидродинамических задач, где волна в каком-то смысле независима от потока. Это, во-первых, случай, когда волна поверхностного типа удалена от потока и взаимодействие определяется лишь ее экспоненциально-малым «хвостом». Во-вторых, это отражение и преломление волны,

падающей извне на поток. Здесь падающая волна считается заданной, а отраженная волна распространяется в неподвижной среде, так что коэффициент отражения служит удобной и наглядной характеристикой взаимодействия.

Мы обсудим здесь лишь первый случай, для второго случая существенны эффекты сжимаемости, которые усложняют картину. Конечно, здесь имеются интересные явления [15—17], сопоставление которых с соответствующими эффектами в электродинамике [18, 19] также безусловно интересно.

### Малые колебания плоскопараллельного потока

Пусть в двумерном течении скорость направлена по координате  $x$ , а величина ее меняется в зависимости от координаты  $y$ :  $v_0 = (U(y), 0, 0)$ . Уравнения для малых двумерных возмущений скорости  $v = (u, v)$  и давления  $p$ , линеаризованные относительно плоскопараллельного потока несжимаемой жидкости с профилем скорости  $U(y)$  [14]:

$$\begin{aligned} u_t + Uu_x + U_y v + p_x/\rho &= \nu(u_{xx} + u_{yy}); \\ v_t + Uv_x + p_y/\rho &= \nu(v_{xx} + v_{yy}); \\ u_x + v_y &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь нижние индексы означают соответствующие производные;  $\rho$  — постоянная плотность;  $\nu$  — кинетическая вязкость жидкости.

Взяв решение (7) в виде  $p, v \sim \exp(i\omega t - ikx)$ , для амплитуды  $y$ -компоненты скорости  $v(\omega, k, y)$  можно получить уравнение Ора—Зоммерфельда [14, 20]

$$\left(U - \frac{\omega}{k}\right)(v_{yy} - k^2 v) - U_{yy} v = -\frac{i\nu}{k} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - 2k^2 v_{yy} + |k^4 v\right). \quad (8)$$

Далее мы всюду будем исследовать такие явления, в которых вязкая диссипация явным образом не фигурирует.

Для невязкого течения мы получаем тогда уравнение Релея [21]

$$v_{yy} - k^2 v - \frac{U_{yy}}{U - \omega/k} v = 0 \quad (9)$$

или уравнение для амплитуды колебаний давления [14]

$$p_{yy} - \frac{2U_y}{U - \omega/k} p_y - k^2 p = 0. \quad (10)$$

Характерной чертой этих уравнений является наличие особых точек  $y_c$ , где скорость потока совпадает с фазовой скоростью возмущений  $U(y_c) = \omega/k$ . Для плазменных волн такой резонанс скорости частиц с фазовой скоростью приводит к особенностям в выражении для проводимости  $\sigma(\omega, k)$ . В двумерной гидродинамической задаче частицы разной скорости находятся на разных уровнях  $y$ , и поэтому особая точка возникает в дифференциальном уравнении.



С точки зрения аналитической теории дифференциальных уравнений [22] эти особенности являются логарифмическими точками ветвления, если  $u_c$  не совпадает с точкой перегиба профиля скорости, т. е.  $U_{yy}(u_c) \neq 0$ . При решении граничных задач теории гидродинамической устойчивости [14, 20] и в других задачах малых колебаний плоскопараллельного потока встает вопрос о связи аналитических решений по обе стороны от  $u_c$ . Решение этого вопроса дано Линем [20] и Вазовым ([23] и ссылки там же). Метод их исследования основан на учете малой вязкости и асимптотическом разложении решений уравнения Орра—Зоммерфельда (8) по малому параметру  $\nu$ . Результат можно кратко резюмировать следующим образом.

Решение уравнения Релея является предельным случаем вязкого решения, полученного из уравнения Орра—Зоммерфельда при  $\nu \rightarrow 0$ , если выбирать ветви многозначного невязкого решения вблизи точек ветвления  $u_c$ , пользуясь правилом обхода Линя: *точки  $u_c$  обходятся сверху в комплексной плоскости  $u$ , если  $U_y(u_c) > 0$ , и снизу, если  $U_y(u_c) < 0$ .*

Следует отметить, что и для ленгмюровских волн учет малой диссипации (столкновений частиц) снимает резонансную особенность в выражении для проводимости  $\sigma(\omega, k)$  и позволяет получить правило обхода Ландау. Однако вязкой диссипации в гидродинамике соответствует старшая производная в уравнении Орра—Зоммерфельда. Асимптотическое решение дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной (задача сингулярных возмущений [23]) является относительно сложным. В то же время правило обхода Линя можно получить и в рамках невязкой задачи, если воспользоваться традиционно «плазменным» способом: решать начальную задачу, пользуясь преобразованием Лапласа [4, 24]. При этом должны рассматриваться комплексные  $\omega$  в полуплоскости  $\text{Im } \omega < 0$ , что соответствует растущим решениям. Правило обхода Линя возникает естественным образом при аналитическом продолжении решения на действительные значения  $\omega$ .

При использовании метода Лапласа выявляется глубокая аналогия с плазменной задачей, решенной Ландау [9]; аналогия не только в конечном результате — правиле обхода, но и в различных эффектах, связанных, в частности, с поведением решений из непрерывного спектра (см., например, [5, 25]).

Наличие резонансных точек с соответствующим правилом обхода определяет механизм обмена энергией малого возмущения со средним потоком. Отметим, что резонансный механизм затухания (либо усиления) волн не связан непосредственно с вязкой диссипацией, поэтому резонансное взаимодействие появляется в идеальной жидкости. Ниже мы рассмотрим это взаимодействие на простых примерах, где будет видно сходство с соответствующими задачами физики плазмы.

## Резонансное взаимодействие замедленных волн с гидродинамическим течением

Резонансное взаимодействие замедленных волн с плоскопараллельным потоком впервые было рассмотрено Майлсом [26] для случая возбуждения гравитационных волн ветром. Его работу мы обсудим несколько позже, а сейчас рассмотрим влияние течения на акустические поверхностные волны, распространяющиеся вдоль замедляющих структур, хорошо известных в акустике [27—29]. При описании направляющих свойств таких структур удобно использовать понятие поверхностного импеданса  $Z(\omega, k)$ . В акустике эту величину можно определить как

$$Z(\omega, k) = [p(\omega, k)/v(\omega, k)]_{y=0}. \quad (11)$$

В качестве примера замедляющей системы может служить «гребенка» (см. рис. 1, *a*), которая представляет собой последовательность акустических резонаторов. Поля на их открытых концах связаны так, что вдоль «гребенки» может бежать поверхностная волна с фазовой скоростью  $v_\phi \ll c_s$  ( $c_s$  — скорость звука) [28, 29]. Импеданс «гребенки», вычисленный для поверхности  $y = 0$ , примыкающей к открытым концам резонаторов, имеет вид [27]

$$Z = ic_s \rho c_t g(\omega d/c_s), \quad (12)$$

где  $d$  — глубина «гребенки».

Экспериментальное исследование влияния потока на распространение поверхностной волны вдоль периодической структуры [30] показало возможность усиления волны дозвуковыми струями. Считая скорость потока  $U \ll c_s$ , мы будем ниже рассматривать несжимаемую жидкость; величина  $c_s$  войдет лишь в выражение для импеданса (12).

**Усиление замедленной волны.** Рассмотрим плоскопараллельный поток над «гребенкой» (см. рис. 1, *a*). Для расчета усиления (либо ослабления) поверхностной волны над гребенкой необходимо исследовать соответствующую граничную задачу в полуплоскости  $y > 0$ , используя на поверхности  $y = 0$  граничное условие (11) импедансного типа.

В области, где течение отсутствует (вблизи «гребенки»), уравнение (10) упрощается и амплитуда давления  $p(\omega, k, y)$  подчиняется уравнению  $p_{yy} - k^2 p = 0$ , решение которого

$$p = A(\omega, k) e^{ky} + B(\omega, k) e^{-ky}. \quad (13)$$

Выразим из уравнений движения (7) амплитуду скорости  $v = ip_y/\omega\rho$ . Используя выражение для импеданса  $Z(\omega, k)$ , мы получим дисперсионное уравнение для волн в системе «гребенка — поток»

$$\omega + \frac{ik}{\rho} Z(\omega, k) = r(\omega, k) \left[ \frac{ik}{\rho} Z(\omega, k) - \omega \right], \quad (14)$$

где величина коэффициента отражения для возмущений давления  $r(\omega, k) \equiv A/B$  полностью определяет влияние потока на поверхностную волну. Когда течение отсутствует, коэффициент отражения  $r(\omega, k) = 0$ , и мы получаем свободную поверхностную волну, частота которой удовлетворяет дисперсионному уравнению

$$\omega_0 + (ik/\rho) Z(\omega_0, k) = 0. \quad (15)$$

Заметим, что дисперсионное уравнение (14) описывает не только поверхностную волну на гребенке, модифицированную влиянием потока, но также и собственные колебания потока. Сво-

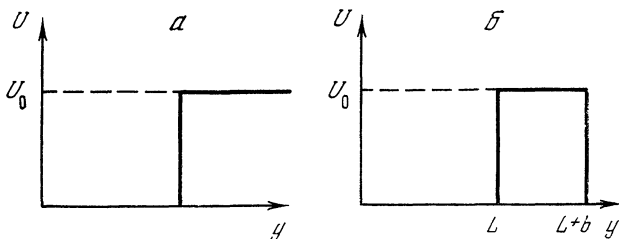


Рис. 9. Профили скорости моноскоростных течений  
а — тангенциальный разрыв; б — струя

бодные плоскопараллельные течения (например, струя, тангенциальный разрыв, слой сдвига и т. д.), как правило, неустойчивы [14]. Комплексные частоты колебаний свободного потока определяются полюсами коэффициента отражения  $r(\omega, k)$ . Присутствие же гребенки не меняет качественно собственных колебаний потока — они остаются неустойчивыми.

Нас интересует лишь та мода, которая близка к свободной поверхностной волне. Разделение двух типов колебаний становится очевидным, когда поток и гребенка связаны слабо. Это, в частности, выполняется, когда они удалены на расстояние  $L \gg k^{-1}$ . При таком условии коэффициент отражения  $r \sim e^{-ikL}$  может служить малым параметром, и в первом приближении по величине  $r$  можно получить инкремент поверхностной волны

$$\gamma \equiv -\text{Im } \omega = \frac{2\omega_0}{1 + \partial(ikZ/\rho)/\partial\omega} \text{Im } r(\omega_0, k). \quad (16)$$

Таким образом, усиление (либо затухание) поверхностной волны за счет слабого взаимодействия с потоком пропорционально мнимой части коэффициента отражения  $\text{Im } r(\omega, k)$ .

Значение  $r(\omega, k)$  можно получить, если профиль  $U(y)$  кусочно-постоянный. Так, например, для тангенциального разрыва (рис. 9, а,  $U_0$  — величина разрыва скорости)

$$r = \frac{(\omega - kU_0)^2 - \omega^2}{(\omega - kU_0)^2 + \omega^2} e^{-2kL}, \quad (17)$$

а для струи с резкими границами (рис. 9, б,  $b$  — ширина струи)

$$r = \frac{[(\omega - kU_0)^4 - \omega^4] \operatorname{th} kb}{[(\omega - kU_0)^4 + \omega^4] \operatorname{th} kb + 2\omega^2(\omega - kU_0)^2} e^{-2kL}. \quad (18)$$

Для таких «моноскоростных» потоков  $\operatorname{Im} r(\omega, k) = 0$ , так что эти течения меняют лишь фазовую скорость поверхностной волны, не приводя к ее неустойчивости. Ниже мы обсудим это обстоятельство более подробно с точки зрения «электронной» аналогии.

В случае произвольного профиля  $U(y)$  можно получить некоторое соотношение для величины  $\operatorname{Im} r(\omega, k)$ . Для этого умножим уравнение Релея (9) на  $v^*$  и проинтегрируем его по частям [26]:

$$\int_0^{\infty} \left[ |v_y|^2 + k^2 |v|^2 + \frac{U_{yy}}{U - \omega/k} |v|^2 \right] dy = v^*(0) v_y(0). \quad (19)$$

Используя правило обхода Линя и считая, что вблизи  $y = 0$  поток отсутствует ( $U = 0$ ), а отражение от потока мало ( $r \ll 1$ ), получим

$$\pi \left[ \frac{U_{yy}}{|U_y|} \right]_{y=y_c} \left| \frac{v(y_c)}{v(0)} \right|^2 = \operatorname{Im} \frac{v_y(0)}{v(0)} \approx -2k \operatorname{Im} r(\omega, k).$$

Воспользовавшись решением уравнения (10) в виде ряда по  $(y - y_c)$  [16], мы можем из уравнения движения (ср. (7))

$$i(\omega - kU)v + p_y/\rho = 0$$

выразить  $v(y_c)$  через амплитуду давления  $p(y_c)$ . Считая  $|r| \ll 1$ , нетрудно также выразить  $v(0)$  через  $p(0)$ . Окончательно получим

$$\operatorname{Im} r(\omega, k) = -\frac{\pi\omega^2}{2k} \left[ \frac{U_{yy}}{|U_y|^3} \right]_{y=y_c} \left| \frac{p(y_c)}{p(0)} \right|^2. \quad (20)$$

Хотя отношение  $|p(y_c)/p(0)|^2$  не может быть найдено в общем виде, формула (20) сразу дает знак мнимой части коэффициента отражения  $r$  и, следовательно, условие усиления или поглощения поверхностной волны. Мнимая часть коэффициента отражения  $r$  определяется второй производной профиля в резонансной точке. Из (16), (20) мы получаем, таким образом, общий результат: вогнутые участки профиля ( $U_{yy} > 0$ ) поглощают замедленные волны, выпуклые ( $U_{yy} < 0$ ) усиливают (см. далее рис. 10). Этот результат был получен Майлсом [26] для ветровых волн.

Отношение  $|p(y_c)/p(0)|^2$  можно найти для течений с «узкими» профилями скорости — для «размытого» тангенциального разрыва или узкой струи (ширина струи  $b \ll k^{-1}$ ). В этом случае в силу непрерывности давления на разрывах  $p(y_c)$  — это значение давления перед разрывом. Последнее нетрудно найти, зная коэффициент отражения течения в целом. В результате найдем для узкого слоя сдвига («размытый» тангенциальный разрыв, см. далее рис. 10, б)

$$\operatorname{Im} r = -2 \frac{\omega^2}{k} e^{-2kL} \frac{(\omega - kU_0)^4}{[(\omega - kU_0)^2 + \omega^2]^2} \left[ \frac{\pi U_{yy}}{|U_{yy}|^3} \right]_{y=y_c}. \quad (21)$$

Коэффициент отражения узкой струи зависит от профиля скорости в струе. Поэтому мы можем получить значение  $\text{Im } r$  из (20) лишь для струи, профиль скорости которой близок к кусочно-постоянному (см. рис. 9, б), когда для полного коэффициента отражения течения мы можем использовать выражение (18).

Однако для узкой струи ( $kb \ll 1$ ) произвольного профиля можно получить значение  $r$ , используя метод срачиваемых асимптотических разложений по параметру  $kb$  [31]. При этом уравнение (10) приближенно решается в области внутри потока, где можно считать последнее слагаемое, а затем также в области вне потока, где  $U \approx \text{const}$  и мало второе слагаемое. После этого «внутреннее» и «внешнее» асимптотические разложения определенным образом «сшиваются» [32].

Таким способом можно получить и выражение (21) для размытого разрыва. Для узкой струи этот метод дает [31]

$$\text{Im } r = -\frac{\omega^2}{2k} e^{-2kL} \text{Im} \left\{ \frac{\int \left[ \frac{1}{(U - \omega/k)^2} - \frac{k^2}{\omega^2} \right] dy}{1 + \frac{\omega^2}{2k} \int \left[ \frac{1}{(U - \omega/k)^2} - \frac{k^2}{\omega^2} \right] dy} \right\}.$$

Интегрирование здесь ведется по области, где  $U_y \neq 0$ .

Мнимая часть интегралов в этом выражении определяется полюсами подынтегрального выражения в резонансных точках  $y = y_c$ , где фазовая скорость волны  $\omega/k$  совпадает со скоростью потока  $U(y_c)$ . Используя для этих полюсов правило обхода Ляна [20], получим

$$\text{Im} \int \frac{dy}{(U - \omega/k)^2} = \sum \left[ \frac{\pi U_{yy}}{|U_y|^3} \right]_{y=y_c}. \quad (22)$$

Здесь сумма берется по всем резонансным точкам профиля. Следовательно, знак мнимой части коэффициента отражения определяется второй производной профиля скорости в резонансных точках — результат, полученный выше для произвольного профиля.

Величину  $\text{Im } r(\omega, k)$  в явном виде можно найти для некоторых частных профилей скорости [31]. Например, для размытого разрыва с профилем  $U(y) = U_0 [1 + \text{th}(y - L)/l/2]$  ( $l \ll k^{-1}$ ) имеем

$$\text{Im } r = -\frac{\pi l k^2 U_0 (\omega - kU_0)(kU_0 - 2\omega)}{[(\omega - kU_0)^2 + \omega^2]^2} e^{-2kL} \quad (\omega/k < U_0),$$

а для струи с профилем  $U = U_0 \text{ch}^{-2}[(y - L)/b]$

$$\text{Im } r = -\frac{2\pi b k^2 U_0 (kU_0 - \omega)^{3/2} (kU_0 - 3\omega/2)}{4(kU_0 - \omega)^3 + \pi^2 k^3 b^2 U_0 (kU_0 - 3\omega/2)^2} e^{-2kL} \quad (\omega/k < U_0).$$

Заметим здесь, что для обоих профилей величина  $\text{Im } r$  меняет знак, когда фазовая скорость волны находится в резонансе с точкой перегиба профиля ( $U_{yy} = 0$ ). Другая характерная особенность

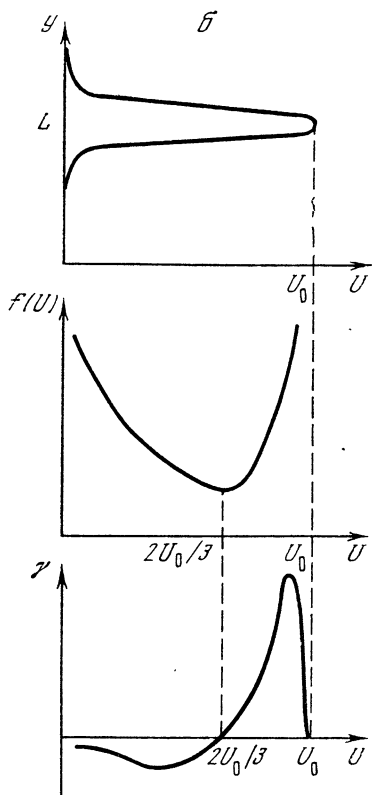
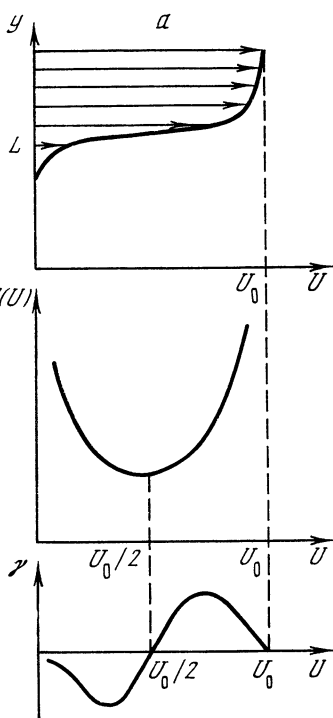


Рис. 10. Усиление замедленной волны слоем сдвига (а) и струей (б) ( $y(U)$  — профили скорости;  $f(U)$  — функции распределения, соответствующие распределению частиц по скоростям;  $\gamma$  — инкремент волны)

(рис. 10):  $\text{Im } r$  обращается в нуль при резонансе с максимумом скорости («верхушка» профиля  $\omega/k = U_0$ ). При дальнейшем увеличении фазовой скорости  $\text{Im } r \equiv 0$ , поскольку резонансные точки отсутствуют.

**Плазменно-гидродинамическая аналогия.** Рассмотренный нами механизм обмена энергией поверхностной волны с потоком основан на совпадении (резонансе) фазовой скорости волны со скоростью потока и особенностях течения на резонансном уровне. Чтобы проследить аналогию этого механизма с резонансным затуханием (усилением) Ландау плазменных волн, введем величину, имеющую смысл функции распределения частиц по скоростям [5, 6, 17]. Для этого рассмотрим в плоскопараллельном течении объем (на единицу площади в плоскости  $xz$ ), занятый жидкостью, которая движется со скоростью в интервале  $U \div U + dU$ . Его масса

$$dm = f dU = \rho dy = (\rho / |U_y|) dU.$$

Отсюда видно, что величина  $f = \rho / |U_y|$  является функцией распределения плотности частиц по скоростям в плоскопараллельном течении (рис. 10). Производная этой величины

$$\frac{df}{dU} = \frac{df}{dy} U_y^{-1} = -\rho \frac{U_{yy}}{|U_y|^3}$$

по существу эквивалентна выражению (21), определяющему величину усиления поверхностной волны. Таким образом, сравнение с плазменным аналогом позволяет понять, почему знак инкремента усиления волны определяется второй производной профиля скорости. Каких частиц в окрестности резонансного уровня больше — обгоняющих волну или отстающих от нее — именно это, как и в плазме, определяет направление обмена энергией между волной и потоком. Разность чисел обгоняющих и отстающих частиц дается величиной  $df/dU \sim U_{yy}$ .

С точки зрения такой «плазменной» аналогии можно интерпретировать известную теорему Релея [21], согласно которой неустойчивыми являются лишь те течения идеальной жидкости, профиль которых содержит точку перегиба. Для этого воспользуемся необходимым условием кинетической неустойчивости ленгмюровских волн. Известно [6], что таким условием является наличие минимума функции распределения частиц по скоростям. Для плоскопараллельного течения экстремумы функции распределения  $f(U)$ , в которых  $df/dU = 0$  (см. рис. 10), находятся именно в точках перегиба профиля  $U(y)$  (где  $U_{yy} = 0$ ). Таким образом, теорема Релея является гидродинамическим вариантом «плазменного» критерия (ср. [6]).

Мы видим, что плазменный язык оказывается пригодным для интерпретации различных эффектов резонансного взаимодействия волн с гидродинамическим потоком.

**«Акустическая ЛБВ».** Рассмотренная нами модель гидродинамического течения над замедляющей системой напоминает устройство лампы бегущей волны (ЛБВ) [33]. Такая аналогия кажется очевидной [30]. Однако механизм усиления электромагнитных волн в ЛБВ иной, нежели в ее акустической копии.

В ЛБВ весь моноскоростной электронный пучок как целое приводит к усилению электромагнитной волны. С формальной точки зрения возникновение инкремента электромагнитной волны при взаимодействии с таким пучком связано, как мы видели ранее, с пересечением (совпадением) собственной волны ( $\omega = kU_0$ ) слабого пучка и замедленной электромагнитной волны ( $\omega = \omega(k)$ ). Собственные же колебания струи или тангенциального разрыва неустойчивы, так что дисперсионное уравнение для них ( $r^{-1}(\omega, k) = 0$ ) не имеет действительных корней. Поэтому в «акустической ЛБВ» невозможно пересечение дисперсионных кривых поверхностной волны и собственных колебаний потока. Например, для тангенциального разрыва, подставив выражение (17) для  $r(\omega, k)$  в дис-

персионное уравнение системы «гребенка — поток» (14), получим

$$\begin{aligned} & \left( \omega - c_s k \operatorname{ctg} \frac{\omega d}{c_s} \right) [(\omega - kU_0)^2 + \omega^2] = \\ & = -e^{-2kL} [(\omega - kU_0)^2 - \omega^2] \left( \omega + c_s k \operatorname{ctg} \frac{\omega d}{c_s} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку нет вырождения дисперсионных кривых колебаний на замедляющей структуре и колебаний потока (вырождения левой части уравнения), то малая ( $\sim e^{-2kL}$ ) связь волны с потоком лишь слегка деформирует дисперсионные характеристики обоих связанных колебаний. Можно показать, что и при любой величине связи корни уравнения (23), соответствующие поверхностным волнам, остаются действительными, т. е. поверхностные волны устойчивы.

Аналогичная ситуация имеет место и для струи. Хотя с уменьшением толщины струи ( $b \rightarrow 0$ ) инкремент собственных колебаний струи падает и собственные колебания струи вырождаются (приближенно  $\omega - kU_0 = 0$ ), коэффициент отражения  $r$  оказывается ограниченным при действительных  $\omega$  и  $k$ :  $|r| \lesssim e^{-2kL}$ , и сильного взаимодействия колебаний замедляющей структуры и струи не возникает.

Таким образом, «моноскоростные» гидродинамические потоки не могут усиливать (или ослаблять) замедленные монохроматические волны. Лишь в «размытом» профиле, как показано выше, величина  $\operatorname{Im} r(\omega, k)$  может быть отлична от нуля, что обеспечивает энергообмен волны с потоком. Фактически это означает, что в отличие от ЛБВ с волной взаимодействует не весь поток в целом, а лишь небольшая часть его — резонансные частицы, сосредоточенные на узких «склонах» профиля  $U(y)$ .

Чтобы создать условия, при которых все гидродинамическое течение как целое принимает участие в усилении, необходимо рассмотреть взаимодействие потока с системами, пространственно-временной спектр которых не является монохроматическим, а имеет составляющие и в области, соответствующей собственным колебаниям потока. Такая ситуация возникает в свистках.

**Возбуждение ветровых волн.** Интересным и важным примером, иллюстрирующим усиление дозвуковым потоком замедленных волн, является известный механизм Майлса генерации ветровых волн [26, 34, 35]. Этот механизм генерации наиболее хорошо изучен в настоящее время [36], и в некотором диапазоне длин волн он хорошо согласуется с экспериментом [37, 38]. Рассмотрим кратко простейшую модель, в рамках которой действует этот механизм: квазиламинарный воздушный поток над поверхностью глубокой воды.

Граница раздела сред с разной плотностью в гравитационном поле является замедляющей системой, вдоль которой могут распространяться поверхностные волны. Для волн на глубокой воде



нетрудно найти поверхностный импеданс этой замедляющей системы

$$Z(\omega, k)|_{y=0} = \frac{\rho_w \omega^2 - gk(\rho_w - \rho_a)}{i\omega k}, \quad (24)$$

где  $\rho_a$  и  $\rho_w$  — плотности воздуха и воды;  $g$  — ускорение свободного падения. Тем самым из формулы (15) определяется дисперсионное уравнение свободных гравитационных волн на глубокой воде

$$\omega^2 = gk \frac{\rho_w - \rho_a}{\rho_w + \rho_a} \approx gk.$$

Воздушный поток над водой в данной модели считается квазиламинарным. Это значит, что движение воздуха считается плоскопараллельным, а при исследовании его малых колебаний пренебрегается вязкостью и нелинейными эффектами, т. е. используется уравнение Релея для амплитуды колебаний скорости. В то же время профиль скорости  $U(y)$  невозмущенного течения выбирается таким, который реализуется для средней скорости турбулентного пограничного слоя над гладкой твердой поверхностью — так называемый логарифмический погранслой [39]:

$$U(y) = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{\beta v}. \quad (25)$$

Здесь  $\beta = 0,09$  и  $\kappa = 0,4$  — константы;  $v_*$  — характерная скорость турбулентного погранслоя. Таким образом, наличие турбулентных пульсаций в ветре (не связанных с поверхностными волнами) учитывается лишь при выборе профиля скорости плоскопараллельного потока и игнорируется при исследовании малых колебаний этого потока. Это допущение является, конечно, произвольным, хотя при некоторых условиях его можно оправдать [36].

Приняв такие приближения, мы пришли тем самым к рассмотренной выше модели плоскопараллельного потока идеальной жидкости над замедляющей структурой. Поскольку, однако, поток здесь нельзя считать удаленным от замедляющей поверхности (логарифмический погранслой прилегает «вплотную» к водной поверхности), мы не можем считать малой величину  $r(\omega, k)$  и воспользоваться полученной выше формулой (16) для инкремента поверхностной волны. Чтобы найти величину инкремента усиления, необходимо, следуя Майлсу [26], взять за основу интегральное соотношение (19), полученное из уравнения Релея, и подставить в него значение (24) импеданса поверхности глубокой воды. В результате получим

$$\gamma = - \frac{\rho_a}{\rho_w} \frac{\pi \omega^3}{2k} \left[ \frac{U_{yy}}{|U_y|^3} \right]_{y=y_c} \left| \frac{p(y_c)}{p(0)} \right|^2.$$

Вычисление величины майлсовского инкремента для логарифмического профиля (25) [35] дает в ряде случаев значения, близкие к экспериментальным.

Однако в большинстве случаев, важных для геофизики, простая квазиламинарная невязкая модель Майлса является недостаточно полной [36]. При сильном ветре в процессе передачи энергии от ветра волнам практически всегда важную роль играют нелинейные эффекты (как в воде, так и в воздухе) [40]. При слабом ветре существенную роль играет вязкость воздуха; в частности, инкремент ветровых волн, вычисленный с учетом последней, определяет критическое волновое число и критическую скорость ветра [34].

#### 4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОЛЕБАНИЙ В АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ С ПОТОКОМ И ТЕОРИЯ СВИСТКА

В аэродинамических генераторах звука (свистках) звук возбуждается за счет колебательного движения частиц газа, которое не связано с колебаниями границ и сохраняется, даже если границы неподвижны [41]. Отсутствие движущихся частей в аэродинамических генераторах дает им в некоторых случаях преимущество по сравнению с механическими излучателями. Помимо бытовых и сигнальных применений (свисток Гальтона на паровозах, полицейские свистки и т. д.), свистки широко используются в современной технологии [42, 43]. И, конечно, наиболее известно применение аэродинамических генераторов в музыке. Флейта, орган и некоторые другие музыкальные инструменты представляют собой различные варианты свистков.

Следует отметить, что аэродинамическая генерация является во многих случаях паразитным явлением. Самопроизвольная генерация мощного свиста часто сопровождает работу различных устройств, приводя в некоторых случаях даже к их разрушению [43]. Контролировать эти звуки можно, лишь поняв процесс их генерации.

История экспериментального и теоретического изучения свистков насчитывает сотни лет. Например, первое описание эоловой арфы (самопроизвольное звучание струн под действием ветра) относится к 1650 г. [2]. Практический же опыт создания духовых музыкальных инструментов уходит в глубокую древность [44—47]. К настоящему времени разработано и исследовано множество различных типов аэродинамических генераторов. Механизмы работы различных свистков могут существенно отличаться. Ниже будет рассмотрен «классический» свисток: резонатор, обтекаемый потоком воздуха, — простейшая модель органной трубы. Такой тип свистка имеет существенное преимущество, необходимое, в частности, для музыкальных инструментов: стабильность частоты, определяемой резонатором. Отметим также, что рассмотренная выше акустическая ЛБВ — это тоже свисток (свисток бегущей волны).

## Спонтанная и вынужденная генерация звука

Движение частиц жидкости или газа, приводящее к излучению звука, может быть обусловлено различными причинами. Одной из основных причин такого движения является турбулентность, сопровождающаяся возникновением вихревого движения частиц. Вихревое движение может быть нестационарным, может представлять собой поступательное движение вихрей или, наконец, может быть периодическим, как в случае дорожки Кармана в следе за цилиндром [21, 43].

Нестационарное движение вихрей приводит к изменению давления и, следовательно, к возбуждению звука. Это известный механизм Лайтхилла [41] возбуждения звука турбулентностью — спонтанное излучение звука турбулентностью.

Аналогичным образом нестационарное движение вихрей у резонатора или их пролет мимо него приводят к возбуждению колебаний в резонаторе. Этот случай исследовался Блохинцевым [15, 48].

Движение вихрей над замедляющей системой также способно возбудить поверхностные волны в системе. Такой механизм был предложен Филлипсом [34] как один из возможных путей возбуждения ветровых волн.

Наконец, периодическое движение вихрей в дорожке Кармана, вызывающее периодическую силу, действующую на цилиндр, также может привести к возбуждению звука. В частности, это является причиной гудения телеграфных проводов на ветру.

Все эти примеры — это примеры спонтанного излучения звука (излучения заданными вихрями). Здесь нет механизма обратной связи звук—вихрь, когда возникший звук сам в свою очередь приводит к возникновению вихревого движения. Необходимость такой обратной связи для эффективного излучения звука была осознана, конечно, уже давно (см., например, [43, 49, 50, 83, 84]). В частности, рассмотренная нами выше «акустическая ЛБВ» — это пример системы, где такая обратная связь имеется. Ниже мы кратко рассмотрим механизм самовозбуждения свистка с резонатором (подробное изложение см. в [31]).

### Самовозбуждение резонатора в потоке

Если от «гребенки» (см. рис. 1) оставить лишь один резонатор, то мы получим простейший свисток — органную трубу (двумерную), обтекаемую стационарным потоком (см. рис. 11). Нас будет интересовать влияние потока на коэффициент отражения основной моды волновода от открытого конца. Этот волновод может быть не обязательно органной трубой, но, например, горловиной резонатора Гельмгольца (см. рис. 1) [15, 51].

Решение уравнений для малых колебаний в волноводе, соответствующее главной волне:

$$p = [e^{-ikcy} + (R + \Delta R) e^{ikcy}] e^{i\omega t}. \quad (26)$$

Здесь  $k_0 = \omega/c_s$ ;  $\Delta R$  — поправка к коэффициенту отражения  $R$ , обусловленная наличием потока. На открытом конце при  $\omega/c_s \ll 1$  находятся пучность скорости  $v$  и узел давления, причем  $R \approx -1$  [52].

Для определения коэффициента отражения от открытого конца волновода надо, вообще говоря, решать сложную дифракционную задачу [52]. Однако поправку  $\Delta R$  можно найти приближенно, если влияние потока мало. При этом, воспользовавшись найденным выше коэффициентом отражения потока  $r(\omega, k)$ , мы рассмотрим возбуждение волновода «отраженным» от потока возмущением как внешней силой.

Поскольку в отсутствие потока амплитуда колебаний давления удовлетворяет волновому уравнению  $\Delta p + k_0^2 p = 0$ , то мы можем воспользоваться теоремой взаимности, которая в данном случае имеет вид

$$\oint_{S_0} \left( p_0 \frac{\partial p_r}{\partial n} - p_r \frac{\partial p_0}{\partial n} \right) dS = 0.$$

Здесь  $p_0(\omega, x, y)$  — поле давления свободного резонатора (без потока);  $p_r(\omega, x, y)$  — возмущение, отраженное потоком. Интегрирование ведется по замкнутой границе  $S_0$  области, не содержащей источников. Поскольку задача двумерна,  $S_0$  — кривая на плоскости  $xy$ . Выберем ее такой, как показано пунктиром на рис. 11 (радиус замыкающей дуги  $R_i \rightarrow \infty$ ).

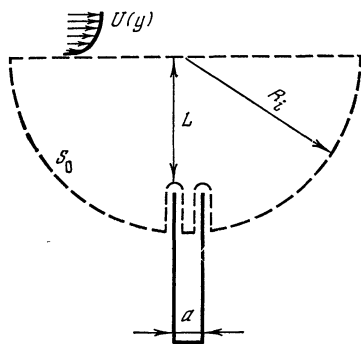


Рис. 11. Простейший свисток — отрезок органной трубы в потоке

Пунктир — путь интегрирования при вычислении инкремента

Интегрирование по такому контуру (при  $R_i \rightarrow \infty$ ) позволяет связать решение (26) внутри резонатора и фурье-образ решения (13) над открытым концом. Если поток расположен на расстоянии  $L \ll c_s/\omega$  от конца волновода, то можно использовать полученные выше выражения  $r(\omega, k)$  для несжимаемой жидкости. При этом выражение  $\Delta R$  получается в виде [31]

$$\Delta R = \frac{2\pi i \omega}{a c_s} \int W r(\omega, k) e^{-2\kappa L} \frac{dk}{\kappa}. \quad (27)$$

Здесь  $\kappa = \sqrt{k^2}$  (при действительном  $k$  имеем  $\kappa = |k|$ ),  $W = [v(\omega, k, y)v(\omega, -k, y)]_{y=L}$ ,  $v(\omega, k, y)$  — фурье-амплитуда  $y$ -компоненты скорости  $y$  свободного резонатора (без учета влияния потока) при условии, что волна, приходящая из волновода, имеет единичную амплитуду колебаний скорости. Для действительного  $k$  имеем  $W = |v(\omega, k, y = L)|^2$ .

Отметим, что на расстоянии  $r \gg a$  от открытого конца для величины  $v(\omega, k, y)$  в идеальной несжимаемой жидкости можно использовать приближенное выражение (см., например, [53])

$$v_r = a/2\pi r, \quad v_\varphi = 0, \quad (28)$$

где  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты.

Остановимся теперь на выборе пути интегрирования в полученном выражении. Этот выбор может быть сделан из рассмотрения начальной задачи — процесса включения колебаний в резонаторе. Используя при этом метод Лапласа, мы должны рассматривать комплексные значения  $\omega$ , лежащие далеко в нижней полуплоскости, так, чтобы все полюса в подынтегральном выражении (27) лежали в нижней полуплоскости комплексного  $k$ . Тогда интегрирование можно производить по действительной оси  $k$ .

Для того же чтобы аналитически продолжить полученное нами решение на действительные  $\omega$ , необходимо деформировать путь интегрирования в комплексной плоскости  $k$ , дополнив действительную ось петлями, обходящими полюса в верхней полуплоскости (см. рис. 5, б). Наличие ветвления функции  $\kappa(k) = \sqrt{k^2}$  ( $\text{Re } \kappa > 0$ ) не влияет на выбор пути, так как петли в комплексной плоскости не пересекают разрезы.

Тождественность этих рассуждений с теми, которые были проведены в разделе 3, совершенно очевидна. Такое правило обхода использовано в исследованиях излучения источников звука вблизи тангенциального разрыва [85, 86].

Рассмотрим теперь возбуждение резонатора. Зная коэффициент отражения от открытого конца, нетрудно получить инкремент неустойчивости колебаний в резонаторе

$$\gamma = -\frac{\omega}{n} \text{Re}(\Delta R) = \frac{2\pi\omega^2}{anc_s} \text{Im} \int W r(\omega, k) e^{-2\kappa L} \frac{dk}{\kappa},$$

где  $n = \omega d/2\pi c_s$  — число длин волн, укладываемых в резонаторе.

Для «моноскоростных» течений (см. рис. 9) интегрирование по действительной оси  $k$  не дает вклада в инкремент, так как при действительном  $k$   $r(\omega, k)$  не имеет полюсов и  $\text{Im } r(\omega, k) = 0$ . Инкремент определяется лишь полюсами  $r(\omega, k)$  в верхней полуплоскости комплексных  $k$ .

Для тангенциального разрыва при условии  $a \ll L$  мы можем использовать приближенное выражение (28) амплитуды скорости

и получить

$$\gamma = - \frac{\omega}{4\sqrt{2}n} \left( \frac{\omega a}{c_s} \right) \exp \left( - \frac{2\omega L}{U_0} \right) \sin \left( \frac{2\omega L}{U_0} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Величина и знак инкремента зависят от параметра  $\omega L/U_0$ . Он определяет развитие на длине  $L$  (длина «пробега» возмущения потока мимо резонатора) кельвин-гельмгольцевской неустойчивости разрыва, возбуждаемой открытым концом. Знакопеременный характер инкремента связан с тем, что фаза неустойчивого возмущения зависит от расстояния до разрыва, ибо волновой вектор кельвин-гельмгольцевской поверхностной волны на разрыве комплексный.

Следует отметить, что учет малого «размытия» моноскоростных течений (тангенциального разрыва, а также рассматриваемой ниже струи) приведет лишь к незначительному изменению величины инкремента. В процессе усиления колебаний резонатора (со сплошным спектром по  $x$ ) участвует весь поток в целом, а не только «склоны» профиля скорости.

Для «моноскоростной» струи (см. рис. 9, б) два полюса  $r(\omega, k)$  в верхней полуплоскости  $k$  соответствуют симметричной и асимметричной (изгибной) неустойчивым модам струи [14]. Если струя узкая, то изгибная мода вносит малый ( $\sim \exp[-2(\omega^2 L^3/bU_0^2)^{1/2}]$ ) вклад в инкремент. Величина инкремента определяется лишь неустойчивостью симметричной моды и равна

$$\gamma = \frac{\pi^2 \omega}{na^3} \frac{\omega^3 a^2 b}{c_s U_0^2} \frac{\partial}{\partial k} [|v(\omega, k, y=L)|^2 e^{-2kL}]_{k=\omega/U_0}.$$

Таким образом, в случае тонкой струи вклад в инкремент колебаний дают те гармоники спектра поля резонатора, «дошедшего» до струи, которые синхронны со скоростью струи, причем величина инкремента зависит от деталей спектра вблизи синхронного волнового числа  $k = \omega/U_0$ . Такого рода зависимость типична, как мы видели, для электронных приборов — монодрона и клистрона.

Действительно, величина и знак инкремента определяются производной от спектра поля скорости, взятой в точке резонанса с «моноскоростным» потоком,  $\omega/k = U_0$ . Правда, в то время как колебания свободного электронного потока устойчивы и им соответствуют в выражении для импеданса (6) полюса на действительной оси  $k$ , для свистка соответствующие полюса комплексны, ибо колебания потока неустойчивы. Лишь в случае тонкой струи неустойчивость симметричной моды мала ( $\text{Im } k \sim (\omega^3 b/U^3)^{1/2}$ ), так что полюс  $r(\omega, k)$  близок к действительной оси. Отсюда и близкое сходство формул для инкремента колебаний в свистке и монодроне. Для тонкой струи развитие возмущений слабонеустойчивой симметричной моды на длине пролета мимо открытого конца трубы играет роль, аналогичную группировке электронов в СВЧ-приборах [10, 11] (ср. [83, 84]).

Электронной системой, наиболее близкой к свистку с тонкой струей, является монотрон в плазме с  $\epsilon_0 < 0$  и слабым пучком. В этом случае, как и для свистка, собственные колебания среды, в которой находится промежуток, слабонеустойчивы.

Аналогия акустических и электронных приборов может оказаться полезной при конструировании новых типов аэродинамических генераторов. В частности, клистрону (см. раздел 3) можно поставить в соответствие свисток, изображенный на рис. 12. Это

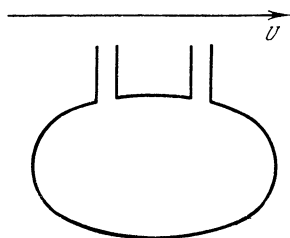


Рис. 12. Акустический клистрон

резонатор Гельмгольца с двумя горловинами, обтекаемыми общим потоком. Возмущения, создаваемые в потоке первой горловиной, усиливаются течением и наводят переменное давление во второй горловине. Возможно, такой свисток — клистрон — будет иметь преимущества клистрона (простота расчета, высокий КПД и т. д.).

## 5. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН С ГИДРОДИНАМИЧЕСКИМ ПОТОКОМ

### Нелинейные течения на резонансном уровне

Как и для системы электронов, нелинейные эффекты при взаимодействии волн с плоскопараллельным течением возникают прежде всего в окрестности резонансного слоя, где параметр  $\epsilon(y) = v(y)/(U - \omega/k)$ , характеризующий величину нелинейности, возрастает. Поэтому часто можно считать, что вне резонансной области уравнения малых колебаний остаются линейными, а нелинейность определяет структуру решения в резонансной области [54]. Такое решение исследовано, в частности, для ветровых волн [55], где, однако, влияние этой «ветровой» нелинейности на рост волн мало (см. ниже).

Для идеальной жидкости учет нелинейности позволяет «сплечь» решения уравнения Релея (9) по обе стороны от особой точки  $y_c$ . Соответствующее решение получено методом сращиваемых асимптотических разложений [54]. Вблизи  $y = y_c$  это решение имеет замкнутые линии тока в виде «кошачьих глаз» (рис. 13). Такое решение с замкнутыми линиями тока было впервые получено Кельвином и получило его имя (Kelvin cat's eyes). Отметим, что «кошачьи глаза» возникают в фазовом пространстве частиц в поле

продольной волны (см. рис. 2). В двумерном гидродинамическом течении частицы разных скоростей находятся на разных уровнях  $y$ , поэтому на плоскости  $(x, y)$  мы получаем «снимок» фазового пространства одномерной плазменной задачи. Областям с замкнутыми линиями тока соответствуют «захваченные» волной частицы.

Следует отметить также, что в идеальной ( $\nu = 0$ ) жидкости нелинейное решение оказывается неоднозначным и лишь учет

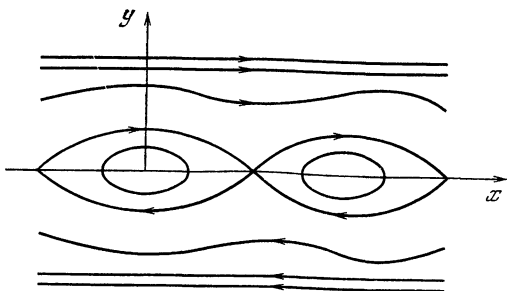


Рис. 13. Линии тока в течении вблизи резонансного уровня — «кошачьи глаза» Кельвина

малой вязкости позволяет выбрать одно из невязких нелинейных решений. Действительно, согласно теореме Кельвина [51], величина завихренности постоянна вдоль каждой из замкнутых линий тока (см. рис. 13). Распределение же завихренности между различными линиями тока может быть, вообще говоря, произвольным. Сколь угодно малая вязкость сгладит разницу в завихренностях на соседних линиях тока, так что в стационарном состоянии  $\text{rot } v = \text{const}$  во всей внутренней области «кошачьего глаза». Аналогичным образом для ленгмюровских волн существует множество различных стационарных решений (БГК-решений), и лишь учет столкновений позволяет выбрать одно из них, соответствующее  $f(x, v) = \text{const}$  внутри «кошачьего глаза» [7, 8].

В линейной задаче учет малой вязкости дает, как мы видели, правило сшивки решений уравнения Релея по обе стороны от  $y = y_c$ . Это правило можно представить, подобно (4), символически в виде

$$\frac{1}{U - \omega/k} = |P \frac{1}{U - \omega/k} - i\alpha\delta(U - \omega/k), \quad (29)$$

где  $\alpha = \pi$ . Нелинейное же решение соответствует правилу сшивки с  $\alpha = 0$  [54]. Легко понять, что при таком правиле рассмотренное нами выше резонансное усиление отсутствует ( $\text{Im } r(\omega, k) = 0$ ). Таким образом, как и плазменные БГК-волны, гидродинамическое нелинейное решение является стационарным, самосогласованным с распределением частиц.

Метод сращиваемых асимптотических разложений позволяет учесть в окрестности резонансного уровня  $y = y_c$  одновременно и вязкость и нелинейность, если они обе малы [56]. Вязкость «размывает» нелинейное течение типа «кошачьих глаз». При этом



величина  $\alpha$ , характеризующая правила спивки (29), меняется в зависимости от амплитуды от  $\alpha = \pi$  до  $\alpha = 0$ . Таким образом, можно найти зависимость от амплитуды инкремента резонансного усиления (или декремента затухания) волны. Эта зависимость качественно такая же, как и для плазменных волн (см. рис. 8), только роль параметра  $\tau_0/\tau_p$  играет величина  $[kv(y_c)/U_y(y_c)]^{1/2} \cdot [kU(y_c)/U_y(y_c)]^{-2} \cdot \text{Re}$  (где  $\text{Re} = [U(y_c)]^2/\nu U_y(y_c)$  — число Рейнольдса). В частности, при малых амплитудах инкремент (декре-

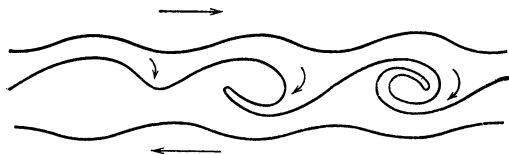


Рис. 14. Развитие спиральных вихрей на резонансном уровне [57]

Перемешивание фаз при наличии вязкости приводит к образованию «кошачьих глаз»

мент) приближается к линейному, а с ростом амплитуды он падает обратно пропорционально амплитуде в степени  $3/2$ .

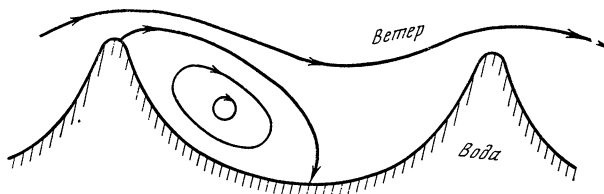
Наконец, обратимся к нестационарной задаче. Исследование развития во времени гидродинамической неустойчивости потока идеальной жидкости с учетом нелинейных эффектов на резонансном уровне [57] показало, что в окрестности  $y = y_c$  развивается совокупность растущих во времени спиральных вихрей (рис. 14). Точно так же, как в фазовом пространстве частиц в одномерной плазменной волне, здесь происходит перемешивание фаз: малая вязкость сглаживает осцилляции завихренности и плотно навитая спираль линий тока превращается постепенно в «кошачий глаз».

### Нелинейные эффекты на резонансном уровне и возбуждение волн ветром

Квазиламинарная модель Майлса (см. раздел 4) основана на ламинарном рассмотрении профиля средней скорости турбулентного ветра. Однако при исследовании нелинейного течения на резонансном уровне мы уже не можем пренебречь турбулентными хаотическими колебаниями частиц. Действительно, турбулентность осуществляет перенос частиц поперек потока, уводит частицы с резонансного уровня и размывает «кошачьи глаза». Для оценки такого эффекта мы можем воспользоваться турбулентным числом Рейнольдса (в логарифмическом пограничном слое  $\text{Re}_{\text{турб}} \sim 1$ ), взяв вместо молекулярной вязкости турбулентную. Используя зависимость инкремента неустойчивости от амплитуды возмущения (см. рис. 8, где вместо  $\tau_0/\tau_p$  мы должны взять величину  $[k\xi]^{1/2} \text{Re} [kU(y_c)/U_y(y_c)]$ , мы получим (при  $ky_c \lesssim 1$ ), что инкремент существенно уменьшается лишь при больших амплитудах  $k\xi \gtrsim 1$  ( $\xi$  — высота волны).

При столь больших амплитудах вступает в действие новый механизм возбуждения ветровых волн, видимо, это механизм Джеффриса [58]. Он связан с отрывом погранслоя ветра на завет-

ренной стороне гребня волны и с возникновением там области пониженного давления (рис. 15). В результате волны продолжают расти, причем с ростом амплитуды при укрупнении вершин улучшается отрыв погранслоя [59, 60]. Поэтому рост амплитуды прекращается лишь при обрушении волны и образовании «барашка». В результате роль майлсовского механизма, по-видимому, сводится к тому, что он передает эстафету более сильному нелинейному механизму возбуждения волн.



**Рис. 15.** Отрыв воздушного потока для волны большой крутизны  
Понижение давления в застойной области приводит к усилению

Конечно, изложенная картина ветровых волн является в известной мере гипотетической, тем не менее сейчас имеются как лабораторные, так и натурные измерения, вроде бы подтверждающие ее (ср. [36, 59]).

### **О ветровых волнах при слабом ветре и уравнениях типа Ландау вблизи порога неустойчивости**

Из сказанного следует, что в типичных условиях возбуждение ветровых волн — это сильнонелинейный процесс как по явлениям в воде, так и в воздушном потоке. Иная ситуация складывается при слабом ветре, когда скорость ветра лишь незначительно превышает пороговую [34]. Здесь сильнонелинейные эффекты, видимо, не возникают и волны остаются квазисинусоидальными. В этом случае можно предложить околопороговую теорию ветровых волн [61], являющуюся обобщением известных представлений Ландау [51] о поведении возмущений в неравновесной системе при малой надкритичности.

Соответствующие уравнения описывают известные и обсуждавшиеся эффекты насыщения неустойчивости в нелинейных средах. Нам кажется, однако, полезной запись этих эффектов в виде единого уравнения и формулировка околопороговой идеологии. В частности, это позволяет получить в рамках слабонелинейной теории простые критерии того, уходит ли система далеко от порога неустойчивости после его преодоления или нет (волны возбуждаются мягко, и система остается слабонелинейной, или жестко, так что возникают сильнонелинейные явления).

Ландау предложил следующее уравнение для комплексной амплитуды  $a(\mathbf{r}, t)$  квазимонохроматического ( $\sim \exp(i\omega_0 t - i\mathbf{k}_0 \mathbf{r})$ ) возмущения [51]:

$$da/dt = \gamma_0 a - \rho a |a|^2. \quad (30)$$

Здесь инкремент  $\gamma_0 = \beta(\lambda - \lambda_0)$ ,  $\lambda_0$  — критический параметр (например, число Рейнольдса), с которого начинается неустойчивость;  $\rho > 0$  — коэффициент нелинейности. В стационарном режиме

$$a = \sqrt{\gamma_0/\rho}. \quad (31)$$

По существу, уравнения (30), (31) — это уравнения для амплитуды автоколебаний при их мягком возбуждении<sup>1</sup>.

Для волн на глубокой воде в консервативном случае амплитуда  $a(x, y, t)$  удовлетворяет параболическому уравнению [62]

$$a_t + va_x = i\kappa a_{xx} - iq a_{yy} + i\alpha a |a|^2, \quad (32)$$

где  $v$  — групповая скорость;

$$\alpha = \frac{gk_0}{4\omega_0} \frac{8 + T + 2T^2}{1 - 2T}; \quad q = \frac{g(1 + 3T)}{4\omega_0 k_0};$$

$$\kappa = \frac{g}{8\omega_0 k_0} \frac{1 - 6T - 3T^2}{1 + T};$$

$T = (k_0/\tilde{k})^2$ ;  $\tilde{k} = \sqrt{\rho_w g/\sigma}$  — характерное волновое число гравитационно-капиллярных волн, соответствующее минимальной фазовой скорости. Это уравнение описывает эффекты дисперсии и дифракции, а также нелинейный сдвиг частоты ( $\alpha \neq 0$ ), изображенный пунктиром на рис. 16. Этот сдвиг частоты может приводить к самомодуляции (если  $\alpha\kappa > 0$ ) либо к самофокусировке (если  $\alpha q < 0$ ) плоской волны [63, 64].

При наличии ветровой неустойчивости естественно дописать в уравнение (32) слагаемые типа Ландау. Инкремент этой неустойчивости определяется разностью между усилением волн ветром и вязкой диссипацией. Усиление волн ветром определяется здесь не резонансным механизмом, рассмотренным выше, а явлениями в вязком подслое и резонансом с волнами Толлмина—Шлихтинга [34, 65]. На рис. 16 качественно показана область неустойчивости и ее движение по плоскости  $(\omega, k_x)$  с ростом скорости ветра.

Таким образом, вблизи порога неустойчивости, вообще говоря, важна дисперсия инкремента  $\gamma$ . Чтобы ее учесть, мы должны дописать в уравнение для амплитуды члены, соответствующие разложению  $\gamma(\omega, k)$  вблизи  $\mathbf{k}_0 = (k_0, 0)$ ,  $\omega_0 = \omega(\mathbf{k}_0)$ :

$$\gamma(\omega, \mathbf{k}) = \gamma_0 - \delta(\omega - \omega_0) + \varepsilon(k_x - k_0) - \beta(k_x - k_0)^2 - \nu k_y^2. \quad (33)$$

<sup>1</sup> В рамках уравнения Ландау (30) жесткому возбуждению соответствует  $\rho < 0$ . Этот случай называют еще иногда взрывной неустойчивостью.

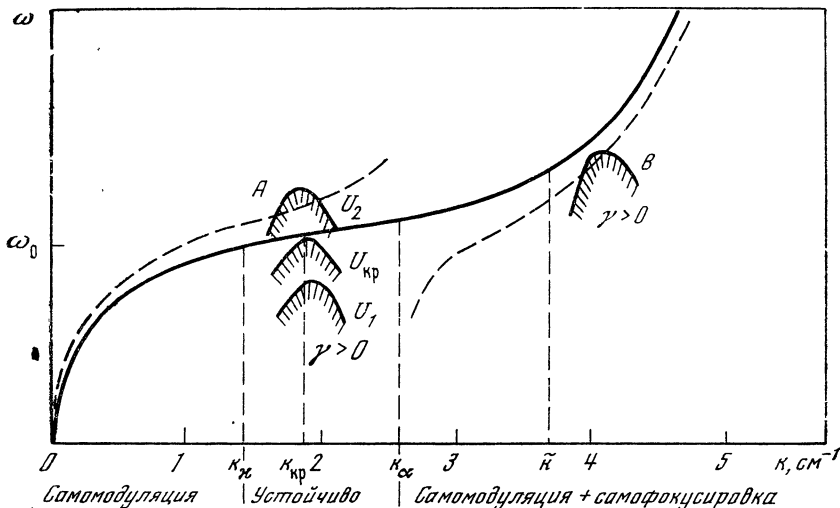


Рис. 16. Дисперсионная кривая капиллярно-гравитационных волн

Пунктир — нелинейный сдвиг частоты.

А — перемещение области неустойчивости с ростом скорости ветра ( $U_1 < U_{кр} < U_2$ ).

В — область неустойчивости в случае, когда возможно жесткое возникновение волн.

$\tilde{k}$  — волновое число, для которого фазовая скорость минимальна;  $k_\alpha = \tilde{k}/\sqrt{2}$  — волновое

число, для которого возможна генерация второй гармоники:  $\omega(2k_\alpha) = 2\omega(k_\alpha)$ ;

$k_\kappa$  ( $(\partial^2\omega/\partial k^2)_{k=k_\kappa} = 0$ ) разграничивают области самофокусировки и самомодуляции

Здесь учтено, что инкремент явным образом зависит как от  $\omega$ , так и от  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ , т. е. имеется как временная, так и пространственная дисперсия  $\gamma$ . Поскольку ветровой инкремент  $\gamma_\alpha$  определяется проекцией  $\mathbf{k}$  на скорость ветра (на ось  $x$ ), то коэффициент при  $k_y^2$  в (33) есть просто вязкость воды  $\nu$ . Далее, так как на пороге неустойчивости (при  $\gamma_0 = 0$ ) граница  $\gamma > 0$  касается дисперсионной кривой, то при  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$

$$\left. \frac{d\gamma}{dk_x} \right|_{k=k_0} = \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} v + \frac{\partial \gamma}{\partial k_x} = 0. \quad (34)$$

Это накладывает связь на коэффициенты:  $\varepsilon = \delta v$ . Точка касания определяет критическое волновое число  $k_{кр}$ . Для волн на чистой поверхности глубокой воды  $k_{кр} = 1,8 \text{ см}^{-1}$ ,  $\gamma_0 = S(U - U_{кр})/U_{кр}$ ,  $S = 0,2 \text{ с}^{-1}$ ,  $U_{кр} = 1,3 \text{ м/с}$  — критическая скорость ветра на высоте 10 м [34].

Кроме дисперсии инкремента, мы еще должны учесть член Ландау  $\rho$ , обусловленный вязкой диссипацией капиллярно-гравитационных волн [66],

$$\rho = \frac{2\nu k_0^2}{(1 - 2T)^2} \left[ \frac{k(2\omega_0)}{k_0} (1 + T)^2 + (1 + 4T)^2 \right]. \quad (35)$$

При  $k_0 = 1,8 \text{ см}^{-1}$  имеем  $\rho = 0,4$ . Соответствующим нелинейным коэффициентом из-за влияния волн на профиль ветра мы пренебрежем, поскольку он содержит малый параметр  $\rho_a/\rho_w \simeq 10^{-3}$  и, кроме того, его малость обусловлена существенной ролью вязкости воздуха в механизме усиления.

Переходя теперь к «бегущей» координате  $\xi = x - vt$ , получим из (32)—(35) следующее уравнение для амплитуды квазимонохроматической ветровой волны при малой надпороговости:

$$a_i^* - ika_{\xi\xi} + iqa_{yy} - ia|a|^2 a = \gamma_0 a + i\delta a_t + \beta a_{\xi\xi} + \nu a_{yy} - \rho a|a|^2. \quad (36)$$

Это уравнение — автоколебательное обобщение нелинейного параболического уравнения. Оно должно, очевидно, появляться и в других областях физики в околупороговых ситуациях. Частные случаи его обсуждались для течения Пуазейля [67], в динамике некоторых химических реакций [68], для ионно-звуковых волн в плазме [69] и др.

В зависимости от знака и величины коэффициентов в уравнении (36) возможны различные варианты ограничения роста амплитуды: самомодуляция или самофокусировка, приводящие к выводу спектральных составляющих волны из области неустойчивости (стрелки на рис. 16), нелинейное затухание ( $\rho > 0$ ), нелинейный сдвиг частоты, «выталкивающий» дисперсионную кривую из области неустойчивости (при  $\alpha\delta > 0$ ). Последний эффект можно описать в рамках уравнения (36) и поправкой к коэффициенту при последнем слагаемом:  $\Delta\rho = \alpha\delta$ . Если  $\Delta\rho < 0$ , то (случай B на рис. 16) нелинейный сдвиг частоты «втягивает» дисперсионную кривую в область неустойчивости. В этом случае при  $\rho + \Delta\rho < 0$  мы имеем жесткое возникновение автоколебаний, т. е. после преодоления порога волны становятся сильнонелинейными. Однако и в этом случае самофокусировка или самомодуляция могут ограничить рост амплитуды, если параметры  $\kappa$ ,  $q$  достаточно велики. Такая возможность рассмотрена в работе [70].

Вычисление коэффициентов  $\beta$ ,  $\delta$  для волн на воде в различных ситуациях еще предстоит сделать. Для глубокой воды в обычных условиях очень грубые оценки по материалам работ [65, 71] дают  $\beta \simeq 0,6$ ;  $\delta \lesssim 10^{-3}$ . Для волн на чистой поверхности глубокой воды  $\alpha(k_{кр}) > 0$ ,  $\kappa(k_{кр}) < 0$ ,  $q(k_{кр}) > 0$ , так что пространственно-однородное решение устойчиво (отсутствует как самофокусировка, так и самомодуляция (см. рис. 16, случай A)). Амплитуда этого решения

$$a_i^* = k_0 \xi = \sqrt{\gamma_0/(\rho + \alpha\delta)} \simeq 0,6 \sqrt{(U - U_{кр})/U_{кр}}. \quad (37)$$

Эта оценка соответствует случаю чистой поверхности глубокой воды. В других условиях (при наличии турбулентности в воде, пленки на ее поверхности или при конечной глубине воды и др.)

пороговое значение волнового числа может сдвинуться и попасть в область самомодуляции и (или) самофокусировки (см. рис. 16).

Если в уравнении (36)  $\alpha k > 0$  или  $\alpha q < 0$ , то пространственно-однородное решение может быть неустойчивым, что приведет к временным и пространственным (продольным или поперечным) осцилляциям амплитуды, выводящим спектральные составляющие из области неустойчивости. Если выполняется лишь одно из этих условий, ситуация существенно упрощается.

В этом случае естественно рассмотреть одномерное ( $\partial/\partial y \equiv 0$  или  $\partial/\partial \xi \equiv 0$ ) уравнение, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$a_\tau - ia_{xx} - ia|a|^2 = \mu(a + a_{xx}) - ra|a|^2.$$

Безразмерные коэффициенты  $\mu$  и  $r$  определяют динамику амплитуды  $a(x, \tau)$ .

Пространственно-однородное решение уравнения (37)  $a = \sqrt{\mu/r} \exp(i\mu t/r)$  неустойчиво по отношению к периодическим возмущениям с волновым числом  $k < \sqrt{\frac{2\mu(1-\mu r)}{r(1+\mu^2)}}$  (при условии  $\mu r < 1$ ). Аналитически исследовать развитие модуляционной неустойчивости можно в двух случаях.

1. Для случая, когда  $\mu \ll r$ , Н. В. Николенко доказал теорему, согласно которой при достаточно малом  $\mu$  уравнение (37) с периодическими граничными условиями имеет конечное число асимптотически-устойчивых периодических решений.

2. Когда  $\mu, r \ll 1$ , можно использовать точное решение консервативного уравнения (при  $\mu = r = 0$ ) — солитон вида [64, 71]

$$a = A \frac{\exp[iA^2\tau/2 + iV\tau/4 + iV(x - V\tau)/2]}{\text{ch}[A(x - V\tau)/\sqrt{2}]}.$$

Малая неконсервативность приведет к медленной эволюции амплитуды  $A$  и скорости  $V$  солитона. Уравнения для этих величин [61] (ср. также [72])

$$dA/dt = 2\mu A (1 - A^2/6 - V^2/4) - 4/3 r A^3,$$

$$dV/dt = -2\mu A^2 V/3$$

имеют единственное устойчивое стационарное решение

$$A = A_0 = \sqrt{6/(1 + 4r/\mu)} \quad (V = 0).$$

Таким образом, начальный импульс распадается на солитоны, которые затем медленно эволюционируют: скорость их монотонно убывает, а амплитуда стремится к постоянной  $A_0$ . Фазы солитонов (т. е. расстояния между ними) остаются в этом приближении неопределенными, но исследование взаимодействия солитонов как классических частиц [73, 74] указывает на то, что устойчивым стационарным решением могла бы быть периодическая последовательность солитонов [75].

Наконец, численный расчет в случае  $\mu, r \sim 1$  показывает, что решение с периодическими граничными условиями эволюционирует во времени сложным непериодическим образом (см. также [68], где рассмотрен случай  $\mu = 2, r = 0,25$ ).

Если в уравнении (36) неустойчивы как продольные, так и поперечные возмущения однородного решения (для волн на воде это возможно при  $k_{кр} > k_\alpha = \tilde{k}/\sqrt{2}$ , рис. 16), то развитие неустойчивости имеет существенно двумерный характер. Решение консервативного параболического уравнения (32) при  $\alpha k > 0, \alpha q < 0$  может иметь сингулярности, обращаясь в бесконечность за конечное время [76—78]. Может ли высокочастотная диссипация (члены с  $\beta \neq 0$  и  $\nu \neq 0$  в (36)) ограничить самосжатие волнового пакета в этом случае, пока не исследовано.

### Квазилинейная теория ветровых волн

Рассмотрим теперь еще одну возможность слабонелинейного ограничения резонансного усиления. Если резонансный механизм усиливает волны в широком спектре, то типичной ситуацией является наличие большого числа волн со случайными фазами [7, 8]. Мы не будем здесь обсуждать взаимодействие таких волн и установление слаботурбулентных спектров (см. [40, 79]). Рассмотрим другой нелинейный эффект — обратное влияние широкого спектра волн на функцию распределения частиц по скоростям. Соответствующая теория для ветровых волн [80] аналогична квазилинейной теории в физике плазмы, которую мы кратко обсуждали в разделе 3.

Каждая из таких волн широкого спектра меняет течение вблизи своего резонансного уровня. Поскольку фазы волн случайны, то в первом приближении по величине амплитуды действие широкого спектра волн на ветер сводится к деформации профиля средней скорости и тем самым к изменению майлсовского инкремента для каждой волны. Система уравнений для профиля средней скорости  $U(y, t)$  и интенсивности  $N_k = \langle |a_k|^2 \rangle$  волн ( $a_k$  — фурье-компонента возвышения поверхности), описывающая такой процесс «квазилинейной релаксации», имеет вид [80]

$$\partial U / \partial t = D(U)U_y, \quad \partial N_k / \partial t = 2\gamma_k N_k - 2\nu_k N_k, \quad (38)$$

где  $\gamma_k$  — майлсовский инкремент для профиля  $U(y, t)$ ,  $\nu_k$  — вязкий декремент поверхностных волн, а коэффициент «квазилинейной диффузии»

$$D(U) = \sum_k \pi k N_k \left| \frac{v_k(y_c)}{v_k(0)} \right|^2 \delta' \left( U - \frac{\omega}{k} \right)$$

отличен от нуля во всей области, где возбуждены поверхностные волны с соответствующими фазовыми скоростями.

В результате квазилинейной релаксации устанавливается линейный профиль скорости  $U_{yy} = 0$ , соответствующий, как и для плазменных волн, «плато» на функции распределения  $f = \rho/|U_y|$ . Если пренебречь диссипацией ( $\nu_k = 0$ ), то в процессе квазилинейной диффузии сохраняются полный импульс

$$\frac{d}{dt} \left[ \rho_a \int_0^{\infty} U dy + \rho_w \sum_k \frac{k^2 N_k}{\pi \omega} \right] = 0$$

и полная энергия волн и среднего ветра

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_0^{\infty} \rho_a U_a^2 dy + \rho_w \sum_k \frac{k}{\pi} N_k \right] = 0.$$

Условия, при которых можно бы для описания ветровых волн использовать уравнения (38), недостаточно ясны. Возможно, что они могли бы быть полезны для описания лабораторных экспериментов с ветровыми волнами, где турбулентность в воздушном потоке мала. Что же касается натуральных ветровых волн, то здесь существенной является, как мы видели, турбулентность. Эта турбулентность подавляет формирование «кошачьих глаз», а следовательно, препятствует и установлению линейного участка в профиле скорости. Правда, турбулентная вязкость, ответственная за этот процесс, падает с приближением к поверхности воды. Поэтому линейный профиль мог бы существовать вблизи этой поверхности, тем самым уширяя вязкий подслой [80] (см. также [81]).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Большинство рассмотренных выше задач весьма просты с точки зрения теории гидродинамической устойчивости. Мы стремились, однако, к выяснению физического смысла процессов и выработке физического «языка» для описания взаимодействия волн с гидродинамическими течениями.

Параллельное рассмотрение взаимодействия «волна-частица» в гидродинамике и электронных системах оказалось очень полезным в этом плане. Оно дало возможность интерпретировать майлсовский механизм и майлсовский критерий неустойчивости поверхностных волн: волна усиливается, если больше частиц ее обгоняют, чем отстают от нее в окрестности резонансного уровня.

Математический аппарат и результаты рассмотрения свистка и монотрона оказались очень близкими. Такое сопоставление указывает на целесообразность подробных исследований (в том числе нелинейных) свистка-клистрона (см. рис. 12).



Аналогия электронных и гидродинамических проблем позволяет пояснить, почему при умеренном и сильном ветре ветровые волны уходят из-под контроля майлсовского механизма: турбулентность ветра препятствует образованию в резонансном слое «кошачьих глаз». В результате амплитуда волн растет до тех пор, пока не появляется нелинейный механизм возбуждения волн.

При слабом ветре было сформулировано уравнение, определяющее амплитуду квазимонохроматической волны вблизи порога ветровой неустойчивости; уравнения такого типа встречаются и в других околопороговых ситуациях в физике. Это уравнение позволяет оценить установившуюся амплитуду ветровых волн.

Впрочем, в связи с ветровыми волнами, может быть, стоит напомнить известные слова Урсела (1956 г.), повторенные в последнем подробном обзоре [36] по ветровым волнам: «Ветер, дующий над поверхностью воды, возбуждает волны на воде за счет процесса, который нельзя считать известным».

Мы обсудили возбуждение волн и колебаний прямолинейными потоками частиц. Однако в электронных системах большую роль играет и взаимодействие электромагнитных колебаний с непрямолинейными электронными потоками. Это, например, циклотронное поглощение и усиление в системе с круговыми электронными траекториями. Аналогом таких эффектов в гидродинамике является взаимодействие волн и колебаний с течением с замкнутыми линиями тока, например, с круговыми вихрями. Таких исследований в гидродинамике практически нет.

Правда, в докладе В. С. Львова [82] этот вопрос фактически затрагивался<sup>2</sup>. Там обсуждался коэффициент поглощения звука турбулентностью. Однако использованный в работе метод не позволяет проследить достаточно детально основной физический эффект, возникающий при таком взаимодействии, а именно резонанс между частотой периодического движения частиц жидкости и частотой волнового возмущения, условия передачи энергии от вихря волнам (или наоборот). По-видимому, простейшие задачи, которые здесь следует рассмотреть,— это рассеяние звука на вихре и взаимодействие вихря со звуком в резонаторе.

Отметим, что мы обязаны М. И. Петелину замечанием, которое позволило устранить некоторые неточности и незавершенность первоначального изложения; нам были полезны также обсуждения с В. М. Конторовичем нелинейных эффектов для волн на воде и с В. Ю. Трахтенгерцем эффектов стабилизации квазимонохроматических волн.

---

<sup>2</sup> См. также: *Моисеев С. С., Сагдеев Р. З., Тур А. В., Яновский В. В.* Влияние вихрей на спектр акустической турбулентности. — *Наст. сборник*, с. 105.

1. Максвелл Дж. К. Статьи и речи. М., «Наука», 1968.
2. Розенбергер Ф. История физики. М.—Л., Гостехиздат, 1935.
3. Рюттов Д. Д.— Письма в ЖЭТФ, 1975, 22, № 9, с. 446.
4. Case K. M.— J. Fluid Mech., 1961, 10, N 3, p. 420.
5. Тимофеев А. В.— УФН, 1970, 102, № 2, с. 185.
6. Михайловский А. В. Теория плазменных неустойчивостей, т. 1, 2. М., Атомиздат, 1977.
7. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. М., «Наука», 1976.
8. Галеев А. А., Сагдеев Р. З.— В кн.: Вопросы теории плазмы, вып. 7. М., Атомиздат, 1973.
9. Ландау Л. Д. Собрание трудов, т. 2. М., «Наука», 1969.
10. Лопузин В. М. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. М., Гостехиздат, 1953.
11. Гапонов В. И. Электроника. М., Физматгиз, 1960.
12. Андронов А. А., Чугунов Ю. В.— УФН, 1975, 116, № 1, с. 79.
13. Feix M.-R.— Phys. Lett., 1964, 12, N 4, p. 316.
14. Бетхов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М., «Мир», 1971.
15. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.—Л., Гостехиздат, 1946.
16. Miles J. W.— J. Acoust. Soc. America, 1957, 29, N 2, p. 226.
17. Фабрикант А. Л.— Акуст. журн., 1976, 22, № 1, с. 107.
18. Лупанов Г. А.— Изв. вузов. Радиофизика, 1975, 18, № 11, с. 1711.
19. Fejer J. A.— Phys. Fluids, 6, 1963, N 4, p. 508.
20. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., ИЛ, 1958.
21. Релей (Стретт Дж. В.). Теория звука, т. 2. М., Гостехиздат, 1955.
22. Айнс Е. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, ГОНТИ, 1939.
23. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
24. Дикий Л. А.— Докл. АН СССР, 1960, 135, № 5, с. 1068.
25. Гидродинамическая неустойчивость. М., «Мир», 1960.
26. Miles J. W.— J. Fluid Mech., 1957, 3, N 2, p. 185.
27. Бреховский Л. М.— Акуст. журн. 1954, 5, № 1, с. 4.
28. Гуань-Дин-Хуа.— Акуст. журн., 1961, 7, № 2, с. 181.
29. Иванов-Шич К. М., Рожин Ф. В.— Акуст. журн., 1959, 5, № 4, с. 495.
30. Meyer E. 4-th Intern. Congr. Acoustics, Copenhagen, 1962; Congr. Rept., 2. Copenhagen, 1963, p. 139.
31. Андронов А. А., Фабрикант А. Л.— ЖЭТФ, 1979, 76, № 2, с. 807.
32. Ван-Дайк М. Методы теории возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
33. Пирс Дж. Лампа с бегущей волной. М., «Сов. радио», 1952.
34. Филиппс О. М. Динамика верхнего слоя океана. М., «Мир», 1969.
35. Miles J. W.— J. Fluid Mech., 1959, 6, N 4, p. 568.
36. Barnett T. P., Kenyon K. E.— Repts Progr. Phys., 1975, 38, N 6, p. 667.
37. Larson T. R., Wright J. W.— J. Fluid Mech., 1975, 70, p. 417.
38. Valenzuela G. R.— J. Fluid Mech., 1976, 76, N 2, p. 229.
39. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, т. 1. М., «Наука», 1965.
40. Hasselman K.— Rev. Geophys., 1966, 4, N 1, p. 1.
41. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1966.
42. Школьников Р. Ш.— Акуст. журн., 1963, 9, № 3, с. 368.
43. Chanda R. C.— Scient. Amer., 1970, 222, N 1, p. 40.
44. Садоков Р., Трофимов В.— Наука и жизнь, 1969, № 1, с. 61.
45. Цветкова И.— Наука и жизнь, 1966, № 1, с. 26.
46. Garrett S., Stat D. K.— J. Acoust. Soc. America, 1977, 62, N 2, p. 449.
47. Mercer D. M. A.— Amer. J. Phys., 1953, 21, N 5, p. 376.

48. *Блохинцев Д. И.*— ЖТФ, 1945, 15, № 1—2, с. 63.
49. *Brown G. B.*— Proc. Phys. Soc., 1937, 49, p. 493.
50. *Powell A.*— J. Acoust. Soc. America, 1961, 33, N 4, p. 395.
51. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., «Наука», 1953.
52. *Вайнштейн Л. А.* Теория дифракции и метод факторизации. М., «Сов. радио», 1966.
53. *Лэмб Г.* Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
54. *Benney D. J., Bergeron R. F.*— Stud. Appl. Math., 1969, 48, N 3, p. 181.
55. *Davis R. E.*— J. Fluid Mech., 1969, 36, N 2, p. 337.
56. *Haberman R.*— Stud. Appl. Math., 1972, 51, N 2, p. 139.
57. *Robinson J. L.*— J. Fluids Mech., 1974, 63, N 4, p. 723.
58. *Jeffreys H.*— Proc. Roy. Soc. London, 1925, A107, p. 189; 1926, A110, p. 241.
59. *Banner M. L., Melville W. K.*— J. Fluid Mech., 1976, 77, N 4, p. 825.
60. *Wu J. J.* Waterways and Harb. Coast Eng. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1972, 98, p. 2.
61. *Фабрикант А. Л.*— Wave Motion, 1978, 1, p. 413.
62. *Djordjevic V. D., Redekopp L. G.*— J. Fluid Mech., 1977, 79, N 4, p. 703.
63. *Захаров В. Е.*— ПМТФ, 1968, 2, с. 86.
64. *Кадошцев Б. Б., Карлман В. И.*— УФН, 1971, 103, № 2, с. 193.
65. *Miles J. W.*— J. Fluid Mech., 1962, 13, N 3, p. 433.
66. *Красильников В. А., Павлов В. И.*— Вестн. МГУ. Физика, 1972, № 1, с. 94.
67. *Stewartson K., Stuart J. T.*— J. Fluid Mech., 1971, 46, N 3, p. 529.
68. *Kuramoto Y., Yamada T.*— Progr. Theor. Phys., 1976, 56, N 2, p. 679.
69. *Buti B.*— IEEE Trans., 1976, PS-4, N 4, p. 292.
70. *Hocking L. M., Stewartson K.*— Proc. Roy. Soc. London, 1972, A326, N 1466, p. 289.
71. *Miles J. W.*— J. Fluid Mech., 1962, 13, N 3, p. 427.
72. *Островский Л. А.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, 17, № 4, с. 454.
73. *Горшков К. А., Островский Л. А., Папко В. В.*— ЖЭТФ, 1976, 71, № 2, с. 585.
74. *Петров Е. А.* О взаимодействии солитонов огибающей. Дипл. работа. Горький, ГГУ, 1977.
75. *Горшков К. А., Островский Л. А., Папко В. В.*— В кн.: VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению радиоволн. Ростов. Краткие тезисы докладов. М., 1977.
76. *Власов С. Н., Петрищев В. А., Таланов В. И.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1971, 14, № 9, с. 1355.
77. *Захаров В. Е.*— ЖЭТФ, 1972, 62, с. 1745.
78. *Горев В. В., Кингсеп А. С., Рудаков Л. И.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, № 5—6, с. 691.
79. *Захаров В. Е., Филоненко Е. Е.*— Докл. АН СССР, 1966, № 6, с. 1292.
80. *Фабрикант А. Л.*— Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1976, 12, № 8, с. 858.
81. *Miles J. W.*— J. Fluid. Mech., 1965, 22, N 4, p. 823.
82. *Львов В. С., Михайлов А. В.* Препринт № 54. Новосибирск, ИАЭ СО АН СССР, 1977.
83. *Coltman J. W.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1968, 44, p. 983.
84. *Константинов Б. П.* Гидродинамическое звукообразование и распространение звука в ограниченной среде. Л., «Наука», 1974.
85. *Jones D. S., Morgan J. D.*— Proc. Camb. Phil. Soc., 1972, 72, p. 465.
86. *Мионов М. А.*— Акуст. журн., 1975, 21, № 1, с. 79.

# ВЛИЯНИЕ ВИХРЕЙ НА СПЕКТР АКУСТИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

С. С. МОИСЕЕВ, Р. З. САГДЕЕВ, А. В. ТУР,  
В. В. ЯНОВСКИЙ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, спектр энергии звуковой турбулентности  $\varepsilon_k \sim k^{-3/2}$  был получен в работе Захарова и Сагдеева [1]. При этом учитывалось, что наиболее сильно взаимодействуют гармоники с почти-коллинеарными волновыми векторами, и предполагалось, что можно пренебречь процессами более высоких порядков.

Однако вопрос о способах снятия особенностей у матричных элементов процессов высоких порядков остается открытым, так как в работе Кадомцева и Петвиашвили [2], посвященной тому же вопросу, показано, что в свободной звуковой турбулентности акустоны могут вырождаться в пилообразные волны.

В данной работе «размытие» указанных особенностей достигается за счет рассеяния акустонов на непотенциальной составляющей гидродинамических полей. Такая турбулентность возникает, например, если на жидкость действует случайная сила, имеющая наряду с потенциальной и вихревую компоненту. Как известно, свободная акустическая турбулентность представляет собой совокупность нелинейных волновых пакетов (акустонов) с сильно скоррелированными по фазе гармониками, вырождающимися за характерное время  $\tau_H \sim 1/k_s v_s$  в пилообразные волны ( $k_s^{-1}$  — характерная ширина пакета). Наличие вихрей приводит к тому, что акустоны, рассеиваясь на них, начинают совершать случайные блуждания по углу  $\theta \sim k_{\perp}/k_s$  с характерным коэффициентом диффузии  $D_{\theta L} \sim \left(\frac{k_{\perp}}{k_s}\right)^2 \frac{1}{\tau_p}$ . При рассеянии крупными вихрями  $\tau_p$  — характерное время рассеяния,  $\tau_p^{-1} \sim k_s v_s$ ,  $L$  — масштаб неоднородности вихревой компоненты  $v_{\omega}$ . В результате этих блужданий акустон приобретает некоторое эффективное  $k_{\perp}$ , т. е. вихри приводят к возникновению дисперсии, ограничивающей действие нелинейности. Когда основной вклад в рассеяние дают крупные вихри, то  $k_{\perp} \sim L^{-1}$ . Наличие дисперсии приводит к установлению спектра турбулентности  $\varepsilon_s \sim k_s^{-3/2}$ .

Вторым существенным эффектом, к которому приводит присутствие вихрей, является турбулентная вязкость  $\mu^T$  акустона на вихрях. Турбулентная вязкость  $\mu_T$  приводит к потере энергии акустоном, движущимся в каком-либо направлении, и определяется в основном крупными вихрями  $\mu_T \sim \langle v_{\omega}^2 \rangle \sqrt{1/k_{\perp} c_0}$ . В области  $k_s < k_{\perp} c_0 / v_s$  ее действие мало и спектр  $k_s^{-3/2}$  реализуется благодаря наличию дисперсии. В области  $k_s > k_{\perp} \sqrt{c_0 / v_s}$  спектр  $k_s^{-3/2}$

осуществляется благодаря размытию пакетов турбулентной вязкостью. Для того чтобы вихри создавали турбулентную вязкость, способную размывать особенности у процессов высоких порядков, их энергия  $E_T$  должна удовлетворять неравенству

$$E_T k_s L > E_s,$$

$E_s$  — энергия акустонов. В области  $k_s < k_{\perp} \sqrt{c_0/v_s}$  вихри должны иметь энергию  $E_T > P_s c_0^{-1} k_s^{-1}$  ( $P_s$  — поток в звуковой турбулентности), чтобы возникла дисперсия, достаточная для осуществления спектра  $k_s^{-3/2}$ . При меньшей энергии вихрей звуковые пакеты могут опрокинуться. При малом количестве пакетов спектр носит «квазидинамический» характер  $\epsilon_s \sim k_s^{-2}$  [2—4].

## 2. ЭВОЛЮЦИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ЗВУКОВОГО ПАКЕТА

Получим уравнения, описывающие эволюцию нелинейного волнового пакета (акустона), выбранного произвольным образом из акустовихревой турбулентности. Будем считать столкновительную вязкость исчезающе малой. Исходными уравнениями являются уравнения Эйлера и уравнение непрерывности

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= - \frac{\nabla P}{\rho}; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$\rho$  — плотность;  $P$  — давление;  $\mathbf{v}$  — скорость. Газ считается политропическим, с уравнением состояния

$$P = \frac{c_0^2}{\gamma} \rho_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma,$$

$\gamma = c_P/c_V$  — показатель адиабаты;  $c_0$  — скорость звука при  $\rho = \rho_0$ . Будем считать, что  $(\rho - \rho_0)/\rho_0 \ll 1$ ,  $v/c_0 \ll 1$ , и можно ограничиться квадратичными членами в разложении  $\nabla P/\rho$  по степеням  $(\rho - \rho_0)/\rho_0$ .

Для изучения эволюции акустона представим  $\mathbf{v}$  в виде

$$\dot{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v}_s \rangle + \mathbf{v}'_s + \mathbf{v}_\omega, \quad (2)$$

где  $\mathbf{v}_\omega$  — случайное поле вихря, которое будем считать однородным и изотропным;  $\mathbf{v}'_s$  — поле рассеянных на вихрях звуковых волн;  $\langle \mathbf{v}_s \rangle$  — среднее поле нелинейного волнового пакета (акустона);  $\langle \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}_s \rangle$ . Усреднение производится по вихрям. Аналогично (2) представим  $\rho$  в виде

$$\rho = \langle \rho \rangle + \rho' = \rho_0 + \delta\rho + \rho', \quad (3)$$

где  $\rho'$  — пульсирующая часть плотности  $\langle \rho' \rangle = 0$ ,  $\delta\rho/\rho_0 \ll 1$ .

Подставляя (2) и (3) в уравнения (1) и усредняя по вихрям,

с учетом малости  $(\rho - \rho_0)/\rho_0 \ll 1$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v_s \rangle}{\partial t} + \langle v_s \rangle \nabla \langle v_s \rangle + \langle (v'_s + v_\omega) \nabla (v'_s + v_\omega) \rangle = \\ = -\frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \delta \rho - (\gamma - 2) \frac{c_0^2}{\rho_0^2} \delta \rho \nabla \delta \rho - (\gamma - 2) \frac{c_0^2}{\rho_0^2} \langle \rho' \nabla \rho' \rangle; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \nabla (\langle \rho \rangle \langle v_s \rangle) + \nabla \langle \rho' (v_s + v_\omega) \rangle = 0.$$

Рассмотрим вначале вырождающуюся вихревую турбулентность. В этом случае картина движения звуковых пакетов весьма близка к той, которая имеет место в обычной звуковой турбулентности. С другой стороны, обобщение на случай стационарной турбулентности с качественной стороны не представляет труда. Если турбулентность вихрей не поддерживается внешним источником энергии, то она вырождается за характерное время  $\tau \sim 1/kv$ , так что остаются только крупные энергосодержащие вихри (например, крупномасштабные турбулентные «пятна» в атмосфере). Наличие крупных вихрей приводит к тому, что акустон, рассеиваясь на них, начинает совершать случайные блуждания по углу  $\theta \sim k_\perp/k_s$  с коэффициентом диффузии  $D_{\theta L} \sim \left(\frac{k_\perp}{k_s}\right)^2 \frac{1}{\tau_p}$ .

Линеаризуя по рассеянным волнам  $v'_s$ ,  $\rho'$  уравнение Эйлера и уравнение непрерывности, получим

$$\begin{aligned} \partial v'_s / \partial t = - (c_0^2 / \rho_0) \nabla \rho' - (v'_s \nabla) v_\omega + (v_\omega \nabla) v'_s; \\ \partial \rho' / \partial t + \rho_0 \nabla v'_s = (v_\omega \nabla) \rho', \end{aligned} \quad (5)$$

где  $v_\omega$  — амплитуда вихря. Из (5) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_p} \sim k_s v_\omega, \quad \frac{1}{\tau_\omega} \sim k_\omega v_\omega, \\ D_{\theta L} \sim \frac{k_\perp}{k_s} \frac{1}{\tau_\omega}. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку пакет должен приобретать эффективное  $k_\perp$  до своего опрокидывания, то  $\tau_H > \tau_p$ . Отсюда следует грубая оценка на амплитуду вихрей  $v_\omega > v_s$ , при которой они начинают оказывать существенное влияние на акустическую турбулентность. (Более тонкая оценка будет приведена ниже.) Так как в вырожденной турбулентности остаются только энергосодержащие вихри, то можно считать  $v_\omega \gg v_s$ . При этом в первом приближении акустическая турбулентность не возмущает вихревую. Основным вклад в рассеяние дают крупные вихри  $k_\omega$ ,  $\langle v_\omega^2 \rangle \sim E_\omega(k_\omega) k_\omega$ . Таким образом, акустоны с  $k_s \gg k_\omega$  в основном рассеиваются на малые углы. В этом случае, как и в обычной звуковой турбулентности, можно выделить некоторое направление  $x$  и следить за движением пробного акустона в этом направлении, т. е. считать зависимость от первых двух аргументов в  $v_s(\mathbf{r}_\perp, t, x - c_0 t)$  медленной.

Рассматривая акустон с  $k_{\perp}/k_s \ll 1$ , т. е. с характерным  $k_{\perp}$  из инерционного интервала вихрей, в системе (4) можно оставить  $\nabla_{\perp}$  (градиент по перпендикулярным координатам) только в линейных слагаемых. В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle v_s \rangle_x}{\partial t} + \langle v_s \rangle_x \frac{\partial}{\partial x} \langle v_s \rangle_x + \left\langle (v'_{sx} + v_{\omega x}) \frac{\partial}{\partial x} (v'_{sx} + v_{\omega x}) \right\rangle = \\ & = -\frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \delta\rho - (\gamma - 2) \frac{c_0^2}{\rho_0^2} \delta\rho \frac{\partial}{\partial x} \delta\rho - \\ & - (\gamma - 2) \frac{c_0^2}{\rho_0^2} \left\langle \rho' \frac{\partial}{\partial x} \rho' \right\rangle; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \langle \rho \rangle \langle v_s \rangle_x + \rho_0 \nabla_{\perp} \langle v_s \rangle_{\perp} + \frac{\partial}{\partial x} \langle \rho' (v'_{sx} + v_{\omega x}) \rangle = 0; \quad (8) \\ & \frac{\partial}{\partial t} \langle v_s \rangle_{\perp} + \langle v_s \rangle_x \frac{\partial}{\partial x} \langle v_s \rangle_{\perp} + \left\langle (v'_{sx} + v_{\omega x}) \frac{\partial}{\partial x} (v'_{s\perp} + v_{\omega\perp}) \right\rangle = \\ & = \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla_{\perp} \delta\rho. \end{aligned} \quad (9)$$

Дифференцируя (7) по времени и пренебрегая производными по медленному времени  $\partial^2/\partial t^2$ , получим

$$\begin{aligned} & 2c_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \langle v_s \rangle_x - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \langle v_s \rangle_x \frac{\partial}{\partial x} \langle v_s \rangle_x - \\ & - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \left\langle (v'_{sx} + v_{\omega x}) \frac{\partial}{\partial x} (v'_{sx} + v_{\omega x}) \right\rangle = \\ & = \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \delta\rho \langle v_s \rangle_x + \rho_0 \nabla_{\perp} \langle v_s \rangle_{\perp} + \frac{\partial}{\partial x} \langle \rho' (v'_{sx} + v_{\omega x}) \rangle \right\} + \\ & + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\gamma - 2) \frac{c_0^2}{\rho_0^2} \delta\rho \frac{\partial}{\partial x} \delta\rho + (\gamma - 2) \frac{c_0^2}{\rho_0^2} \left\langle \rho' \frac{\partial}{\partial x} \rho' \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Интегрируя (10) по  $x$ , получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \langle v_s \rangle_x + \frac{1}{2} \langle v_s \rangle_x \frac{\partial}{\partial x} \langle v_s \rangle_x + \frac{1}{2} \left\langle (v'_{sx} + v_{\omega x}) \frac{\partial}{\partial x} (v'_{sx} + v_{\omega x}) \right\rangle = \\ & = -\frac{c_0}{2} \nabla_{\perp} \langle v_s \rangle_{\perp} - \frac{c_0}{2\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \delta\rho \langle v_s \rangle_x - \frac{(\gamma - 2)}{2} \frac{c_0^2}{\rho_0^2} \delta\rho \frac{\partial}{\partial x} \delta\rho - \\ & - \frac{c_0}{2\rho_0} \langle \rho' (v'_{sx} + v_{\omega x}) \rangle - \frac{(\gamma - 2)}{2} \frac{c_0^2}{\rho_0^2} \left\langle \rho' \frac{\partial}{\partial x} \rho' \right\rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим теперь уравнение (9). Дифференцируя его по времени и пренебрегая производной  $\partial^2/\partial t^2$ , получим

$$\begin{aligned} & -2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \langle v_s \rangle_{\perp} + c_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle v_s \rangle_{\perp} - \frac{\partial}{\partial x} \langle v_s \rangle_x \frac{\partial}{\partial x} \langle v_s \rangle_{\perp} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left\langle (v'_{sx} + v_{\omega x}) \frac{\partial}{\partial x} (v'_{s\perp} + v_{\omega\perp}) \right\rangle = c_0 \nabla_{\perp} \frac{\partial}{\partial x} \langle v_s \rangle_x + \\ & + c_0 \nabla_{\perp} \langle v_s \rangle_{\perp} + \frac{c_0}{\rho_0} \nabla_{\perp} \frac{\partial}{\partial x} \delta\rho \langle v_s \rangle_x + \frac{c_0}{\rho_0} \nabla_{\perp} \frac{\partial}{\partial x} \langle \rho' (v'_{sx} + v_{\omega x}) \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогичным образом преобразуем и уравнение непрерывности (8), считая  $\langle \rho \rangle = \langle \rho(t, r_{\perp}, x - c_0 t) \rangle$  (зависимость от первых двух аргументов — медленная):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta \rho + \rho_0 \frac{\langle v_s \rangle_x}{2c_0} \frac{\partial}{\partial x} \langle v_s \rangle_x + \frac{(\gamma - 2)c_0}{2\rho_0} \delta \rho \frac{\partial}{\partial x} \delta \rho + \\ + \frac{\rho_0}{2c_0} \left\langle (v'_{sx} + v_{\omega x}) \frac{\partial}{\partial x} (v'_{sx} + v_{\omega x}) \right\rangle + \frac{c_0(\gamma - 2)}{2\rho_0} \left\langle \rho' \frac{\partial}{\partial x} \rho' \right\rangle + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \delta \rho \langle v_s \rangle_x + \frac{\rho_0}{2} \nabla_{\perp} \langle v_s \rangle_{\perp} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \langle \rho' (v'_{sx} + v_{\omega x}) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Закон дисперсии системы (11) — (13) имеет вид

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{c_0 k_{\perp}^2}{k_x}.$$

Для простоты будем считать газ изотермическим, т. е.  $\gamma = 1$ . В нелинейных слагаемых уравнения (11) можно положить

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x} \approx \frac{\rho_0}{c_0} \frac{\partial}{\partial x} \langle v_s \rangle_x.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v_s \rangle_x}{\partial t} + \langle v_s \rangle_x \frac{\partial \langle v_s \rangle_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\langle (v'_{sx} + v_{\omega x}) \frac{\partial}{\partial x} (v'_{sx} + v_{\omega x}) \right\rangle = \\ = -\frac{c_0}{2} \nabla_{\perp} \langle v_s \rangle_{\perp} - \frac{c_0}{2\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \langle \rho' (v'_{sx} + v_{\omega x}) \rangle + \frac{c_0^2}{2\rho_0^2} \left\langle \rho' \frac{\partial}{\partial x} \rho' \right\rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Система уравнений (12) — (14) не замкнута из-за наличия слагаемых, содержащих усредненные характеристики поля рассеянных волн и вихрей. Эти слагаемые за время  $\tau_p \sim 1/k_s v_{\omega}$  приводят к появлению у акустона эффективного  $k_{\perp}$  (т. е. к «раскачке» акустона в поперечном направлении) за счет его рассеяния на вихрях. Ясно, что этот эффект существен для достаточно малых  $k_s$ . (Более аккуратные оценки будут приведены ниже.) В другом предельном случае больших  $k_s$  пульсирующие средние приводят к турбулентной вязкости. Турбулентную вязкость можно получить из исходных уравнений движения (1).

### 3. ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ

Будем интересоваться медленной эволюцией акустона в системе отсчета, движущейся со скоростью  $c_0$ . В этом случае стохастический процесс столкновения акустона с вихрями в  $x$ -пространстве можно считать дельта-коррелированным случайным процессом, т. е.

$$\langle v_{\omega i}(x_1, t_1) v_{\omega j}(x_2, t_2) \rangle = \mu_{ij}^{\omega\omega}(x_2 - x_1)(t_2 - t_1).$$



В разделе 2 показано, что основной вклад в рассеяние акустона на малые углы дают крупные вихри. Для этих вихрей в отличие от больших  $k$  хорошо выполняется гипотеза Миллионщикова о гауссовости поля (см., например, [5]). (Отметим, что, вообще говоря, можно избежать использования этой гипотезы.)

Для раскрытия средних, содержащих турбулентные пульсации, воспользуемся формулой Фуруцу—Новикова [6], справедливой для гауссова дельта-коррелированного во времени случайного процесса  $f$  со средним  $\langle f \rangle = 0$ :

$$\langle fR[f] \rangle = \int_{(s)} \langle f(s) f(s') \rangle \left\langle \frac{\delta R[f]}{\delta f(s')} \right\rangle ds'. \quad (15)$$

Здесь  $R[f]$  — функционал от случайного процесса  $f$ , а  $s$  — полный набор аргументов у  $f$ . В уравнении (14) присутствуют следующие средние, содержащие турбулентные пульсации:

$$\langle v'_{sx} v_{\omega x} \rangle, \quad \langle \rho' v_{\omega x} \rangle; \quad (16)$$

$$\langle \rho' \rho' \rangle, \quad \langle \rho' v'_{sx} \rangle, \quad \langle v'_{sx} v'_{sx} \rangle. \quad (17)$$

Будем считать  $\rho'$  и  $v'_{sx}$  функционалами от случайного поля, т. е.  $v'_{sx} [v_{\omega}]$ ,  $\rho' [v_{\omega}]$ .

Воспользуемся формулой (15). Тогда получим

$$\langle v'_{sx} v_{\omega x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{xx}^{\omega\omega} \left\langle \frac{\delta v'_{sx}(r, t)}{\delta v_{\omega x}(r', t)} \right\rangle dr' + \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{x\perp}^{\omega\omega} \left\langle \frac{\delta v'_{sx}(r, t)}{\delta v_{\omega\perp}(r', t)} \right\rangle dr'. \quad (18)$$

Вычислим вариационные производные, входящие в формулы (18). Воспользуемся уравнениями движения вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho (v_s + v_{\omega}) = 0; \quad (19)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial v_{\omega}}{\partial t} [(v_s + v_{\omega}) \nabla] (v_s + v_{\omega}) = - \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \rho + \frac{c_0^2}{\rho_0^2} \delta \rho \nabla \rho.$$

Поскольку  $\omega_s \gg \omega_{\text{вихря}}$ , то в (19) можно пренебречь производной  $\partial v_{\omega} / \partial t$ .

Представим (19) в виде

$$\rho = \rho_0 - \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} \rho (v_{si} + v_{\omega i}) d\tau;$$

$$v_{si} = v_{si}^0 - \int_0^t (v_{sj} + v_{\omega j}) \frac{\partial}{\partial x_j} (v_{si} - v_{\omega i}) d\tau - \frac{c_0^2}{\rho_0} \int_0^t \frac{\partial \rho}{\partial x_i} d\tau + \\ + \frac{c_0}{\rho_0^2} \int_0^t \delta \rho \frac{\partial \rho}{\partial x_i} d\tau.$$

Продифференцируем эти выражения по  $\delta/\delta v_{\omega k}(r', t')$  при  $t > t' > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta v_{\omega k}(\mathbf{r}', t')} = & - \int_{t'}^t \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\delta \rho(\mathbf{r}, \tau)}{\delta v_{\omega k}(\mathbf{r}', t')} [v_{si}(\mathbf{r}, \tau) + v_{\omega i}(\mathbf{r}, \tau)] \right\} d\tau - \\ & - \int_{t'}^t \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \rho(\mathbf{r}, \tau) \frac{\delta v_{si}(\mathbf{r}, \tau)}{\delta v_{\omega k}(\mathbf{r}', t')} + \rho(\mathbf{r}, \tau) \delta_{ik} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\tau - t') \right\} d\tau; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta v_{si}(\mathbf{r}, t)}{\delta v_{\omega k}(\mathbf{r}', t')} = & - \int_{t'}^t \left[ \frac{\delta v_{sj}(\mathbf{r}, \tau)}{\delta v_{\omega k}(\mathbf{r}', t')} + \delta_{ik} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t' - \tau) \frac{\partial}{\partial x_j} (v_{si} + \right. \\ & \left. + v_{\omega i}) \right] d\tau - \int_{t'}^t [v_{sj}(\mathbf{r}, \tau) - v_{\omega j}(\mathbf{r}, \tau)] \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\delta v_{si}(\mathbf{r}, \tau)}{\delta v_{\omega k}(\mathbf{r}', t')} + \right. \\ & \left. + \delta_{ik} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\tau - t') \right] d\tau - \frac{c_0^2}{\rho_0} \int_{t'}^t \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\delta \rho(\mathbf{r}, \tau)}{\delta v_{\omega k}(\mathbf{r}', t')} d\tau + \\ & + \frac{c_0^2}{\rho_0^2} \int_{t'}^t \frac{\delta}{\delta v_{\omega k}(\mathbf{r}', t')} \delta \rho \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, \tau)}{\partial x_i} d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

При получении формул (20), (21) использован принцип причинности, вследствие которого  $\rho$  и  $v'_{sx}$  в момент времени  $t$  могут зависеть от  $v_{\omega}$  только в предыдущие моменты времени  $t'$  ( $t' < t$ ), т. е. в (20), (21)  $\int_0^{t'} \{ \dots \} d\tau \equiv 0$ . Устремим  $t' \rightarrow t$ . В результате получим

$$\frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta v_{\omega i}(\mathbf{r}', t')} = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \rho(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta v_{st}(\mathbf{r}, t)}{\delta v_{\omega k}(\mathbf{r}', t')} = & - \frac{1}{2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial x_k} [v_{si}(\mathbf{r}, t) + v_{\omega i}(\mathbf{r}, t)] - \\ & - \frac{1}{2} \delta_{ik} [v_{sj}(\mathbf{r}, t) + v_{\omega j}(\mathbf{r}, t)] \frac{\partial}{\partial x_j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (23)$$

Вариационные производные в (22), (23) берутся от поля  $\mathbf{v}_s = \langle \mathbf{v}_s \rangle + \mathbf{v}'_s$ . Если взять вариационную производную от уравнений (7) — (9) по  $\delta/\delta v_{\omega}(\mathbf{r}', t)$ , то нетрудно видеть, что в силу условия  $\langle \rho' \rangle = 0$ ,  $\langle \mathbf{v}'_s \rangle = 0$  она обращается в нуль, т. е.

$$\frac{\delta \mathbf{v}_s(\mathbf{r}, t)}{\delta v_{\omega}(\mathbf{r}', t)} = \frac{\delta \mathbf{v}'_s(\mathbf{r}, t)}{\delta v_{\omega}(\mathbf{r}', t)}.$$

Используя формулы (22), (23), получим

$$\langle v'_{sx} v_{\omega x} \rangle = -\frac{1}{2} \mu_{xx}^{\omega\omega}(0) \frac{\partial}{\partial x} \langle v_s \rangle_x - \frac{1}{2} \mu_{x\perp}^{\omega\omega}(0) \nabla_{\perp} \langle v_s \rangle_x + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mu_{xx}^{\omega\omega}}{\partial x} \right) \Big|_{r=r'} \langle v_s \rangle_x + \frac{1}{2} (\nabla_{\perp} \mu_{xx}^{\omega\omega}) \Big|_{r=r'} \langle v_s \rangle_{\perp}. \quad (24)$$

Поскольку коррелятор  $\langle v_{\omega i} v_{\omega j} \rangle = K_{ij}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  в нуле имеет максимум, то третье и четвертое слагаемые в (24) обращаются в нуль. В результате

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle v'_{sx} v_{\omega x} \rangle = -\frac{1}{2} \mu_{xx}^{\omega\omega}(0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle v_s \rangle_x - \frac{1}{2} \mu_{x\perp}^{\omega\omega}(0) \nabla_{\perp} \frac{\partial}{\partial x} \langle v_s \rangle_x, \quad (25)$$

т. е. действительно пульсирующие средние приводят к турбулентной вязкости, причем пространственная часть коррелятора вихря в нуле является коэффициентом турбулентной вязкости на вихрях. В формуле (25) можно пренебречь поперечной вязкостью по сравнению с продольной. Аналогично формуле (25) вычислим  $\partial \langle \rho' v_{\omega x} \rangle / \partial x$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \rho' v_{\omega x} \rangle = -\frac{1}{2} \mu_{xx}^{\omega\omega}(0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \rho \rangle - \frac{1}{2} \mu_{x\perp}^{\omega\omega}(0) \frac{\partial}{\partial x} \nabla_{\perp} \langle \rho \rangle. \quad (26)$$

В (26) вновь можно пренебречь поперечной вязкостью по сравнению с продольной и подставить  $\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x} \approx \frac{\rho_0}{c_0} \frac{\partial}{\partial x} \langle v_s \rangle_x$ , в результате

$$-\frac{c_0}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \langle \rho' v_{\omega x} \rangle = \frac{1}{2} \mu_{xx}^{\omega\omega}(0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle v_s \rangle_x.$$

Средние (17) также приводят к турбулентной вязкости, но уже звука на звуке, которой можно пренебречь, по сравнению с турбулентной вязкостью звука на вихрях. Окончательно уравнение (14) принимает вид

$$\frac{\partial \langle v_s \rangle_x}{\partial t} + \langle v_s \rangle_x \frac{\partial \langle v_s \rangle_x}{\partial x} = -\frac{c_0}{2} \nabla_{\perp} \langle v_s \rangle_{\perp} + \frac{\mu_{xx}^{\omega\omega}(0)}{2} \frac{\partial^2 \langle v_s \rangle_x}{\partial x^2}.$$

Что касается уравнения (12), то для дальнейшего нам понадобится только его линейная часть, поэтому нет необходимости раскрывать входящие в него пульсирующие средние.

Отметим, что предложенный здесь метод получения турбулентной вязкости может быть применен и к ряду других задач, содержащих быстрые и медленные движения. При этом можно обойтись и без предположения о гауссовости случайного поля. Аналогично предыдущему можно получить турбулентную вязкость в уравнениях гидродинамики, т. е., по существу, обосновать гипотезу Буссинеска, получить уравнение генерации среднего магнитного поля в «динамо» теории и т. д.

#### 4. СПЕКТРЫ АКУСТОВИХРЕВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Оценим прежде всего коэффициент турбулентной вязкости  $\mu^{\omega\omega}$

$$\langle v_{\omega}^2 \rangle \sim \mu^{\omega\omega} \delta(t) \sim \mu^{\omega\omega} / \tau_K,$$

где  $\tau_K$  — характерное время расщепления корреляций. При  $t \gg \gg \tau_K$  акустоны рассеиваются на вихрях в  $x$ -пространстве как на некоррелированных рассеивающих центрах;  $\tau_K \sim L/c_0 \sim 1/k_{\perp} c_0 \sim \sim 1/k_{\perp} c_0$ ; отсюда

$$\mu^{\omega\omega} \sim v_{\omega}^2 / k_{\perp} c_0. \quad (27)$$

Как следует из (11) и (13), при достаточно малых  $k_s$  слагаемое с дисперсией может достигать значительной величины (в отличие от чисто акустической турбулентности  $k_{\perp}$  теперь нельзя произвольно уменьшать), а слагаемое с турбулентной вязкостью мало. Условие преобладания дисперсии над нелинейностью имеет вид

$$v_{sx} \partial v_{sx} / \partial x \ll c_0 \nabla_{\perp} v_{s\perp} \sim c_0 k_{\perp}^2 v_{sx} / k_s, \quad (28)$$

т. е.

$$\sqrt{v_{sx} / c_0} \ll k_{\perp} / k_s \ll 1.$$

Условие (28) одновременно показывает, что турбулентной вязкостью можно пренебречь по сравнению с нелинейностью и дисперсией: соотношение (28) накладывает ограничение на величину масштаба турбулентности; при его выполнении турбулентность является слабой. В этом случае, используя или размерностные соображения, или теорию слабой турбулентности, получим результат работы [1]:  $\varepsilon_k \sim k^{-3/2}$ .

С ростом  $k_s$  неравенство (28) перестает выполняться. В области

$$k_s \lesssim k_{\perp} \sqrt{c_0 / v_s} \quad (29)$$

турбулентность становится сильной. Спектр в области (29) найдем, используя колмогоровские соображения. Воспользуемся выражением для характерного времени нелинейного взаимодействия, полученным в работе [1]:

$$1/\tau \sim v_s k_{\perp}^2 / k_s. \quad (30)$$

Учитывая (29), получим  $1/\tau \sim \varepsilon_s k_s^2 / c_0$ .

Из  $\partial \varepsilon_s / \partial t + \partial P_k / \partial k_s = 0$  следует  $\varepsilon_s \sim P_s^{1/2} c_0^{1/2} k_s^{-3/2}$ .

Таким образом, спектр  $k_s^{-3/2}$  оказывается справедливым не только в области слабой турбулентности, но и в области сильной турбулентности. При  $k_s \gg k_{\perp} \sqrt{c_0 / v_s}$  дисперсия не может остановить укручения и пакет, вообще говоря, может опрокинуться. При малом количестве опрокидывающихся волн спектр носит «квазидинамический» характер  $\varepsilon_s \sim k^{-2}$  [2—4]. Однако если турбулентная вязкость достаточно велика, то пакеты сильно размываются и пики не образуются. При этом размываются особенности у амплитуд процессов, вышших по акустическому взаимодействию, что вновь позволяет воспользоваться моделью слабой турбулентности. Критерием этого приближения в данной области волновых

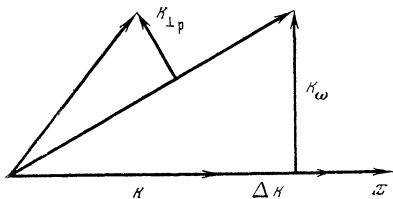


Рис. 1

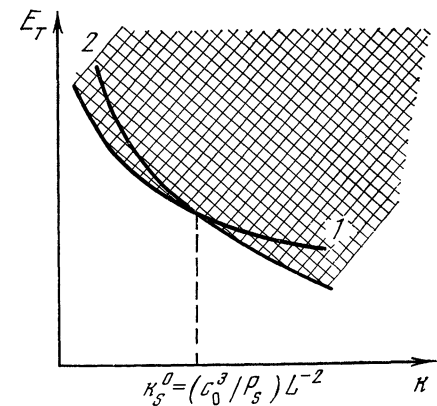


Рис. 2

чисел является малость корреляционной длины, связанной с турбулентной вязкостью, по сравнению с длиной свободного пробега, соответствующей взаимодействию фононов согласно (30).

В результате получим  $E_s < k_s L E_T$ , т. е.  $E_T > c_0^{1/2} P_s^{1/2} k_s^{-3/2}$ , где  $E_T$ ,  $E_s$  — соответственно энергии крупномасштабных вихрей и фононов с волновым числом  $k_s$ .

Рассмотрим теперь случай, когда турбулентность вихрей поддерживается стационарной, т. е. имеет колмогоровский характер. Ясно, что в этом случае эффекты дисперсии из-за рассеяния на вихрях еще больше, чем в вырожденной турбулентности. Из коэффициента диффузии (6), усредненного по вихрям, следует, что основной вклад в рассеяние акустона дают сравнимые вихри, т. е.  $k_\omega \sim k_s$ , и приближение выделенного направления несправедливо. Однако поскольку относительный поворот фононов друг относительно друга (который определяет размытие особенности при их взаимодействии) по-прежнему достаточно мал, то все изложенное выше о роли дисперсии в формировании спектра  $\epsilon_s \sim k^{-3/2}$  качественно сохраняется и в данном случае.

Рассмотрим рассеяние пакета на угол  $\theta \lesssim 1$ . Пусть вначале пакет был одномерным  $\mathbf{k}_s = (k_x, 0, 0)$  с характерной шириной  $\Delta k$ . После рассеяния на вихре  $\mathbf{k}_\omega$  пакет перестает быть одномерным и приобретает некоторое эффективное  $k_{\perp p}$  (рис. 1):

$$k_{\perp p} \sim k_\omega \Delta k / (k + \Delta k) \sim \Delta k.$$

Как показано в [1],  $k_{\perp p}$  резонансно (что и является основанием для объединения гармоник в пакет) в конусе  $k_{\perp 0}^2 \sim k_{\parallel}^2 \delta\rho/\rho$  или  $k_{\perp}/k_s \sim \sqrt{v_s/c_0}$ . Следовательно, после каждого соударения с вихрем пакет «рассыпается», и в нем остаются только резонансные гармоники с характерным

$$k_{\perp p} \sim k_s \sqrt{\delta\rho/\rho_0}. \quad (31)$$

Формула (31) показывает, что при этом эффекты нелинейной генерации новых гармоник и уход их из пакета за счет рассеяния уравниваются. Что же касается турбулентной вязкости, то, как следует из (27), она по-прежнему определяется самыми крупными вихрями.

Рассмотрим теперь вопрос о влиянии амплитуды вихрей на установление спектра  $k^{-3/2}$  в случае колмогоровской турбулентности вихрей. Поскольку пакет сформирован из рассеянных волн, то

$$\tau_p \lesssim \tau_H. \quad (32)$$

Из (32) получим  $v_\omega/v_s \gtrsim v_s/c_0$ , что можно записать также в виде

$$E_T > P_s \frac{1}{c_0} k_s^{-1}.$$

На рис. 2 кривые, выше которых существенны дисперсия и турбулентная вязкость, обозначены соответственно 1 и 2, а область спектра  $\varepsilon_s \sim k_s^{-3/2}$  заштрихована<sup>1</sup>.

Отметим, что при колмогоровской турбулентности вихрей изотропизация спектра акустонов происходит довольно быстро, по существу, за одно столкновение с вихрем. (При характерной неизотропности источника  $\theta \lesssim 1$ .)

Так как  $\tau_\lambda \lesssim \tau_H$ , где  $\tau_\lambda$  — время свободного пробега,  $\tau_\lambda \sim 1/k_s c_0$ , то

$$1/c_0 \lesssim c_0/\varepsilon_s k_s. \quad (33)$$

Из (33) следует, что неизотропная область в спектре  $k_s^{-3/2}$  может находиться в интервале  $0 < k_s \lesssim P_s/c_0^3$ .

Авторы признательны В. С. Львову и А. В. Михайлову за полезную дискуссию.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е., Сагдеев Р. З. — Докл. АН СССР, 1970, 192, № 2, с. 297.
2. Кадошцев В. Б., Петвиашвили В. И. — Докл. АН СССР, 1973, 208, № 4, с. 794.
3. Каплан С. А. — Докл. АН СССР, 1964, 94, № 1 с. 33.
4. Каплан С. А., Пикельнер С. Б. Межзвездная среда. М., Физматгиз, 1963.
5. Миллионщиков М. Д. — Докл. АН СССР, 1941, 32, № 9, с. 611.
6. Новиков Е. А. — ЖЭТФ, 1964, 47, № 5 (11), с. 1919.
7. Львов В. С., Михайлов А. В. Препринт № 54. Новосибирск, ИАЭ СО АН СССР, 1977.

<sup>1</sup> Несколько позднее, но независимо область слабой турбулентности выше кривой 2 исследована Львовым и Михайловым [7].

# ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ АУТОКОЛЕБАНИЙ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСОВ

В. И. АРНОЛЬД

## 1. ВЫБОР ЧИСЛА ПАРАМЕТРОВ В ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ

Потеря устойчивости стационарных или автоколебательных режимов рассматривается обычно как однопараметрическое явление. Результаты однопараметрического исследования хорошо известны. При изменении параметра (скажем, числа Рейнольдса) собственные числа линеаризованной задачи при некотором критическом значении параметра выходят на мнимую ось (или мультипликаторы периодического движения — на единичную окружность), после чего наблюдается либо жесткая потеря устойчивости (переход на далекий от исходного режим движения), либо мягкая, т. е. возникновение автоколебаний для случая потери устойчивости равновесия и удвоение периода или возникновение двухчастотного квазипериодического режима для случая потери устойчивости периодического движения. Отличие движения, возникающего при мягкой потере устойчивости, от исходного — порядка квадратного корня из закритичности (т. е. из отличия параметра от критического значения).

Эта картина потери устойчивости равновесий и автоколебаний известна со времен Пуанкаре и подробно исследована А. А. Андроновым и его школой еще в 30-х годах.

Оказывается, многие явления, происходящие при потере устойчивости автоколебаний, становятся понятными, лишь если рассматривать двухпараметрические, а не однопараметрические семейства колебательных систем.

Выбор естественного числа параметров в той или другой задаче является проблемой такого же характера, как выбор числа степеней свободы при описании определенного физического явления. Учет дополнительных параметров не приводит к существенному изменению результатов, если исходные параметры были выбраны правильно.

Однопараметрическая точка зрения естественна при рассмотрении вырождений коразмерности 1, т. е. явлений, происходящих на гиперповерхностях (поверхностях, задаваемых одним уравнением) в функциональном (вообще говоря, бесконечномерном) пространстве всех систем изучаемого класса. Такие гиперповерхности могут делить функциональное пространство и возникают естественным образом как границы областей разного поведения системы (скажем, границы областей устойчивости и т. д.).

Каждая индивидуальная система малым певелением может быть сдвинута с гиперповерхности вырождения, и в этом смысле вырождение не встречается в системах общего положения.

Однако в однопараметрическом семействе простейшие вырождения встречаются уже неустранимым посредством малого шевеления семейства образом. Действительно, однопараметрическое семейство систем представляет собой кривую в функциональном пространстве всех систем. Эта кривая может трансверсально пересекать гиперповерхность в функциональном пространстве, соответствующую рассматриваемому вырождению (скажем, соответствующую потере устойчивости).

В таком случае всякая близкая кривая также пересекает нашу гиперповерхность (в точке, близкой к точке пересечения исходной кривой с этой гиперповерхностью). Таким образом, хотя вырождение и можно устранить при каждом фиксированном значении параметра, оно все равно неизбежно возникает при некотором близком значении параметра.

При исследовании однопараметрических семейств общего положения можно пренебречь подмногообразиями коразмерности два в функциональном пространстве всех систем. Действительно, если кривая в функциональном пространстве, представляющая наше однопараметрическое семейство, пересекает это подмногообразие коразмерности два, то сколь угодно малым шевелением этой кривой можно сдвинуть ее с подмногообразия.

Многообразия коразмерности два в функциональном пространстве соответствуют двукратным вырождениям. Исследование таких вырождений следует проводить в двухпараметрических семействах. При рассмотрении двухпараметрических семейств двукратные вырождения возникают как неустранимые в отдельных точках плоскости параметров. Следы гиперповерхностей, соответствующих однократным вырождениям, на этой плоскости делят окрестность точки двукратного вырождения на секторы. Это разбиение называется *бифуркационной диаграммой*. В каждом секторе бифуркационной диаграммы фазовый портрет изучаемой системы имеет определенный вид. При переходе из одного сектора в другой происходит определенная перестройка, определяемая однократным вырождением на границе сектора. В самой особой точке фазовый портрет вырождается сильнее всего, но этот вырожденный портрет представляет как раз наименьший реальный интерес — сложные вырождения следует изучать не сами по себе, а в семействах с таким числом параметров, при котором вырождение становится неустранимым, и ответ должен даваться в виде совокупности бифуркационной диаграммы («циферблата») и фазовых портретов, соответствующих секторам, лучам и центру диаграммы.

Знание бифуркаций в двухпараметрическом семействе при двукратном вырождении позволяет получить существенную информацию о явлениях, происходящих в однопараметрических семействах. Действительно, рассмотрим на плоскости параметров двухпараметрического семейства кривую общего положения, проходящую недалеко от особой точки двукратного вырождения. Эта ли-



ния пересечет, вообще говоря, несколько секторов бифуркационной диаграммы. Это означает, что в однопараметрическом семействе, соответствующем указанной кривой, будет последовательно происходить несколько перестроек, определяемых тем, какие границы секторов пересекает кривая. Таким образом, локальное изучение бифуркаций в двухпараметрических семействах позволяет получить информацию о некоторых глобальных перестройках в однопараметрических семействах (например, информацию о бифуркациях, следующих за первой потерей устойчивости, которую весьма трудно получить иным способом).

## 2. СИЛЬНЫЕ И СЛАБЫЕ РЕЗОНАНСЫ

В задаче о потере устойчивости периодического движения сразу виден один параметр, который грубо можно представить себе как модуль мультипликатора<sup>1</sup> (потеря устойчивости происходит при его обращении в единицу).

Вторым параметром в этой задаче является аргумент мультипликатора: мультипликатор может выходить на единичную окружность в разных ее точках. Если аргумент мультипликатора в момент его выхода на единичную окружность соизмерим с  $2\pi$ , то имеет место *резонанс* при потере устойчивости. Такой резонанс является двукратным вырождением и должен изучаться в двухпараметрическом семействе. Соответствующие два параметра имеют простой физический смысл: один из них — это декремент, а второй — расстройка частоты от резонанса (разность между аргументом мультипликатора и его резонансным значением).

На плоскости этих двух параметров возникает, как это описано выше, бифуркационная диаграмма, секторы которой отвечают разным типам поведения системы. Если в однопараметрическом семействе потеря устойчивости происходит вблизи резонанса, то это однопараметрическое семейство изображается кривой на нашей бифуркационной диаграмме, проходящей вблизи центральной точки диаграммы. В этом случае по нашей диаграмме можно прочитать последовательность перестроек типов движения, происходящую вблизи потери устойчивости. Проводя различные кривые на диаграмме, мы получим конечный набор последовательностей перестроек, реализующихся в общих однопараметрических системах, теряющих устойчивость вблизи резонанса.

Вычисления показывают, что особенно сильно влияют на картину потери устойчивости резонансы порядков  $q = 1, 2, 3, 4$  (резонанс имеет порядок  $q$ , если мультипликатор равен

---

<sup>1</sup> Мультипликаторами периодического движения называются собственные числа линеаризации функции последования Пуанкаре в точке, соответствующей этому периодическому движению.

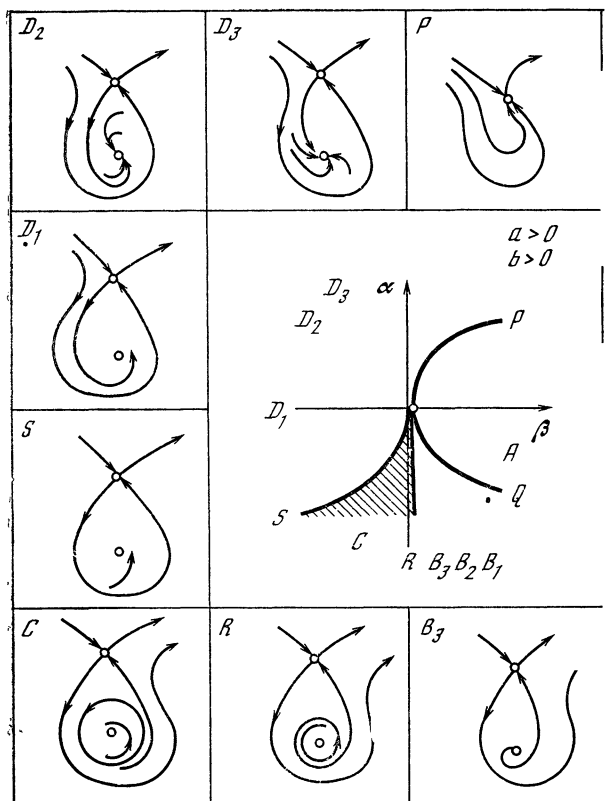


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма (в центре) и перестройка в случае  $q = 1$

$\exp(2\pi i p/q)$ . Эти резонансы называются *сильными*. зом, аргументы мультипликаторов сильных резонансов  $0, \pm 90, \pm 120, 180^\circ$ .

Резонансы порядков  $q > 4$  называются *слабыми*. го резонанса потеря устойчивости происходит почти в нерезонансном случае. С этой точки зрения «физически» с  $360^\circ$  следует считать лишь углы, близкие  $\pm 120, 180^\circ$ , остальные же углы «практически не с  $360^\circ$ .

Описание бифуркационных диаграмм и перестроений вблизи потери устойчивости в окрестности синхронизации приведено в следующих разделах.

Оказывается, после некоторой редукции (грубо го- ления и «отбрасывания малосущественных членов») в

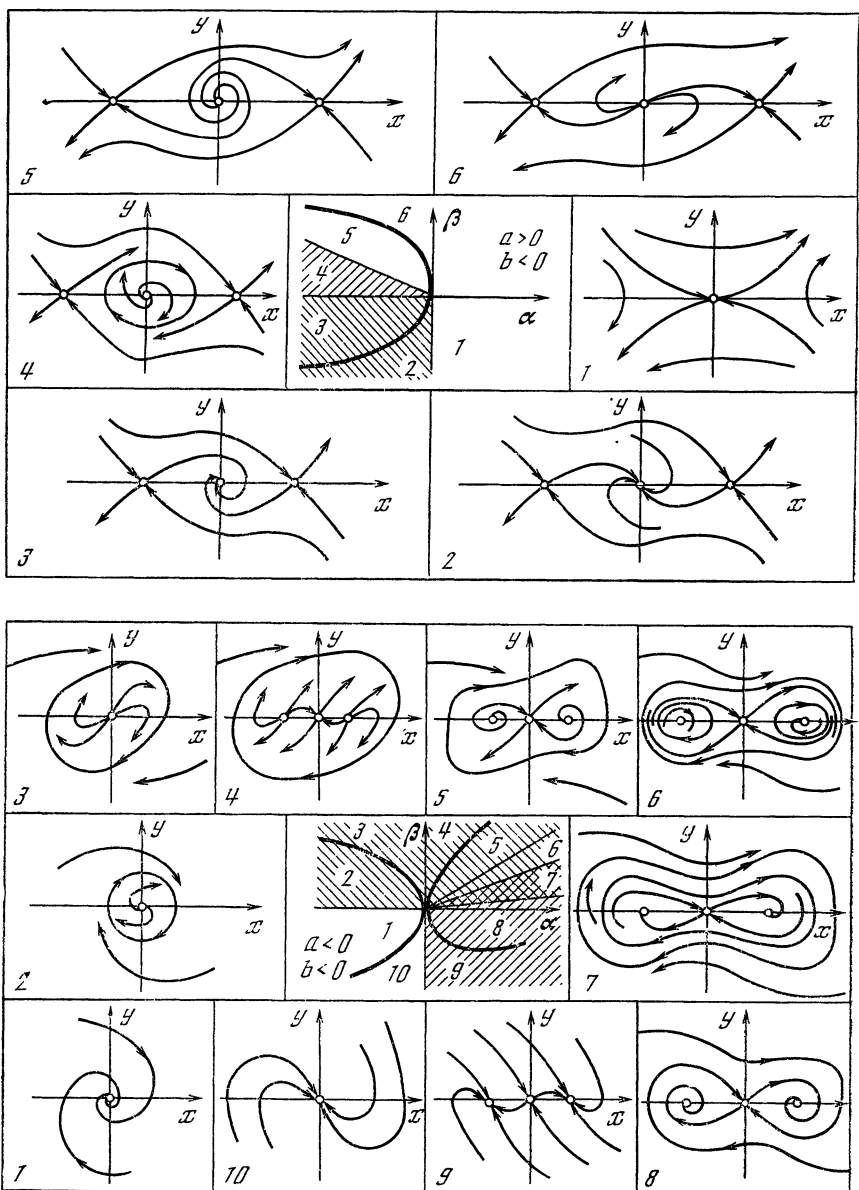
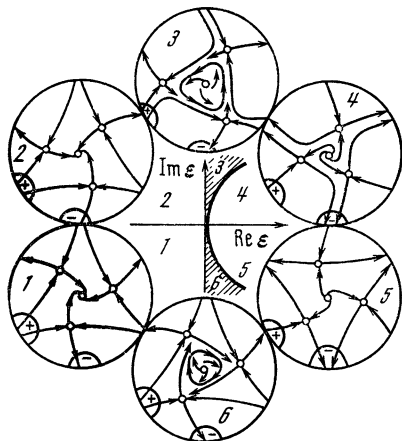


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма и перестройка фазового портрета в двух возможных случаях резонанса  $q = 2$

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма и перестройка фазового портрета в случае  $q = 3$  ( $\text{Re } A < 0$ )



дится к изучению бифуркаций фазовых портретов векторных полей на плоскости, переходящих в себя при повороте на угол  $2\pi/q$  и зависящих общим образом от двух параметров.

Соответствующие сильным резонансам редуцированные дифференциальные уравнения имеют вид

$$\dot{x} = \alpha x + \beta + ax^2 + bxy, \quad q = 1;$$

$$\dot{x} = \alpha x + \beta y + ax^3 + bx^2y, \quad q = 2;$$

$$\dot{z} = \varepsilon z + Az |z|^2 + \bar{z}^2, \quad q = 3;$$

$$\dot{z} = \varepsilon z + Az |z|^2 + \bar{z}^3, \quad q = 4.$$

Здесь  $y = \dot{x}$ ;  $x, y, a, b$  — вещественные, а  $z, \varepsilon, A$  — комплексные числа; параметрами деформации являются  $\alpha, \beta$  и  $\varepsilon$ ; числа  $a, b, \text{Re } A, \text{Im } A$  отличны от нуля.

Вид бифуркационных диаграмм и фазовых портретов приведен на рис. 1—5. В случаях  $q = 1, 2$  и 3 ответы зависят лишь от знаков  $a, b, \text{Re } A, \text{Im } A$ .

В случае  $q = 4$  плоскость комплексного переменного  $A$  разбивается на ряд областей, в каждой из которых ответ (вид бифуркационных диаграмм и перестроек) различен. Значения параметра  $A$  на кривых, разделяющих эти области, можно не рассматривать: они соответствуют уже не двукратному, а трехкратному вырождению (по той же причине можно не рассматривать случаи  $a = 0, b = 0, \text{Im } A = 0, \text{Re } A = 0$  при  $q \neq 4$ ).

Следует подчеркнуть, что, несмотря на простоту редуцированных уравнений, их исследование требует преодоления серьезных математических трудностей (главным образом при исследовании вопросов о числе предельных циклов).

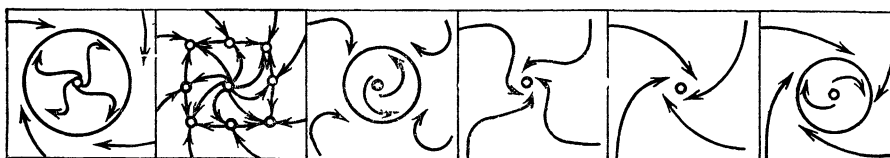
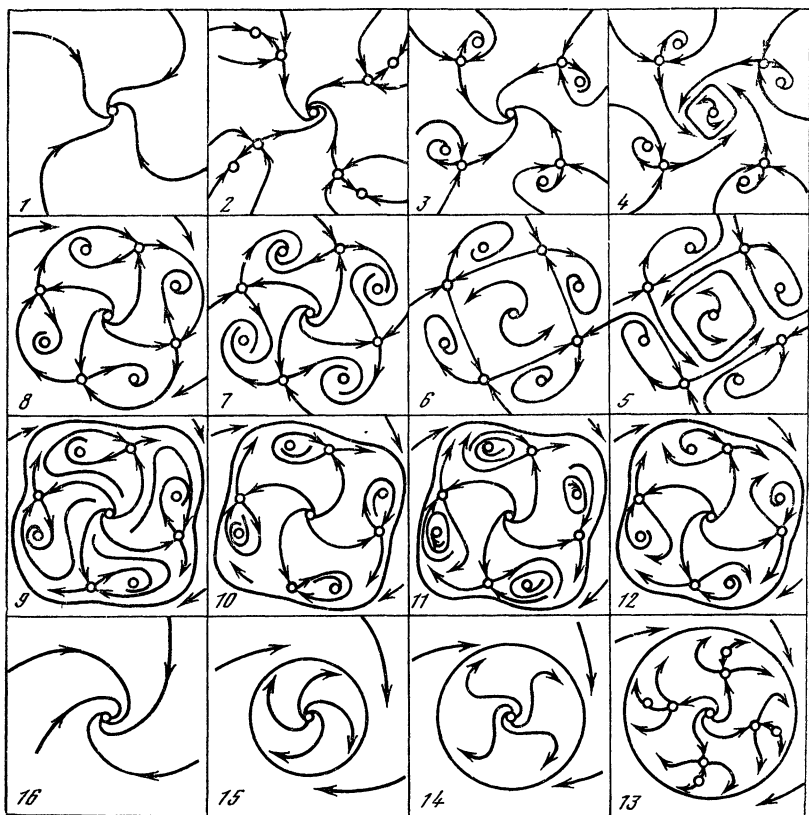
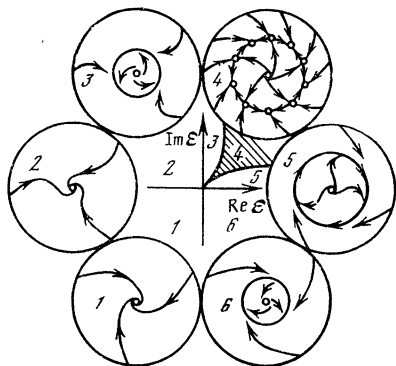


Рис. 4. Некоторые варианты перестроек для  $q = 4$

Рис. 5. Бифуркационная диаграмма и перестройка фазового портрета при  $q \geq 5$  (уравнение  $z = \varepsilon z + Az |z|^2 + \bar{z}^{q-1}$ )



Случай  $q = 4$  до сих пор полностью не исследован; приведенные далее картины перестроек отвечают лишь некоторым из областей плоскости  $A$ .

### 3. МЕТОД НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ПУАНКАРЕ

Основой теории бифуркаций является метод нормальных форм Пуанкаре, играющий при исследовании нелинейных задач такую же роль, какую метод Фурье (метод разложения по собственным колебаниям) играет в линейной теории. Хотя этот метод, разработанный еще в диссертации Пуанкаре, известен уже более ста лет, он начал действительно широко применяться к нелинейным задачам лишь в последнее десятилетие. Сейчас имеется уже немало работ, где этот метод применяется к системам как с конечным, так и с бесконечным числом степеней свободы. (К сожалению, в настоящее время совершенно не разработан аналог метода нормальных форм Пуанкаре для систем со сплошным спектром.)

Сущность метода Пуанкаре состоит в том, что вместо отыскания решений дифференциального уравнения ищутся диффеоморфизмы (замены переменных), приводящие уравнение к возможно более простому виду.

Рассмотрим, например, систему, имеющую положение равновесия, в окрестности этого положения равновесия. Выберем начало координат в этом положении равновесия. Тогда система уравнений запишется в виде

$$\dot{x} = A(x), \quad A(x) = \Lambda x + B(x), \quad (1)$$

где  $\Lambda$  — линейный оператор,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , а  $B$  содержит лишь члены выше первой степени по  $x$ .

Предположим для простоты, что все собственные числа  $\lambda_s$  оператора  $\Lambda$  различны. Тогда можно выбрать систему координат так, что оператор  $\Lambda$  будет диагональным, и в линейном приближении система распадается на одномерные.

Будем искать замену координат  $x = y + h(y)$ , где  $h$  обозначает члены выше первой степени, так, чтобы по возможности уничтожить члены выше первой степени в правой части системы (1). Оказывается, в общем («нерезонансном») случае можно подходящей заменой координат полностью уничтожить все нелинейные члены в ряду Тейлора правой части системы в нуле.

Вычислим правую часть (1) в новой системе координат. Мы получим

$$(E + \partial h / \partial y) \dot{y} = A(y + h(y)),$$

$$\dot{y} = (E + \partial h / \partial y)^{-1} A(y + h(y)).$$

Итак,  $\dot{y} = \Lambda y + B(y) + C(y) + \dots$ , где  $C(y) = \Lambda h(y) - \frac{\partial h}{\partial y} \Lambda y$  (многоточие означает члены степени выше первой по  $B$  и  $h$ ).

Таким образом, влияние деформации системы координат сводится в первом приближении к изменению правой части уравнения на величину скобки Пуассона линейной части исходного поля и поля деформации.

Рассмотрим члены второй степени в ряду Тейлора правой части  $B(x) = B_2(x) + \dots$

Будем искать члены второй степени в ряду Тейлора замены координат

$$h(y) = h_2(y) + \dots$$

так, чтобы в новой системе координат уничтожить члены второй степени по  $y$ . Мы получаем для  $h_2$  уравнение

$$\Lambda h_2(y) - \frac{\partial h_2}{\partial y} \Lambda y = -B_2(y).$$

Обозначим через  $h_2^{k,m}$  (соответственно  $B_2^{k,m}$ ) коэффициент разложения  $k$ -й компоненты  $h$  (соответственно  $B$ ) при  $y^m = y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}$ . Решение уравнения для  $h_2$  дается формулой

$$h_2^{k,m} = - \frac{B_2^{k,m}}{\lambda_k - (m, \lambda)}.$$

Обращение в нуль одного из знаменателей  $\lambda_k - (m, \lambda)$  называется *резонансом*. Число  $|m| = m_1 + \dots + m_n$  называется *порядком резонанса*.

Если в системе нет резонансов второго порядка, то члены второй степени можно уничтожить подходящей заменой координат.

Рассмотрим полученную систему с правой частью  $\Lambda y + B_3(y) + \dots$  и сделаем замену  $y = z + h_3(z)$ . Если нет резонансов третьего порядка, мы исключим все члены третьей степени.

Продолжая таким же образом, мы можем исключить все нелинейные члены в ряду Тейлора правой части, если в системе отсутствуют резонансы всех порядков. В новой системе координат уравнение сведется к простейшему линейному  $\dot{w} = \Lambda w$ .

Следует заметить, что описанная выше формальная процедура не всегда приводит к сходящимся рядам.

В приложениях к теории бифуркаций основную роль играют несколько первых приближений метода, и вопрос о сходимости не играет большой роли.

Если резонансы в системе есть, то некоторые из нелинейных членов нельзя убить заменами переменных, а именно, в присутствии резонанса  $\lambda_k = (m, \lambda)$  нельзя убить  $x^m$  в  $k$ -й компоненте поля. Это слагаемое называется *резонансным*.

В этом случае метод Пуанкаре позволяет уничтожить все нелинейные члены в ряду Тейлора правой части уравнения, кроме резонансных.

Заметим, что резонанс является одним из видов вырождения, следовательно, он не должен наблюдаться в системах общего положения и должен изучаться не для индивидуальной системы, а для семейства систем, зависящих от параметров.

В общем семействе систем, зависящих от параметра, резонансы будут наблюдаться при отдельных значениях параметра. В этом случае при значениях параметра, близких к резонансному, метод Пуанкаре позволяет исключить все нелинейные члены.

Однако получаемые при этом замены будут разрывно зависеть от параметра, так как в формулах замены при резонансном значении параметра возникает полюс. Поэтому при исследовании прохождения через резонанс следует сохранять резонансные члены не только при резонансном значении параметра (когда их и нельзя уничтожить), но и при близких нерезонансных значениях параметра. В этом случае замену переменных удастся сделать гладко зависящей от параметров также и в момент прохождения резонанса.

#### 4. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ВБЛИЗИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Метод Пуанкаре, описанный выше для случая положения равновесия, переносится и на периодические движения. Имеются два в существенном эквивалентных способа проделать такое перенесение.

Один из этих способов состоит в том, чтобы рассмотреть функцию последования Пуанкаре, т. е. отображение площадки, трансверсальной к исследуемому циклу, в себя, заданное фазовыми кривыми изучаемой системы. Выберем систему координат на трансверсальной площадке так, чтобы начало координат было в точке нашего цикла

Функция последования запишется в виде

$$x \rightarrow \Lambda x + \dots, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

где  $\Lambda$  — линейный оператор, а многоточие означает нелинейные члены. Собственные числа оператора  $\Lambda$  называются *мультипликаторами* рассматриваемого периодического движения.



Заменами координат

$$x = y + (\text{нелинейные члены})$$

можно уничтожить нелинейные члены функции последования. Резонансами в этом случае являются соотношения  $\lambda_k = \lambda^m$ , где  $\lambda^m = \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n}$ .

Если резонансов нет, то в ряду Тейлора функции последования можно уничтожить все нелинейные члены. Если резонансы есть, то следует оставить резонансные члены ( $y^m$  в  $k$ -й компоненте). При изучении семейств в окрестности резонансов следует сохранить резонансные члены.

Второй подход к задаче о периодических движениях состоит в том, что фазовые кривые, близкие к рассматриваемому циклу, описываются при помощи уравнения с периодическими коэффициентами, в котором число фазовых координат на единицу меньше исходного, а роль времени играет фаза движения вдоль нашего цикла.

В этом случае метод Пуанкаре приводит к периодическим по времени заменам переменных. В нерезонансном случае такими заменами удастся убить все нелинейные по новым фазовым координатам члены в разложении правой части в ряд Тейлора по степеням компонент отклонения от рассматриваемого цикла (коэффициенты этих рядов являются рядами Фурье по времени).

В резонансном случае остаются резонансные члены. Пусть наше уравнение имеет вид

$$\dot{x} = \Lambda x + \dots, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

где нелинейные члены имеют по  $t$  период  $2\pi$ . Тогда условие резонанса имеет вид  $\lambda_k = \lambda^m + im_0$ , соответствующий резонансный член содержит  $x^m e^{im_0 t}$  в  $k$ -й компоненте.

При изучении семейств следует сохранять в нормальной форме это слагаемое не только в момент резонанса, но и поблизости от него.

## 5. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Применим сказанное выше к задаче о потере устойчивости. Рассмотрим функциональное пространство систем, имеющих периодические движения. Граница области систем с устойчивыми периодическими движениями представляет собой гиперповерхность из трех компонент, каждая из которых имеет коразмерность 1 в функциональном пространстве.

Действительно, на границе лежат системы, имеющие мультипликатор, равный по модулю 1. Но характеристическое уравнение вещественно, поэтому ровно один мультипликатор на единичной окружности может быть лишь в том случае, когда он ра-

вен 1 или  $-1$ . Если же 1 и  $-1$  не являются мультипликаторами, то на окружности одновременно лежат по меньшей мере два комплексно-сопряженных мультипликатора.

Легко сообразить, что каждый из трех случаев (мультипликатор 1,  $-1$ , одна комплексная пара) соответствует гиперповерхности в функциональном пространстве, т. е. задается одним условием на систему. Для систем на границе области устойчивости все остальные мультипликаторы лежат строго внутри единичной окружности. В соответствии с разделом 1 каждый из трех случаев встречается неустрашимым образом в однопараметрических семействах общего положения, и мы должны изучить бифуркации при прохождении параметром критического значения.

В случае, когда один мультипликатор равен 1, соответствующая бифуркация есть слияние устойчивого цикла с неустойчивым, после критического значения оба цикла исчезают; потеря устойчивости при этом жесткая.

Когда один мультипликатор равен  $-1$ , теряющий устойчивость цикл не исчезает. При критическом значении параметра к теряющему устойчивость циклу приближается обходящий его двукратно устойчивый цикл. Этот двукратный цикл либо рождается при прохождении критического значения (в этом случае потеря устойчивости мягкая), либо умирает (в этом случае радиус притяжения устойчивого цикла становится малым еще до жесткой потери устойчивости).

Все эти результаты легко следуют из изложенной выше теории Пуанкаре. Действительно, функция последования с сохранением первых резонансных членов имеет вид

$$x \rightarrow (1 + \varepsilon)x + Cx^2 + \dots \quad (\lambda = +1),$$

$$x \rightarrow (-1 + \varepsilon)x + Cx^3 \quad (\lambda = -1).$$

Здесь  $x$  означает координату в собственном направлении, соответствующем собственному числу  $\lambda$  с модулем, равным 1. Мы обозначили через  $\varepsilon$  параметр деформации; коэффициент  $C$ , вообще говоря, зависит от  $\varepsilon$ . Знак  $C(0)$  регулирует рождение и смерть циклов. В направлении остальных собственных чисел происходит сжатие, так что на бифуркации они не влияют (см. общую теорему Шошитайшвили [1]).

Обратимся теперь к третьему случаю потери устойчивости, когда пара мультипликаторов выходит на единичную окружность.

Соответствующая гиперповерхность в функциональном пространстве пересекает предыдущие гиперповерхности (соответствующие случаям  $\lambda = 1$  и  $\lambda = -1$ ) по поверхностям коразмерности 2. Общие точки на этих поверхностях соответствуют системам с двукратным собственным числом  $\lambda = 1$  ( $\lambda = -1$ ) и с жордановой клеткой порядка 2. Эти два случая реализуются как неустрашимые при наличии двух параметров и должны рассматриваться отдельно.

В остальных случаях выхода пары собственных чисел линеаризации функции последования на единичную окружность применим метод Пуанкаре. Предположим для простоты, что собственных чисел всего два, т. е. что исходное фазовое пространство, где лежит изучаемый цикл, трехмерное.

Выводы, к которым приводят вычисления по этому методу, состоят в следующем.

1. Функция последования приводится к нормальной форме, являющейся преобразованием за единичное время в фазовом потоке векторного поля на плоскости (по меньшей мере на уровне разложений Тейлора конечного порядка).

2. Получаемое векторное поле на плоскости инвариантно относительно группы всех вращений плоскости в нерезонансном случае и относительно конечной группы вращений на углы, кратные  $2\pi/q$ , в случае резонанса порядка  $q$ .

3. Первые два вывода остаются в силе в случае, когда система зависит от параметра. Приводящая к нормальной форме конечный отрезок ряда Тейлора замена гладко зависит от параметра как в отсутствие резонансов, так и вблизи них, если сохранять резонансные члены как при точном резонансе, так и при близких значениях параметра. Тогда симметричность нормальной формы относительно вращений на углы, кратные  $2\pi/q$ , имеет место не только при точном резонансе, но и при близких значениях параметра.

4. Уравнение нормальной формы вблизи резонанса порядка  $q > 2$  имеет вид

$$\dot{z} = \varepsilon z + A(|z|^2)z + B\bar{z}^{q-1},$$

если пренебречь членами степени  $q + 1$  и выше по  $|z|$ .

Те же выводы получаются при применении метода усреднения; при этом нормальная форма истолковывается как усредненная система, описывающая медленную эволюцию фазовых кривых, близких к замкнутой.

При использовании всех этих результатов следует иметь в виду, что точная функция последования не является, вообще говоря, преобразованием фазового потока какого-либо векторного поля на плоскости и не переходит в себя при действии любой конечной группы симметрий. Выполнение этих свойств для нормальной формы является одним из указаний на то, что ряды, приводящие к нормальной форме, в общем случае расходятся.

Тем не менее многие выводы, которые можно сделать по качественной картине на фазовой плоскости нормальной формы, позволяют делать заключения о поведении фазовых кривых исходной системы. Например, положениям равновесия редуцированной системы (укороченной нормальной формы или усредненной системы) отвечают замкнутые фазовые кривые исходной системы, циклам редуцированной системы отвечают инвариантные торы в исходной и т. д. В то же время более тонкие эффекты (вроде рас-

цепления сепаратрис и появления гомоклинических и гетероклинических движений) не проявляются в редуцированной системе.

В случае, когда размерность исходного фазового пространства больше трех, при изучении потери устойчивости с выходом двух собственных чисел на единичную окружность можно ограничиться изучением трехмерного подмногообразия в фазовом пространстве, на котором происходят описанные выше явления. По остальным своим собственным направлениям функция последования является сжимающим преобразованием.

Обоснование возможности отбросить эти собственные направления как несущественные достигается ссылкой на уже упоминавшуюся общую теорему Шоштайшвили.

## 6. ИССЛЕДОВАНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Из сказанного выше видно, каким образом и в каком смысле исследование потери устойчивости вблизи резонансов приводится к изучению бифуркаций фазовых портретов в двухпараметрических системах векторных полей на плоскости, инвариантных относительно поворотов на угол  $2\pi/q$ , где  $q$  — порядок резонанса. При этом исследование надлежит производить в малой окрестности начала координат, не зависящей от параметров.

Размер области, в которой изучается система, является основным отличием теории бифуркаций от локальной качественной теории. Действительно, как для индивидуальной системы, так и при наличии параметров в окрестности положения равновесия систему можно исследовать методами локальной качественной теории. Мы узнаем при этом, например, при каком значении параметра равновесие теряет устойчивость, и получим фазовый портрет в некоторой окрестности положения равновесия при каждом значении параметра как бифуркационном, так и небифуркационном.

При этом размер указанной окрестности стремится к нулю при стремлении параметра к бифуркационному значению, хотя и отличен от нуля в самый момент бифуркации.

При таком подходе остается вне поля нашего зрения самое важное явление: ответвление нового равновесия или цикла в момент бифуркации. Действительно, в самый критический момент ответвляющегося объекта еще нет, а в следующий момент он уже вне пределов области применимости локальной теории.

Таким образом, для исследования бифуркаций необходимо обследовать фазовую окрестность, не стягивающуюся к нулю при стремлении параметра к критическому значению. Иными словами, мы должны рассматривать не зависящую от параметра окрестность в фазовом пространстве, а окрестность в прямом произведении фазового пространства и пространства параметров.

Фазовые картины на прилагаемых рис. 1—5 наблюдаются вблизи резонансов именно в таких, не зависящих от параметров окрестностях начала координат. Удобным средством формулиров-

ки ответов является язык так называемых версальных деформаций.

*Деформацией* векторного поля называется семейство полей, зависящих от параметров, обращающееся в данное поле при нулевом значении параметров. Две деформации называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфная (непрерывная и взаимно-однозначная) замена параметров и непрерывно зависящее от параметров семейство гомеоморфизмов фазового пространства, переводящие параметры и семейство фазовых портретов первой деформации в параметры и соответствующие фазовые портреты второй.

Если фиксирована деформация с некоторым пространством параметров, то всякое отображение другого пространства параметров в него индуцирует новую деформацию.

Деформация векторного поля называется *топологически версальной*, если всякая другая деформация того же поля эквивалентна индуцированной из данной. Таким образом, версальная деформация — это в некотором смысле самая большая деформация, содержащая в себе все остальные.

Версальная деформация с конечным числом параметров существует не для всякого поля, но если она существует, найдена и исследована, то она доставляет весьма полную информацию о всех явлениях и перестройках, возникающих при любых деформациях данного поля.

Версальные деформации определяются аналогичным образом для других объектов, например для векторных полей с определенными условиями симметрии (имеется в виду, что как деформация, так и фазовые гомеоморфизмы в определении эквивалентности симметричны).

Как объяснено выше, задача о потере устойчивости вблизи резонанса порядка  $q$  требует изучения деформаций векторных полей на плоскости, инвариантных относительно вращений на угол  $2\pi/q$ .

**Т е о р е м а.** *Векторные поля на плоскости, инвариантные относительно поворота на угол  $2\pi/q$ ,  $q \neq 2, 4$ , имеющие положение равновесия нуль с нулевой линейной частью и нелинейные члены общего вида, допускают двупараметрическую версальную деформацию в классе симметричных полей; соответствующая система дифференциальных уравнений записывается в виде*

$$\dot{z} = \varepsilon z + Az |z|^2 + \bar{z}^{q-1}$$

( $\varepsilon$  — комплексный параметр).

В случае  $q = 4$  теорема, видимо, тоже верна, но не доказана. Случаи сильных резонансов порядка  $q = 1$  и  $2$  исследуются отдельно и приводят к формулам, указанным выше (в разделе 2).

Доказательства сформулированных результатов не просты: трудности связаны с исследованием предельных циклов. В простейшем случае  $q = 1$  эти трудности были преодолены Богдановым

в 1970—1971 гг. [2]. В 1974 г. появился препринт Такенса, в котором анонсируются гипотезы о виде перестроек.

Результаты исследования резонанса порядка 3 опубликовал также Гаврилов [3]. Из этих работ неясно, однако, как преодолеваются трудности, связанные с исследованием циклов редуцированной системы. Полные доказательства для всех случаев при  $q \neq 4$  и для части случаев при  $q = 4$  дал Хорозов (1976—1977 гг.). Доказательства основаны на нетривиальных соображениях алгебраической геометрии и теории римановых поверхностей, развитых Ильяшенко [4].

Более подробное изложение вопроса о версальных деформациях имеется в цитированной выше обзорной статье автора [2], в [5] и в готовящейся к печати книге «Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений».

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Шошитайшвили А. Н.* — Труды семин. им. И. Г. Петровского, т. 1. М., Изд-во МГУ, 1974.
2. *Арнольд В. И.* — УМН, 1972, 27, № 5, с. 119.
3. *Гаврилов Н. К.* — В кн.: Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, ЯГУ, 1977.
4. *Ильяшенко Ю. С.* — Функц. анализ и его прил., 1977, 11, № 2, с. 28.
5. *Арнольд В. И.* — Функц. анализ и его прил., 1977, 11, № 2, с. 1.

## ПЕРЕЗАМЫКАНИЕ СИЛОВЫХ ЛИНИЙ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Б. Б. КАДОМЦЕВ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

При движении жидкости или газа с очень высокой электропроводностью имеет место замечательное свойство «приклеенности» магнитных силовых линий: при движении жидкости они следуют за ней, будучи как бы «вморожены» в эту жидкость. Свойство вмороженности не только облегчает качественный анализ тех сил, которые возникают со стороны магнитного поля при движении жидкости, но и, казалось бы, гарантирует сохранение топологии силовых линий при довольно сложных перемещениях проводящей жидкости. Однако последнее утверждение не совсем верно. В самом деле, допустим, что в процессе движения жидкости друг к другу вплотную подошли (рис. 1, а) и соприкоснулись (рис. 1, б) две силовые линии различного направления. После того как линии

вновь разойдутся друг от друга, они могут вернуться к прежней топологии, а могут и «перезамкнуться», как показано на рис. 1, в. При наличии конечной, хотя и очень большой, электропроводности такое перезамыкание может произойти даже без касания линий, а всего лишь при их тесном сближении. Таким образом, при перезамыкании конечная проводимость «срабатывает» только в малой области сближения силовых линий, но при этом происходит существенное изменение топологии силовых линий, которое может сказаться в дальнейшем на движении всей жидкости.

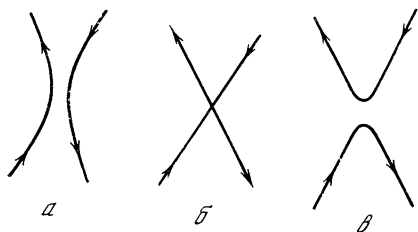


Рис. 1. Сближение (а), касание (б) и перезамыкание (в) магнитных силовых линий

Перезамыкание линий представляет собой очень интересное нелинейное явление магнитной гидродинамики, оно играет существенную роль во многих плазменных процессах [1—6]. Перезамыкание силовых линий ответственно за солнечные вспышки, некоторые типы геомагнитной активности и, как было обнаружено сравнительно недавно, проявляется в высокотемпературной плазме тороидальных установок типа Зеты или токамака [7—11], нацеленных на осуществление управляемой термоядерной реакции. Во всяком случае интересное явление перезамыкания силовых линий достойно того, чтобы с ним познакомился более широкий круг физиков, интересующихся нелинейными явлениями в сплошных средах.

Здесь мы сможем осветить только малую часть из того, что известно к настоящему времени, и поэтому мы в большей мере будем обращаться к явлениям, которые наблюдаются в более простых лабораторных условиях, и лишь кратко упомянем о геофизических и астрофизических аспектах.

## 2. УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Хотя в дальнейшем большая часть наших рассуждений будет носить качественный характер, полезно напомнить те уравнения, на основе которых они строятся. Движение проводящей жидкости с магнитным полем описывается следующей системой уравнений магнитной гидродинамики:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j}B]; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v}B] + \nu_m \Delta \mathbf{B}; \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости (или газа);  $\mathbf{v}$  — ее скорость;  $p$  — давление;  $\mathbf{j} = (c/4\pi)\operatorname{rot} \mathbf{B}$  — плотность электрического тока;  $\mathbf{B}$  — напряженность магнитного поля;  $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$  — магнитная вязкость, которую мы будем считать исчезающе малой.

В большинстве дальнейших рассуждений нас будет интересоваться главным образом поведение магнитного поля, а не жидкости (газа). Поэтому мы сразу предположим для простоты, что  $\rho = \text{const}$ , т. е. движение жидкости близко к несжимаемому, но, с другой стороны, положим  $p = 0$ , т. е. будем считать, что давление проводящего газа значительно меньше давления магнитного поля. Кроме того, несколько преобразуя (1), запишем его в виде

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla_{\perp} \frac{B^2}{8\pi} + \frac{B^2}{4\pi} (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h},$$

где  $(\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} = \kappa \mathbf{n}$ ;  $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$  — единичный касательный вектор к силовой линии;  $\mathbf{n}$  — вектор нормали;  $\kappa$  — кривизна силовой линии  $\nabla_{\perp} = \nabla - \mathbf{h}(\mathbf{h}\nabla)$ . Отсюда вытекает очень простая интерпретация силы Ампера, действующей на среду со стороны магнитного поля: магнитное поле оказывает давление в направлении поперек магнитного поля, а, кроме того, силовые линии натянуты в продольном направлении и при искривлении толкают проводящую среду в сторону их вогнутости.

Уравнение (2) при  $\nu_m \rightarrow 0$  эквивалентно «приклеенности» силовых линий к среде. Отсюда возникает простая картина течения проводящих сред: они движутся под действием натянутых в продольном направлении и «распираемых» в поперечном направлении силовых линий, причем линии перемещаются вместе со средой.

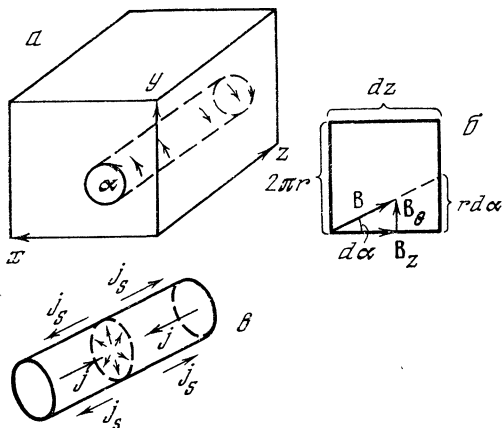
### 3. ПРОСТОЙ ПРИМЕР

Рассмотрим простой пример движения жидкости, который будет полезен для дальнейших рассуждений. Пусть идеально проводящая несжимаемая жидкость находится в однородном магнитном поле  $B_z$ , направленном по оси  $z$  (рис. 2, а). Мысленно вырежем в этой жидкости цилиндр радиуса  $a$  с осью вдоль магнитного поля. Пусть этот цилиндр выведен из положения равновесия путем торсионного вращения с углом  $\alpha = \alpha(z)$ . При кручении цилиндра силовые линии искривляются таким образом, что возникает сила, стремящаяся восстановить равновесие.

Чтобы найти эту силу, развернем цилиндр радиуса  $r$ , как показано на рис. 2, б. Если  $\alpha$  изменяется с  $z$ , то поле  $\mathbf{B}$  отклоняется от образующей цилиндра, так что силовые линии становятся винтовыми и появляется азимутальная составляющая поля

$$B_{\theta} = B_z r d\alpha/dz. \quad (5)$$





**Рис. 2.** Крутильные колебания плазменного цилиндра (а), развёртка магнитной цилиндрической поверхности (б) и распределение токов (в)

Появление компоненты  $B_\theta$  означает наличие продольного тока. Плотность этого тока легко найти, зная  $B_z$ :

$$j_z = \frac{c}{4\pi} (\text{rot } \mathbf{B})_z = \frac{c}{2\pi} B_z \frac{\partial \alpha}{\partial z}.$$

Как мы видим, ток распределен однородно по сечению цилиндра радиуса  $a$ , причем полный ток  $I = \pi a^2 j_z = \frac{ca^2}{\pi} B_z \frac{\partial \alpha}{\partial z}$ . Снаружи от цилиндра силовые линии остаются прямыми, т. е. полный ток цилиндра радиуса  $a + 0$  должен равняться нулю. Это означает, что по поверхности цилиндра должен течь ток обратного направления той же самой величины  $I$ .

Если  $I$  меняется с  $z$ , то должен меняться и поверхностный ток, а это означает, что должна появиться радиальная компонента тока  $j_r$ , которая замыкала бы токи (рис. 2, в). Эту компоненту, зная  $j_z$ , легко найти из условия  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ . Она равна

$$j_r = r \frac{c B_z}{4\pi} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}.$$

Теперь уравнение движения (1), точнее его азимутальную компоненту

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \rho r \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = -\frac{1}{c} j_r B_z$$

можно записать в более простом виде

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + c_a^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = 0, \quad (6)$$

где  $c_a = \sqrt{B_z^2/4\pi\rho}$  — хорошо известная альвеновская скорость.

Как мы видим, любые начальные возмущения торсионного типа распространяются вдоль магнитного поля с альвеновской скоростью. Разумеется, состояние с  $\partial \alpha / \partial z = \text{const}$  может находиться

в равновесии. Это верно даже в том случае, если  $\alpha = z\alpha_1(r)$ , т. е. разные цилиндрические слои «повернуты» на разные углы: при этом  $j_r(r)$  не зависит от  $z$ , других компонент тока нет, и поэтому сила Ампера обращается в нуль. Еще более частный случай  $\partial\alpha/\partial z = 0$  соответствует так называемым желобковым движениям, при этом цилиндр вращается как целое.

Рассмотренный пример помогает прояснить одно явление топологического характера. Допустим, что, кроме силовых линий, мы введем в рассмотрение так называемые магнитные поверхности, т. е. поверхности, составленные из силовых линий. Например, их можно выбрать цилиндрическими ( $r = \text{const}$ ). Тогда при торсионных колебаниях каждая из них будет скользить сама по себе, причем при переходе через точку  $r = a$  имеет место разрыв в величине смещения (поверхности вне точки  $r = a$  покоятся). Если выбрать другое семейство поверхностей (при  $B = \text{const}$  это допустимо в силу вырождения), например,  $x = \text{const}$ , то на границе  $r = a$  они будут разрываться, но разрыв идет по силовым линиям. Таким образом, разрыв поверхностей вдоль силовых линий с последующим смещением соседних слоев по разрезу в магнитной гидродинамике является допустимым.

#### 4. ТОРОИДАЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ

В реальных условиях удержания высокотемпературной плазмы в магнитных ловушках геометрия магнитного поля, разумеется, гораздо сложнее, чем в рассмотренном выше простом примере однородного поля. Примером такой магнитной ловушки может служить система токамак. В токамаке плазма с высокой электропроводностью заполняет тороидальную камеру с большим и малым радиусами  $R$  и  $a$  соответственно (рис. 3, а). Вдоль тора направлено сильное продольное поле  $B_z$ , и, кроме того, по плазме протекает продольный ток, создающий азимутальное или, точнее, полоидальное магнитное поле  $B_\theta$ . Для упрощения рассмотрения картины поведения силовых линий магнитного поля мы иногда будем пользоваться упрощенной схемой рис. 3, б, когда вместо тора рассматривается прямой цилиндр с отождествленными торцами. С точки зрения топологии эти два тела, разумеется, совпадают. В прямом цилиндре  $B_z$  и  $B_\theta$  являются истинно продольным и азимутальным полями. Силовые линии в таком цилиндре являются винтовыми, так что их угол поворота  $\alpha$  может быть найден из условия (5), т. е.

$$\alpha = B_\theta z / r B_z.$$

На полной длине тора  $z = 2\pi R$  угол  $\alpha \equiv \alpha_t = 2\pi R B_\theta / r B_z$ . Этот угол называется углом вращательного преобразования, он показывает, насколько смещаются «следы» силовых линий по азимуту при последовательном «протыкании» данного сечения  $z = 0$ . Если  $\alpha_t = 2\pi n/m$ , где  $n, m$  — целые числа, а  $n/m$  — несократимая

дробь, то после  $m$  оборотов вдоль тора силовая линия повернется в плоскости  $z = 0$  на угол  $2\pi l$ , т. е. она замкнется сама на себя. Если же  $\alpha_l$  является числом иррациональным, то силовая линия заполняет всю тороидальную поверхность.

Величина

$$q = 2\pi/\alpha_l = B_z r / B_\theta R$$

называется коэффициентом запаса по винтовой неустойчивости, ее значение определяет устойчивость плазмы по отношению к малым возмущениям винтового типа.

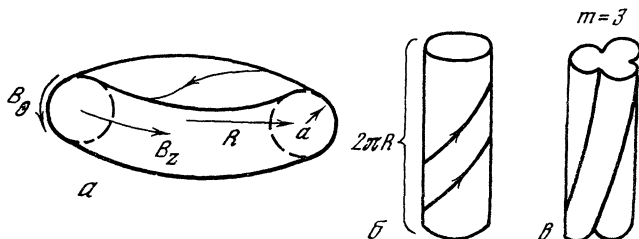


Рис. 3. Плазменный тор с полем (а), его моделирование цилиндром (б) и винтовое возмущение плазменного цилиндра (в)

Поясним, почему это так. Рассмотрим, например, малое возмущение магнитного поля, которое в линейном приближении можно считать гармонической функцией  $\theta$  и  $z$ . Чтобы возмущение было однозначной функцией  $\theta$ ,  $z$ , оно должно иметь вид  $\xi \sim \sim \exp(im\theta - inz/R)$ , где  $n$ ,  $m$  — целые числа,  $\xi$  — смещение плазмы. Индекс  $m$  можно рассматривать как порядок симметрии в плоскости  $z = \text{const}$ . Например, для  $m = 3$  возмущение выглядит, как показано на рис. 3, в.

Интересно посмотреть, как меняется возмущение вдоль силовой линии. Для этого найдем

$$B\nabla\xi = i\xi \left( \frac{m}{r} B_\theta - \frac{n}{R} B_z \right) = i\xi \frac{B_\theta}{r} (m - nq),$$

где величина  $q$  была определена выше. Отсюда видно, что при  $q = = m/n$  возмущение оказывается постоянным вдоль силовой линии. Такое возмущение (оно называется желобковым) не искривляет силовых линий, т. е. оно не требует энергии для своего возбуждения.

Как мы видим, при больших  $q \gg 1$  возмущения желобкового типа возможны только при  $m \sim q \gg 1$ , т. е. для симметрии высокого порядка. Более того, если  $q = q(r)$ , т. е.  $q$  изменяется с радиусом, то область по  $r$ , в которой возмущение можно считать почти желобковым, сужается. Такие возмущения менее опасны в отношении неустойчивости плазмы. Вот почему величину  $q$  на-

зывают коэффициентом запаса по устойчивости в отношении винтовых возмущений.

Для дальнейших рассуждений нам полезно будет ввести в рассмотрение продольный  $\Phi$  и полоидальный  $\chi$  магнитные потоки. На развернутой в цилиндр модели они определяются так:

$$\Phi = \int_0^r 2\pi r B_z dr, \quad \chi = \int_0^r B_\theta dr,$$

причем  $\chi$  мы отнесли к единице длины шнура. Отсюда видно, что

$$q = \frac{1}{2\pi R} \frac{d\Phi}{d\chi}. \quad (7)$$

Потоки  $\Phi$ ,  $\chi$ , естественно, могут быть введены и для тороидальной геометрии, причем соотношение (7) остается справедливым в общем случае.

## 5. ТОКОВЫЕ СЛОИ

Оказывается, что при движении идеально проводящей жидкости с магнитным полем довольно легко могут образовываться токовые слои [3, 13]. Токковый слой разделяет две области с противоположно направленными полями, как показано на рис. 4, а, а при наличии компоненты поля вдоль слоя (т. е. за чертеж рис. 4, а) — области с противоположно направленными поперечными

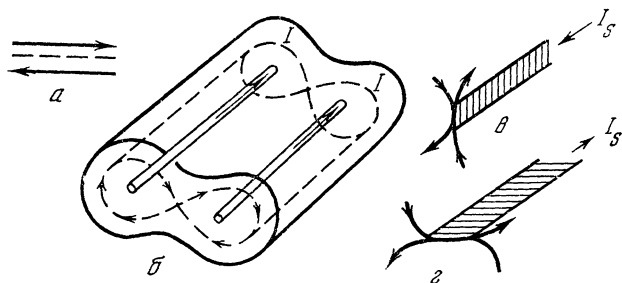


Рис. 4. Токковый слой (а), поле двух проводников с током (б) и образование токового слоя при сближении (с) или удалении (д) проводников

компонентами поля. Например, такой слой образовался при рассмотренном нами ранее кручении столба плазмы (см. рис. 2). Другой более интересный пример представлен на рис. 4, б.

Допустим, что имеется магнитное поле двух параллельных стержней с токами, направленными в одну сторону. При этом вблизи оси между стержнями образуется область квадрупольного магнитного поля, так что поле нарастает линейно с удалением  $x$  от оси симметрии:  $B = B_0 x/a$ . Пусть вся область заполнена иде-

ально проводящим газом малого давления. Сдвинем теперь эти стержни друг к другу на малое расстояние  $\delta$ . При этом магнитные поверхности вблизи стержней сдвинутся вместе со стержнями, а магнитный поток между осью, где первоначально поле было равно нулю, и каждым из стержней должен сохраниться. Это значит, что поле около оси должно подрасти до значения, несколько большего, чем первоначальное поле на расстоянии  $\delta$  от оси, т. е. должно быть  $B > B_0 \delta / a$ . По разные стороны от оси симметрии поля

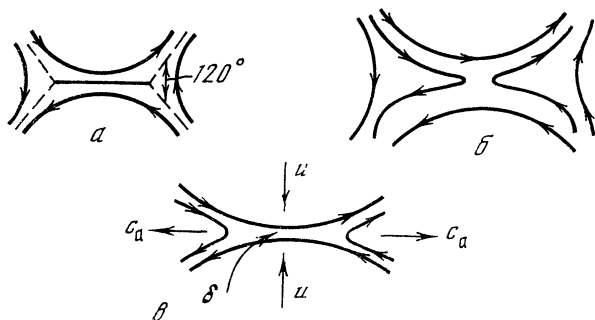


Рис. 5. Геометрия поля вблизи токового слоя (а), начало перезамыкания (б) и течение плазмы при перезамыкании (в)

направлены противоположно друг другу, так что в центральной области должен появиться токовый слой (рис. 4, в). Если стержни раздвинуть друг от друга, то появится токовый слой с противоположно направленным поверхностным током.

На рис. 5, а изображена картина поля вблизи токового слоя. В центральной части слой разделяет две области с противоположно направленными магнитными полями. По краям токового слоя, в точках ветвления, картина поля имеет симметричный вид: сепаратриса, разделяющая области с разной топологией силовых линий, имеет вид трех плоскостей, сходящихся под углом  $120^\circ$ . Такая картина совершенно естественно вытекает из условия равновесия, если учесть, что для нее важна лишь величина квадрата поля  $B^2$ , а не его направление. При приближении к точке ветвления поле убывает как  $\sqrt{s}$ , где  $s$  — расстояние от точки ветвления. Если электропроводность не бесконечно велика, то в слое начинается процесс перезамыкания линий. Самая простая картина развития этого перезамыкания была рассмотрена Паркером и Свитом [14, 15].

Пусть слой перезамыкания имеет толщину  $\delta$ . Перезамкнувшиеся силовые линии в этом слое, подобно «рогатке», выбрасывают плазму со скоростью масштаба  $c_a$  (рис. 5, в). Через время  $t \approx \delta/c_a$  слой обновляется, и скорость вещества к слою перезамыкания может быть оценена как  $u \approx \delta/t$ . С другой стороны, толщина слоя определяется скоростью проникновения магнитного поля в плаз-

му за счет конечной проводимости, т. е.  $\delta^2 = c^2 t / 4\pi\sigma$ . Отсюда находим

$$u \approx c_a / \sqrt{\text{Re}_m}, \quad \text{Re}_m = 4\pi\sigma c_a \delta / c^2. \quad (8)$$

Эта картина вполне естественна, но она не всегда дает правильную оценку для  $u$ , согласующуюся с данными наблюдений или измерений. Так, слои с противоположно направленными соприкасающимися полями легко возникают в солнечной плазме при сближении пятен с противоположной магнитной полярностью или в хвосте магнитосферы, образуемом за счет вытягивания силовых линий магнитного поля Земли солнечным ветром. И в солнечной, и в околоземной плазме наблюдаются явления перезамыкания силовых линий. Однако скорость такого перезамыкания, как правило, значительно превышает оценку (8). Паркером [2] была установлена эмпирическая оценка  $u \approx 0,1 c_a$ , что при очень больших значениях магнитного числа Рейнольдса  $\text{Re}_m$  существенно превосходит (8).

Для объяснения более быстрого перезамыкания Печекон [16] была предложена более сложная модель со стационарными альвеновскими волнами. Другое объяснение состоит в аномальном уменьшении проводимости  $\sigma$  за счет микротурбулентности в слое [6]. Для полей с точно противоположным направлением более предпочтительной представляется картина Пикельнера [17], который предположил, что в месте соприкосновения полей они могут полностью уничтожаться, а свободная от магнитного поля плазма выдавливается поперек магнитного поля навстречу набегающему потоку плазмы.

## 6. ПЕРЕЗАМЫКАНИЕ В ТОРОИДАЛЬНОЙ ЛОВУШКЕ

Оказывается, что образование токовых слоев с последующим перезамыканием силовых линий может происходить и в тороидальных магнитных ловушках, заполненных высокотемпературной плазмой. При этом, как правило, образуются слои, в которых компонента поля вдоль слоя очень велика по сравнению с поперечной. Это до некоторой степени упрощает геометрическую картину перезамыкания.

Экспериментально процесс перезамыкания был обнаружен в ловушках типа токамак как явление, получившее название внутреннего срыва. Мы не будем здесь подробно останавливаться на экспериментальных данных, а сразу же опишем явление с точки зрения магнитной гидродинамики.

В установках типа токамак продольное поле  $B_z$  значительно превышает поперечное  $B_\theta$ , так что величина  $q = B_z r / B_\theta R$  может быть порядка единицы внутри шнура, но заведомо превышает значение 2—3 на краю шнура. Давление плазмы обычно во много раз меньше давления магнитного поля, так что приближенно плазму можно считать бессиловой (т. е. с нулевым давлением).

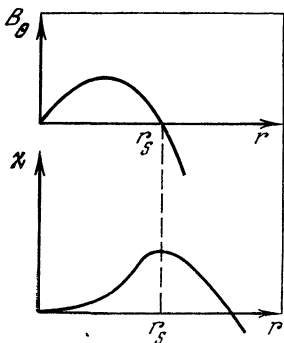


Рис. 6. Распределение азимутального поля  $B_\theta$  и магнитного потока  $\chi$  в состоянии с  $B_\theta(r_s) = 0$

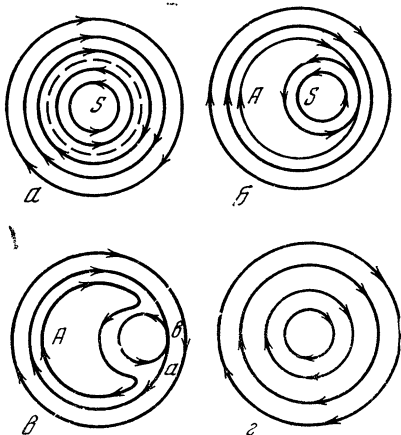


Рис. 7. Перезамыкание в плазменном цилиндре с током

*a* — начальное состояние; *б* — образование токового слоя; *в* — образование магнитного острова в области *A*. Полное перезамыкание (*г*) приводит к состоянию, в котором поле всюду имеет один и тот же знак

Условие  $B_z^2 \gg B_\theta^2$  означает, что в каждом поперечном сечении  $z = \text{const}$  движение плазмы можно считать несжимаемым, а, кроме того, для возмущений, сильно вытянутых вдоль магнитного поля, можно считать  $v_z \approx 0$ , так что  $\text{div } v = 0$ . В этих условиях рассмотрение упрощается, тем не менее мы еще больше упростим его, начав с некоторого вспомогательного примера.

Допустим, что в тороидальной ловушке типа токамак создано несколько необычное распределение плотности тока, так что азимутальное поле меняет знак внутри плазмы при некотором значении  $r = r_s$  (рис. 6). При этом в сечении шнура картина силовых линий (точнее, проекция этой картины на плоскость  $z = 0$ ) будет иметь вид рис. 7, *a*. Как мы видим, силовые линии в проекции на плоскость  $z = 0$  закручиваются по часовой стрелке в периферийных слоях и против часовой стрелки во внутренней области. Таким образом, по отношению к поперечному полю мы встречаемся с ситуацией токового слоя при  $r = r_s$ , правда, пока еще с не очень высокой плотностью тока.

Допустим теперь, что в плазме возникает некоторое двумерное течение, однородное вдоль оси  $z$ . Если это течение несжимаемо, то по отношению к продольному магнитному полю оно носит характер желобкового: оно никак не влияет на это поле и, наоборот, продольное поле не оказывает действия на плазму. Таким образом, вся картина будет развиваться так, как в несжимаемой жидкости под действием одного лишь поперечного поля.

Пусть центральная часть шнура *S* испытала небольшой началь-

ный толчок вправо. При этом самая внутренняя часть, стянутая, как обручами, силовыми линиями, начнет как целое смещаться вправо, выдавливая жидкость из области вблизи  $r = r_s$ , где поперечное магнитное поле очень мало. Внутренний шнур может остановиться только тогда, когда в области  $r = r_s$  появится отличное от нуля поле, в силовые линии которого может «упереться» внутренний цилиндр. Но при этом непременно должен образоваться токовый слой с противоположно направленными поперечными полями по обе стороны от слоя (рис. 7, б).

Допустим теперь, что за счет конечной проводимости силовые линии внутри этого слоя частично перезамкнутся (рис. 7, в). Тогда образуется «остров» магнитного поля в области  $A$ . Силовые линии этого острова, стягиваясь, будут «выжимать» цилиндр  $S$  вправо в направлении противоположно направленного поля. За счет этого токовый слой усилится, и процесс перезамыкания начнет самоускоряться, не останавливаясь до тех пор, пока все встречные поля не будут перезамкнуты в токовом слое и плазма не придет к конечному состоянию (рис. 7, г). В этом состоянии поле  $B_\theta$  всюду одного знака.

Как мы видим, начальное состояние (рис. 7, а) оказывается неустойчивым по отношению к процессу перезамыкания, которое может быть характеризовано индексами симметрии  $m = 1$ ,  $n = 0$  (т. е. однородное вдоль  $z$  и первого порядка симметрии по  $\theta$  смещение шнура).

Если ввести опять азимутальный поток на единицу длины шнура  $\chi$ , который равен в исходном состоянии  $\chi = \int_0^r B_\theta dr$ , то нетрудно заметить, что при перезамыкании встречаются и объединяются вместе силовые линии с одним и тем же значением  $\chi$ . Другого просто и не может быть: ведь если мы приводим в соприкосновение на токовом слое две силовые линии, то предварительно должны быть перерезаны и перезамкнуты все промежуточные силовые линии, а это возможно лишь в том случае, если полный поток между соприкасающимися линиями равен нулю, т. е. значения  $\chi$  для двух линий совпадают. В силу несжимаемости поперечного течения это приводит к сохранению интеграла  $\int \chi r dr$  (где  $r dr$  — элемент сечения). А если бы мы допустили еще изменение продольного поля при сжимаемых движениях, то сохранялся бы интеграл

$$K = \int \chi d\Phi = \text{const.} \quad (9)$$

Перейдем теперь к более реальному распределению тока, когда поле  $B_\theta$  всюду имеет один знак. Оказывается, что при этом может развиваться практически та же картина перезамыкания, что и рассмотренная выше, но на винтовых возмущениях  $m = 1$ ,  $n = 1$  (рис. 8).



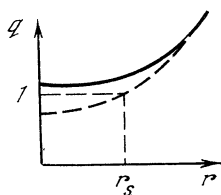
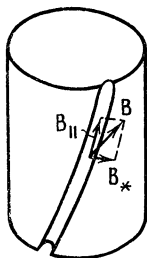


Рис. 8. Поперечная  $B_*$  и продольная  $B_{||}$  компоненты поля при винтовом возмущении и распределение  $q(r)$  до (пунктир) и после (сплошная линия) перезамыкания на моде  $m = 1$ ,  $n = 1$

ный продольный поток  $\Phi$  остается прежним (он задается катушками тороидального поля), то интеграл (9), равный

$$K = \int \chi d\Phi = \int \psi d\Phi + \frac{n}{2mR} \Phi^2 = \text{const},$$

также сохраняется.

Именно перезамыкание на винтовой моде  $m = 1$ ,  $n = 1$  и наблюдается на токамаках в виде внутреннего срыва (т. е. резкого перераспределения тока). Срыв проявляется прежде всего в виде так называемых пилообразных колебаний теплового излучения (в рентгеновской области) из центра шнура. Сначала идет фаза медленного разогрева центра шнура джоулевым теплом протекающего по плазме тока. При этом интенсивность излучения медленно нарастает, а значение  $q(0)$  падает за счет роста температуры и соответственно проводимости. При уменьшении  $q(0) < 1$  появляется область  $r < r_s$  (напомним, что  $r_s$  — это точка,  $q(r_s) = 1$ ), в которой может развиваться перезамыкание. Подробный анализ показывает, что в области  $r < r_s$  имеет место линейная винтовая неустойчивость, которая сталкивает шнур с оси (в виде винтового искривления), и затем развивается процесс перезамыкания. Этот процесс очень быстрый, он приводит к ступенчатому падению излучения из центра. Затем наступает период прогрева плазмы, на-

В самом деле, по отношению к таким возмущениям магнитное поле  $\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z + B_\theta \mathbf{e}_\theta$  можно представить в виде  $\mathbf{B}_{||} + \mathbf{B}_*$ , где  $\mathbf{B}_{||}$  — винтовая компонента поля, направленная вдоль возмущения, а  $\mathbf{B}_* = \mathbf{B}_\perp - (r/R) B_z \mathbf{e}_\theta$  ( $\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  — продольный и азимутальный единичные векторы). Обращение  $B_*$  в нуль, например, означает, что все силовые линии имеют один и тот же шаг (т. е.  $q=1$ ), и возмущения  $m = 1$ ,  $n = 1$  для них выглядят как желобковые. Если же  $q$  изменяется с  $r$ , как показано на рис. 8, то по отношению к винтовому движению мы имеем картину поперечного поля  $B_*$ , в точности совпадающую с рис. 7, а. Таким образом, если  $q(0) < 1$ , вся картина развития перезамыкания (рис. 7) повторяется, но на возмущениях с симметрией  $m = 1$ ,  $n = 1$ . Соответственно будет сохраняться интеграл вида (9), но для винтового

потока  $\psi = \chi - \frac{n}{mR} \Phi$ . Так как пол-

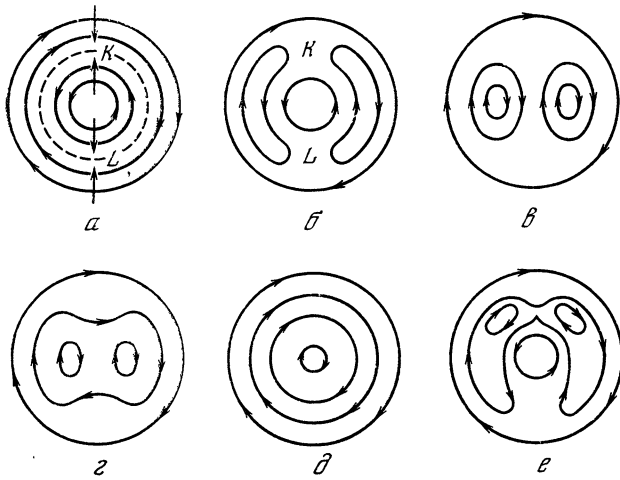


Рис. 9. Перезамыкание на моде  $m = 2$

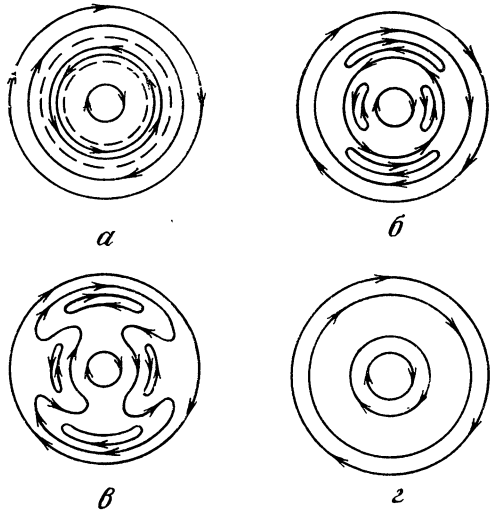


Рис. 10. Перезамыкание в случае двух точек  $q(r) = 2$

растания излучения, срыва и т. д., т. е. периодически повторяются пилообразные колебания излучения из центра шнура.

Топологически можно себе представить перезамыкания, которые идут на других модах. Например, на рис. 9 показано перезамыкание на моде  $m = 2, n = 2$ , идущее в две стадии:  $a \rightarrow c$  — образование двух островов,  $c \rightarrow d$  — слияние их в один. Это перезамыкание приводит в точности к тому же конечному состоянию, что и простое перезамыкание  $m = 1, n = 1$ . Однако энергетически оно менее выгодно, и это видно хотя бы из того, что два острова притягиваются друг к другу по азимуту и стремятся слиться в один, как показано на рис. 9, e.

В токамаке в большей части шнура  $q > 1$ , поэтому выполнить условие образования токового слоя,  $q = m/n$ , далеко от центра можно (даже при  $n = 1$ ) только на высших модах  $m > 1$ . Образование таких мод, вообще говоря, энергетически невыгодно, чем и объясняется довольно высокая устойчивость плазменного шнура в токамаках по отношению к МГД-возмущениям.

Важным исключением из этого правила является случай перезамыкания при наличии двух сингулярных поверхностей, когда  $q(r)$  является немонотонной функцией и может дважды принимать одно и то же значение  $q = m/n$ . Пример такого перезамыкания для случая  $m = 2$  приведен на рис. 10. Как мы видим, после перезамыкания значительная область шнура остается практически свободной от поля  $B_*$ . Как было указано Стиксом [11], процессы такого рода могут развиваться на границе шнура на начальной стадии его формирования, что приводит к аномально быстрому проникновению поля тока внутрь плазменного шнура.

## 7. ДИФFUЗНЫЕ ПИНЧИ

Противоположный случай  $q \ll 1$  осуществляется в так называемых диффузных пинчах — тороидальных плазменных конфигурациях, в которых  $B_\theta \sim B_z$ . Одной из первых установок, на которых было начато изучение таких пинчей, была английская установка Зета.

В диффузном пинче условие  $q = m/n$  внутри плазмы может выполняться при  $m = 1$  и многих значениях  $n$ . Таким образом,

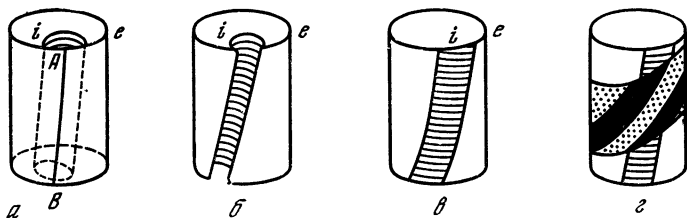


Рис. 11. «Переклейка» магнитных поверхностей при перезамыкании на модах  $m = 1$

в таком разряде можно представить себе целую серию перезамыканий на моде  $m = 1$  и различных  $n$ . Каждое такое перезамыкание осуществляет «разрез» и «переклейку» магнитных поверхностей. Если, например, первое перезамыкание приводит к склейке внутренней (заштрихованной на рис. 11, а) поверхности с внешней (рис. 11, б, в), то последующий процесс перезамыкания склеит две уже ставшие «полосатыми» поверхности, как показано на рис. 11, г. Можно задаться вопросом: к чему же должна привести такая либо даже более сложная серия перезамыкания? Ответ на

этот вопрос был дан Тейлором [10], и мы кратко повторим здесь его аргументацию.

Процесс перезамыкания будет развиваться, очевидно, только в том случае, если при этом понижается энергия магнитного поля, равная для цилиндрически-симметричного шнура (на единицу его длины):

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4} \int \left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right] r dr.$$

Так как при перезамыкании сохраняется величина  $K = \int \chi d\Phi$ , то конечное распределение полей можно найти из условия минимума  $\mathcal{E}$  при  $K = \text{const}$ . Эта задача на минимум приводит к уравнениям

$$\Delta \chi = \frac{c}{4\pi} j_z = \lambda B_z, \quad - \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) = \frac{c}{4\pi} j_z = \lambda B_\theta,$$

где  $\lambda = \text{const}$  — множитель Лагранжа. Другими словами,  $j = \text{const} \mathbf{B}$ . Для токамака, где  $B_\theta \ll B_z$ , это условие привело бы к однородному распределению тока, а в диффузном пинче оно приводит к бессиловому распределению  $B_z \sim J_0(\alpha r)$ ,  $B_\theta \sim J_1(\alpha r)$ , что хорошо согласуется с экспериментом.

Процесс перезамыкания, разумеется, не обязательно должен развиваться на модах  $m = 1$ , но в любом случае идет до конца. Такой процесс должен приводить к минимуму  $\mathcal{E}$  при  $K = \text{const}$ .

Таким образом, можно сказать, что сама конфигурация магнитного поля в диффузном пинче контролируется «дежурящим» процессом перезамыкания. В токамаках же перезамыкания развиваются не всегда, а лишь при приближении к опасному распределению тока  $j(r)$ , на котором может вспыхнуть процесс перезамыканий.

## 8. НЕСИММЕТРИЧНОЕ ПЕРЕЗАМЫКАНИЕ

Чтобы получить более полное представление о том, как может развиваться реальный процесс перезамыкания, следует, отправляясь от рассмотренной выше идеализированной картины симметричного перезамыкания, проанализировать, как идет этот процесс в несимметричном случае.

Рассмотрим опять вспомогательный пример поля двух стержней с током, но на этот раз предположим, что, кроме поля токов, имеется однородное продольное поле  $B_z$  (рис. 12, а). Пусть вся область заполнена идеально проводящей плазмой с нулевым давлением. Давайте снова раздвинем проводники, но на этот раз локально, только в области А (рис. 12, б). При этом снова образуется полоска с поверхностным током, которая должна плавно сходиться на нет с обоих торцов, но для большей ясности рисунков мы изобразим ее прямоугольником (рис. 12, в). В силу непрерывности тока к ближайшему к нам торцу должен стекаться радиальный ток, а с дальнего торца ток должен растекаться. В продольном по-

ле это приведет к тому, что ближайший к нам торец несколько повернется по часовой стрелке, а дальний — против часовой стрелки, как показано на рис. 12, в. Соответственно изменится геометрия поля около повернувшихся участков токовой полоски, как показано на рис. 12, г. Теперь в точках ветвления, как видно из рисунка, поперечная компонента поля не обращается в нуль, поэтому силовые линии, скользя вдоль вогнутых частей поверхности (точки на рис. 12, г), переходят с токового слоя на остальную часть сепаратрисной поверхности.

В равновесии ток должен течь вдоль силовых линий (поскольку  $p = 0$ ); значит, с торцов должен стекать ток  $I'_s$ , как показано на рис. 12, в. Этот ток также является поверхностным, он должен замкнуться по силовой линии, которая обходит вокруг проводника с током и соединяет между собой два торца полоски. Отсюда видно, что полоска с током не может быть короче, чем длина силовой линии, дважды касающейся этой полоски. При  $B_z \gg B_\theta$ , где  $B_\theta$  — характерное поперечное поле (т. е.  $B_\theta = 2I_0/ca$ ,  $I_0$  — ток в стержне,  $2a$  — расстояние между стержнями), эта длина  $L \approx 2\pi a \frac{B_z}{B_\theta} \ln \frac{a}{\delta}$  (логарифм отношения  $a$  к ширине полоски  $\delta$  появляется из-за того, что при приближении к полоске поперечное поле убывает как  $B_\perp \sim B_\theta x/a$ ,  $x$  — расстояние от оси симметрии).

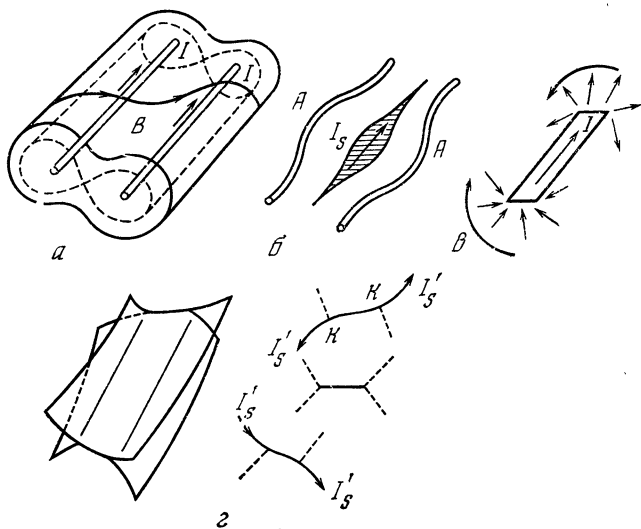


Рис. 12. Поле двух проводников с током (а) при наличии  $B_z$ , раздвижение проводников в области А (б), вращение токового слоя вблизи торцов (в), геометрия токового слоя (г)

В точках К поперечная компонента поля не равна нулю, и ток имеет возможность стекать с полоски вдоль силовых линий, как показано на рисунке (см.  $I'_s$ )

Таким образом, при неоднородном по длине смещении проводников появляется тенденция удлинения полоски и выравнивания ее ширины на большей длине  $L$ . При этом поверхностный ток течет не только вдоль токовой полоски, но и перетекает на всю сепаратрисную поверхность. (Наличие такой сложной системы токов в какой-то мере соответствует факту сохранения магнитных поверхностей в такой несимметричной геометрии, когда в отсутствие токов вакуумные силовые линии соответствовали бы стохастическому полю вблизи бывшей сепаратрисы.)

Аналогичная тенденция к выравниванию ширины токовой полоски должна иметь место и в тороидальной геометрии при перезамыкании на винтовых возмущениях. Ввиду этого предпочтительнее (это обстоятельство подчеркивалось Сыроватским) осуществление перезамыкания сразу по всей длине силовой линии и, следовательно, на рациональных поверхностях, где  $q = m/n$  и силовая линия замыкается сама на себя после небольшого числа оборотов. Такое выравнивание токового слоя по силовой линии может происходить с альвеновской скоростью, и при большой величине продольного поля оно должно быть достаточно эффективным. Но небольшая асимметрия перезамыкания при быстром развитии этого процесса все же может иметь место, и мы попробуем проанализировать, что она означает.

Предположим, что мы имеем дело с внутренней неустойчивостью срыва в токамаке, которая, как было объяснено выше, связана с винтовым искривлением внутренней части шнура (рис. 13, а). Допустим, что внутренняя магнитная поверхность подошла близко к наружной и начался процесс перезамыкания, но не однородно по всей длине, а путем «разреза» и «переклеивания» поверхностей, начиная с одной точки. На рис. 13, б этот процесс для одной из поверхностей приближается к концу, и для большей ясности мы нарисовали в виде жгута еще более внутреннюю поверхность. Топологически не доведенный до конца разрез эквивалентен ручке на торе (рис. 13, в). Если у нас соприкоснулись и начали перезамыкаться «правильные» поверхности, т. е. полный винтовой поток между ними равен нулю, то на рис. 13, б, в разрез можно довести до конца, и внутренний жгут освободится для перезамыка-

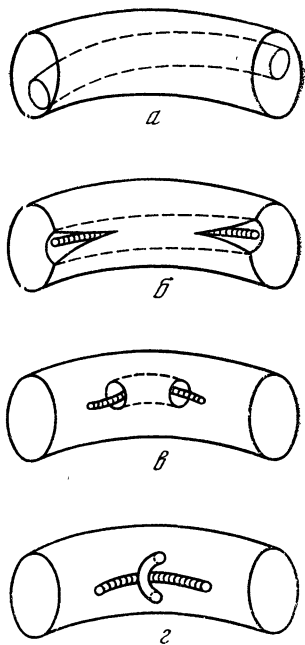


Рис. 13. Картина несимметричного перезамыкания в торе (а, б) с образованием «ручек» (в, г)

ния со следующей более наружной поверхностью. Однако, начиная разрез, мы не знали (точнее, «плазма не знала»), какие поверхности начали «переклеиваться», поэтому полный поток между тором и ручкой на рис. 13, *в* может оказаться отличным от нуля. Тогда от ручки освободиться нельзя. Жгут может лишь «вытащить» ее наружу, как показано на рис. 13, *г*.

Таким образом, несимметричный процесс перезамыкания может оставить после себя набор «ручек», соединяющих различные поверхности. Для плазмы это означает дополнительную возможность переноса тепла и частиц с одной поверхности на другую через ручки, их соединяющие. Но, как было показано Арнольдом [12], в таком равновесии, не отвечающем топологии вложенных друг в друга торов, неизбежно должны появляться токовые слои, которые в конце концов должны распасться за счет последующего перезамыкания или конечной электропроводности. Отсюда следует, что магнитные поверхности тороидальной ловушки типа токамак имеют способность «самооживления» — восстановления системы вложенных друг в друга тороидальных магнитных поверхностей.

Перейдем теперь к случаю еще более несимметричного перезамыкания. Рассмотрим две трубки с магнитным полем (и плазмой), которые подходят друг к другу под углом (рис. 14, *а*). В месте их соприкосновения может начаться процесс перезамыкания, и перезамкнувшиеся силовые линии будут отходить в сторону (рис. 14, *б*), освобождая место для соприкосновения свежих слоев с перекрещенными линиями. В результате локального перезамыкания линий может произойти полное перезамыкание трубок (рис. 14, *в*).

Пусть теперь имеется токовая поверхность, разграничивающая два слоя магнитного поля с перекрещенными силовыми линиями. Мы условно разобьем слои на трубки и каждую трубку изобразим одной линией, как показано на рис. 15, *а*. Произведем теперь перезамыкание в точках соприкосновения перекрещивающихся трубок. Мы получим картину рис. 15, *б*. После выпрямления трубок получится картина рис. 15, *а*, которая соответствует полному перезамыканию и уничтожению поперечной компоненты магнитного поля.

Таким образом, в таком несимметричном перезамыкании не требуется уводить далеко перезамкнувшиеся линии: встречные поля могут уничтожаться практически локально. Поэтому рассмотренная в разделе 7 картина образования бессиловой конфигурации поля в диффузном разделе не требует каких-то специальных возмущений, (например мод  $m = 1$ ), а может достигаться просто в результате несимметричного перезамыкания.

В процессе перезамыкания происходит перенос магнитного поля процессом конвекции, а диссипация поля происходит в очень малых пространственных областях, где имеются токовые слои. В этом отношении у процесса перезамыкания имеется некоторое (хотя и довольно отдаленное) сходство с турбулентностью жидко-

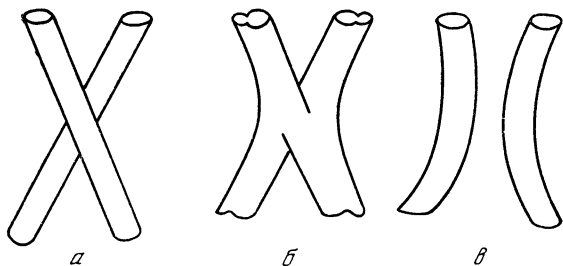


Рис. 14. Перезамыкание двух силовых трубок с плазмой

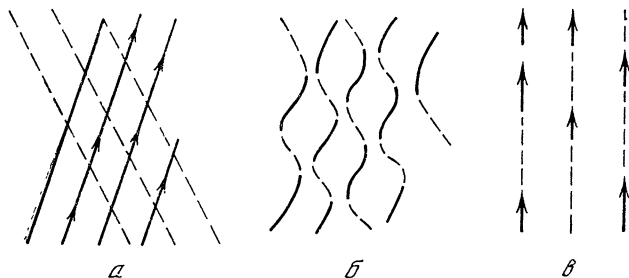


Рис. 15. Перезамыкание силовых трубок в токовом слое

сти — и там и здесь за процесс в целом ответственны крупномасштабные перемещения среды, а диссипация происходит в очень малых масштабах.

## 9. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СРЫВА В ТОКАМАКАХ

Кроме рассмотренного выше внутреннего срыва в плазме токамака, иногда развивается глобальная неустойчивость срыва. Обычно она начинается с развития слабой неустойчивости моды  $m = 2, n = 1$  и затем, вероятно, при взаимодействии с внутренней модой  $m = 1, n = 1$  и иногда с модой  $m = 3, n = 2$  происходит вспышка МГД-колебаний, которые приводят к быстрому расширению плазмы к стенке и перераспределению плотности тока в плазме к однородному с частичным выбросом полоидального магнитного потока за пределы плазмы. В этом процессе определенно большую роль играет мода  $m = 2$ , которая сама по себе приводит к перезамыканию силовых линий и образованию «магнитных островов». Но более всего этот процесс похож на турбулентный процесс перезамыкания на несимметричных возмущениях. Похоже, что в процессе срыва в токамаках на короткий промежуток времени вспыхивает процесс перезамыкания, который в диффузных разрядах все время контролирует профили полоидального и тороидального полей.



Перезамыкание силовых линий магнитного поля в хорошо проводящей среде представляет собой очень интересное физическое явление. Одно время казалось, что оно играет большую роль только в космических объектах, где плазменные процессы, как правило, носят более бурный и нерегулярный характер по сравнению с лабораторными установками. Однако в последнее время выяснилось, что такого рода эффекты могут самопроизвольно развиваться в лабораторной плазме даже при спокойных, казалось бы, начальных условиях. Общность этого явления для многих плазменных систем, его сходство с другими нелинейными явлениями в сплошных средах дает основание для более подробного его изучения. Многое в этом процессе ясно уже сейчас, но для полной ясности хотелось бы иметь более детальные физические представления и более подробные экспериментальные данные относительно статистических характеристик флуктуирующих полей при перезамыкании.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Dundgey J. W.* — *Philos. Mag.*, 1953, 44, p. 725.
2. *Parker E. N.* — *Astrophys. J.*, 1973, 18, p. 247.
3. *Сыроватский С. И.* — *ЖЭТФ*, 1971, 60, с. 1727.
4. *Baum P. J., Brotcnahl A., White R. S.* — *Phys. Fluids*, 1973, 16, p. 226.
5. *Франк А. Г.* — *Труды ФИАН СССР*, 1976, 74, с. 108.
6. *Ichimaru S.* — *Astrophys. J.*, 1975, 202, p. 528.
7. *Кадомыцев Б. Б.* — *Физ. плазмы*, 1975, 1, с. 710.
8. *Kadomtsev B. B.* — 6th Intern. Conf. on CTR. Berchtesgaden, 1976.
9. *White R. B., Monticello D. A., Rosenbluth M. N., Waddel B. V.* — 6th Intern. Conf. on CTR. Berchtesgaden, 1976.
10. *Taylor J. B.* — *Phys. Rev. Lett.*, 1974, 33, p. 1139.
11. *Stix T. H.* — *Phys. Rev. Lett.*, 1973, 30, p. 833; 1976, 36, p. 521.
12. *Арнольд В. И.* Материалы школы по дифференциальным уравнениям в Дилижане. Ереван, 1974.
13. *Сыроватский С. И.* — *Изв. АН СССР*, 1977, 41, с. 1782.
14. *Parker E. N.* — *J. Geophys. Res.*, 1957, 62, p. 609.
15. *Sweet P. A.* — In: *Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics*. Cambridge, 1958, p. 123.
16. *Petschek H. E.* — In: *The Physics of Solar Flares*. NASA SP-SO, 1964, p. 425.
17. *Pikelner S. B.* — *Comments on Astrophys. and Space Science*, 1971, 3, p. 73.

# ВЗАИМОСВЯЗЬ РАВНОВЕСНЫХ И ПОТОКОВЫХ СЛАБОТУРБУЛЕНТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

А. В. КАЦ, В. М. КОНТОРОВИЧ

Наименее странное из того, что в настоящее время имеется в теории турбулентности<sup>1</sup>, — это слабая колмогоровская турбулентность (см. обзор [1]), реализуемая в средах с дисперсией при малом уровне шума. Идейная сторона здесь восходит к турбулентности несжимаемой жидкости [2] — поток через инерционный интервал представляет собой основной параметр системы. Главное формальное отличие от «сильной» турбулентности состоит в возможности описания стохастического ансамбля при помощи замкнутой системы кинетических уравнений для функций распределения «квазичастиц»  $N_k$ . Последние образуют слабонеидеальный газ, в котором взаимодействие осуществляется посредством соударений, описываемых интегральным оператором  $I_{ст}$ . Потоки по спектру, которые естественно возникают при записи кинетического уравнения в виде уравнения непрерывности в импульсном пространстве, выражаются через интеграл столкновений и, вообще говоря, нелокально связаны с распределением. Содержательность этих понятий определяется законами сохранения при соударениях. Стационарным решениям кинетического уравнения, обращающим в нуль  $I_{ст} \{N\}$  в инерционном интервале, отвечают постоянные потоки сохраняющихся величин. При этом равным нулю потокам соответствует равновесное распределение, а отличному от нуля постоянному потоку — слаботурбулентное распределение колмогоровского типа. В условиях автомодельности спектры турбулентности являются степенными и могут быть найдены как точные решения кинетических уравнений, а также из соображений подобия. Впервые такие спектры были построены Захаровым и Филоненко для волн на поверхности глубокой воды с использованием конформной симметрии интеграла столкновений (см. [1]).

Ниже остановимся на том, на какие новые объекты были распространены идеи (слабой) колмогоровской турбулентности в последние годы и к каким результатам это привело прежде всего для понимания структуры самих слаботурбулентных потоковых спектров. При этом ограничимся изотропными спектрами<sup>2</sup> как ввиду их простоты, так и той роли, которую они, по-видимому, играют в астрофизических приложениях.

<sup>1</sup> В связи с дискуссией о слишком широком употреблении термина «турбулентность» заметим, что во всех «спорных» случаях турбулентность всегда употребляется с эпитетом (например, слабая, плазменная, акустическая и даже сильная), а потому разница всегда налицо.

<sup>2</sup> Отметим, что, как показано в [3, 4], неізотропные (сингулярные) неколмогоровские спектры играют существенную роль в процессе пучкового и параметрического нагрева плазмы.

# 1. НОВЫЕ ОБЪЕКТЫ В ТЕОРИИ ПОТОКОВЫХ СПЕКТРОВ

В примерах из гидродинамики (волнение на поверхности жидкости [5, 6]) и физики плазмы (ленгмюровская турбулентность [7]) квазичастицы представляли собой волновые пакеты и речь шла о взаимодействии волна—волна, которое для нераспадного спектра сводилось к рассеянию (рис. 1). Структура интеграла столкновений при этом имеет вид

$$I_{\text{ст}}\{N\} = \int d\tau_k W_k f_k, \quad d\tau_k = dk_1 dk_2 dk_3, \quad (1)$$

где в вероятности перехода  $W$  учитываются законы сохранения энергии и импульса

$$W_k \equiv W_{kk_1|k_2k_3} = U_{kk_1|k_2k_3} \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3),$$

а в величине

$$f_{kk_1|k_2k_3} = N_1 N_2 N_3 + N N_2 N_3 - N N_1 N_2 - N N_1 N_3, \quad (2)$$

которую удобно для дальнейшего рассматривать как классический предел ( $N \gg 1$ ) квантового выражения

$$f_{kk_1|k_2k_3}^{\text{кв}} = N_2 N_3 (1 + N)(1 + N_1) - N N_1 (1 + N_2)(1 + N_3), \quad (3)$$

учитывается сохранение числа волн при рассеянии. Сохранение, наряду с энергией, числа волн приводило к двум различным степенным турбулентным спектрам, один из которых соответствовал

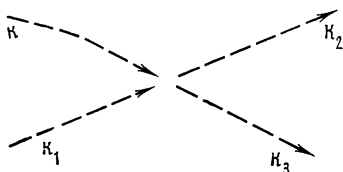


Рис. 1

потоку энергии, а другой — потоку числа квазичастиц через инерционный интервал. Оба этих спектра находились как решения, обращающие в нуль интеграл столкновений (наряду с равновесным распределением)  $\dot{N}_k = I_{\text{ст}}\{N\}$  ( $I_{\text{ст}}\{N_{\text{турб}}\} = 0$ ,  $I_{\text{ст}}\{N_{\text{равн}}\} = 0$ ). Показатели степени в них выражались через размерность  $k$ -пространства  $d$ , степени однородности закона дисперсии  $\beta$ , вероятности перехода (как функции волновых векторов)  $w$  и интеграла столкновений (как функционала от  $N$ )  $l$

$$\omega_{\lambda k} = \lambda^\beta \omega_k, \quad W_{\lambda k} = \lambda^w W_k, \quad f(\lambda N) = \lambda^l f(N).$$

При рассеянии волн  $l = 3$ . Спектры параметризовались потоком энергии  $J_1$  и потоком числа волн  $J_0$  соответственно, и турбулентные распределения записывались в весьма общей форме [8,9],

обобщающей результаты Захарова и Филоненко:

$$N_{\text{турб}}^{(1)} = \alpha_1 |J_1|^{1/l} \omega_k^{s_1}, \quad s_1 = -(w + jd + \beta)/\beta l, \quad (4)$$

$$N_{\text{турб}}^{(0)} = \alpha_0 |J_0|^{1/l} \omega_k^{s_0}, \quad s_0 = s_1 + 1/l$$

( $j$  — число взаимодействующих квазичастиц). При этом распределение с потоком энергии  $N_{\text{турб}}^{(1)}$  справедливо и для распадного спектра ( $l = 2, j = 3$ ). Физическая картина турбулентности оставалась по существу той же, что и в гидродинамике несжимаемой жидкости.

Этот же колмогоровский подход был распространен на плазменные системы со взаимодействием волна-частица [10] (рис. 2). Свя-

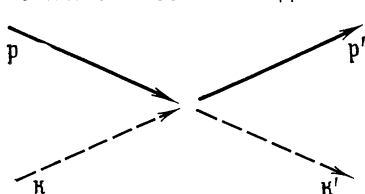


Рис. 2

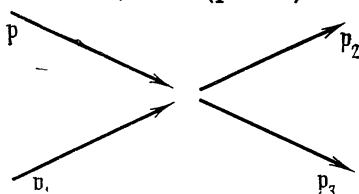


Рис. 3

занная система кинетических уравнений содержит интегралы столкновений, по-прежнему имеющие структуру (1), (3), причем для частиц в выражении  $f^{KB}$  при фермиевской статистике возникают множители  $(1 - n)$  вместо множителей  $(1 + N)$  для волн. В классическом пределе  $n \ll 1$

$$f_{k|k'p'} = (N_k + 1)N_{k'}n_{p'} - N_k(N_{k'} + 1)n_p. \quad (5)$$

Стационарные решения системы кинетических уравнений приводят к степенным спектрам как для волн, так и для частиц<sup>3</sup> (при наличии потока по их спектру). Норманом и Тер-Хааром [11] (а также в [12]) было показано, что решения системы кинетических уравнений плазменного турбулентного реактора (ПТР) для релятивистских электронов и излучения (изучавшиеся ранее [13] в связи с проблемой объяснения степенных спектров космического излучения) также носят колмогоровский характер. Рассматривались с этой точки зрения и процессы томсоновского [14, 15] и комптоновского [16, 17] рассеяния. Ниже мы вернемся к системам волна-частица, так как здесь имеются достаточно простые ситуации, доступные детальному анализу.

Наконец, колмогоровские спектры частиц обсуждались для взаимодействия частица—частица [18] (рис. 3). В частности, были получены степенные распределения частиц, которые формируются за счет обычных кулоновских соударений в отсутствие взаимодействия с волнами и, более того, способствуют затуханию волновых

<sup>3</sup> Степенные спектры нейтронов для постоянного потока частиц обсуждались еще в 1948 г. [27], причем рассматривалось рассеяние на ядрах, описываемое кинетическим уравнением.

движений и расширению области существенно «столкновительной» плазмы [18]. Здесь физическая картина уже очень далека от гидродинамической турбулентности, но формальная аналогия в духе слабой турбулентности полностью сохраняется. Остается справедливым и выражение для слаботурбулентных потоковых распределений. При этом в силу  $n \ll 1$  для частиц из (3) следует

$$f_{pp_1|p_2p_3} = n_2 n_3 - n n_1.$$

Степенные распределения частиц прежде всего сказываются на тех свойствах среды, которые чувствительны к наличию быстрых частиц: затухание Ландау, скорости ядерных реакций, критерий Лоусона и т. п. [18].

Однако в подобных вопросах важна уже структура распределения при значительной доле тепловых частиц. Она выяснена на более простом примере спектра, формируемого томсоновским рассеянием, когда кинетическое уравнение носит дифференциальный характер (см. раздел 4).

## 2. СВЯЗ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА СО СПЕКТРАМИ В ИНЕРЦИОННОМ ИНТЕРВАЛЕ

Хотя турбулентные распределения, так же как и равновесные, найдены из решения однородного уравнения  $I_{ст} \{N\} = 0$ , но в действительности, в отличие от равновесных, они требуют существования источников (и стоков), создающих поток по спектру. Последние, не фигурируя в уравнении, должны быть учтены граничным условием. Имеющаяся здесь ситуация аналогична электростатической [12, 19]. Вместо того чтобы решать уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e \sigma(\mathbf{r})$ , поле точечного заряда  $e$  можно описать уравнением  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  всюду, кроме начала координат, а наличие заряда может быть учтено фиксированием полного потока  $\oint \mathbf{E} d\sigma$ , который по теореме Гаусса равен  $4\pi e$ .

Рассмотрим для определенности (в трехмерном случае) решение с потоком (квази)частиц по спектру. Оно приводит к особенности типа  $\delta$ -функции в правой части кинетического уравнения, т. е. является решением неоднородного уравнения, если рассматривать его не только внутри инерционного интервала, а и включая область источника при  $\mathbf{k} = 0$ :

$$I_{ст} \{N_{турб}^{(0)}\} = 4\pi J_0 \delta(\mathbf{k}). \quad (6)$$

Сток в этом случае находится на бесконечности. Разумеется, источник является точечным только с точки зрения «дальней зоны» — инерционного интервала достаточно большой протяженности, в котором решение с несингулярным (реальным) источником уже вышло на свою (степенную) асимптотику [19].

Записывая кинетическое уравнение в виде уравнения непрерывности, введем плотность потока частиц в импульсном пространстве  $\mathbf{j}_0(\mathbf{k})$

$$\operatorname{div}_{\mathbf{k}} \mathbf{j}_0(\mathbf{k}) \equiv -I_{ст} \{N\}, \quad \dot{N}_{\mathbf{k}} + \operatorname{div}_{\mathbf{k}} \mathbf{j}_0(\mathbf{k}) = 4\pi \rho(\mathbf{k}),$$

где  $\rho(\mathbf{k})$  — плотность источников (и стоков), и полный поток

$$4\pi J_0(k) = \oint_{|\mathbf{k}|=k} \mathbf{j}_0(\mathbf{k}) d\sigma_{\mathbf{k}},$$

для которого в изотропном случае

$$I_{\text{ст}}\{N\} = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial J_0(k)}{\partial k}. \quad (7)$$

Как для потока энергии, так и для потока частиц плотности потоков определены с точностью до произвольного ротора, а полные потоки — с точностью до произвольной постоянной, которую естественно выбрать из условия, чтобы равновесному спектру отвечал нулевой поток.

Таким образом, на стационарном решении  $J_0(k)$  должно быть константой, равной полному «заряду» — мощности источника  $J_0$ , а распределение можно считать создаваемым точечным «зарядом».

В условиях однородности, когда  $N_{\text{турб}}$  должно иметь степенной вид, удобно искать решение кинетического уравнения в степенной форме с неизвестным показателем. Сравнивая вычисленный на такой функции интеграл  $I_{\text{ст}}$  (который вследствие однородности тоже выразится степенной функцией) со степенным представлением правой части (6), где, согласно [12],

$$\delta(\mathbf{k}) = \lim_{m \rightarrow 3-} [(3-m)/4\pi k^m], \quad (8)$$

легко найти как искомую степень, так и нормировку распределения. Степенное представление  $\delta$ -функции связано с известным представлением

$$4\pi\delta(\mathbf{r}) = -\lim_{\alpha \rightarrow 1-} (\Delta/r^\alpha).$$

Односторонний предельный переход соответствует интегрируемости функций в начале координат.

Можно найти индексы и нормирующий множитель и не используя (8), если потребовать постоянства потока, вычисленного на степенном распределении согласно (7). При этом если  $I_{\text{ст}} = J_0\varphi(m)/k^m$ , то поток  $J_0(k) = J_0\varphi(m)k^{3-m}/(3-m)$ . Требование постоянства потока ( $m=3$ ) и его конечности ( $\varphi(m) \sim (3-m)$ ) означает существование нуля первого порядка у  $I_{\text{ст}}$  и неопределенности вида  $0/0$  в потоке [20]. Раскрытие неопределенности приводит к связи потока и производной от  $I_{\text{ст}}$  по индексу [20]

$$(\partial I_{\text{ст}}/\partial m)_{m=3} = J_0/k^3, \quad (9)$$

удобной для определения индексов и нормировки спектров. Такое поведение решения, как видно, является следствием особенности (наличия точечного источника) в начале координат.

Для инерционного интервала с потоком энергии рассмотрение аналогично. Турбулентный спектр является решением уравнения

$$\omega_{\mathbf{k}} I_{\text{ст}}\{N_{\text{турб}}^{(1)}\} = 4\pi J_1\delta(\mathbf{k})$$

(опускаем «сток» в области больших  $k$ ), а потоки определяются согласно

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_1(\mathbf{k}) = -\omega_k I_{\text{ст}}, \quad 4\pi J_1(k) = \oint_{|\mathbf{k}|=k} \mathbf{j}_1(\mathbf{k}) d\sigma_k, \quad \omega_k I_{\text{ст}} = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial J_1(k)}{\partial k}.$$

Все сказанное о степенных распределениях относится к одно-поточковым спектрам. При наличии нескольких потоков по спектру стационарное решение уже не является степенным и в настоящее время получено лишь в тех предельных случаях, когда один из потоков велик, а остальные малы [8]. Так как относительная величина потоков зависит от частоты, в широком инерционном интервале<sup>4</sup> такое решение должно выходить на различные предельные степенные асимптотики. Так, двухпоточковое распределение определяется локальным безразмерным параметром  $J_1/\omega J_0$  и при  $\omega \gg J_1/J_0$  приближается к  $N_{\text{турб}}^0$ , а при  $\omega \ll J_1/J_0$  — к  $N_{\text{турб}}^{(1)}$ .

### 3. НАПРАВЛЕНИЕ ПОТОКОВ ПО СПЕКТРУ И НОРМИРОВКА СЛАБОТУРБУЛЕНТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Различные турбулентные решения требуют для своей реализации определенного расположения источников в соответствии со знаками потоков. Оказывается, что определение направления потоков на степенных спектрах может быть произведено в самом общем виде [21]. При этом удобно использовать выражение для потока через производную по показателю степени от интеграла столкновений (9) и аналогичное условие для потока энергии  $J_1$ . Анализ существенно упрощается, если воспользоваться конформной симметрией и перейти к факторизованной форме записи  $I_{\text{ст}}$  на степенных распределениях. При этом соотношение между потоком и спектром вида  $N_{\text{турб}}^{(i)} = A_i \omega^s$  ( $i = 0, 1$ ) для интеграла столкновений, описывающего рассеяние волн друг на друге (2), приобретает вид

$$J_i = \frac{A_i^3}{4\beta} \int d\tau_k W_k(\omega\omega_1\omega_2\omega_3)^s [\omega^{-s} + \omega_1^{-s} - \omega_2^{-s} - \omega_3^{-s}] [\omega^i \ln \omega + \omega_1^i \ln \omega_1 - \omega_2^i \ln \omega_2 - \omega_3^i \ln \omega_3] |_{s=s_i}.$$

Выяснить знак потоков с помощью этого выражения можно без фактического вычисления интегралов (разумеется, необходимого для вычисления нормирующего множителя  $\alpha_i$  в связи  $A_i = \alpha_i |J_i|^{1/s}$ ). Результат определяется только индексами распределения  $s$  и закона дисперсии  $\beta$  [21]:

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} J_0 &= -\operatorname{sign} \beta s_0 (s_0 + 1); \\ \operatorname{sign} J_1 &= \operatorname{sign} \beta s_1 (s_1 + 1) \quad (s_0 = s_1 + 1/3), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $s_i$  приведены в (4). ||

<sup>4</sup> Этот интервал должен содержать источник (сток) (ср. рис. 8), а, как показано одним из авторов совместно с В. А. Шнидманом, отношения потоков отмечаются по обе стороны от него.

Удобно символически изобразить поток как функцию  $s$ . При этом знак потока меняется, если индекс проходит через значения  $s = 0, -1$  (рис. 4), отвечающие степенным асимптотикам равновесного спектра волн  $N_{\text{равн}} = T/(\omega + |\mu|)$ . Направлены ли потоки энергии и числа волн в одну сторону или противоположны, определяется расположением значений  $s_0$  и  $s_1$  относительно указанных «критических» значений  $0$  и  $-1$ . Как правило, потоки могут быть направлены только в разные стороны, причем для  $\beta > 0$  поток волн направлен в сторону длинных, а энергии — в сторону коротких волн. Для систем гидродинамического типа это отмечалось

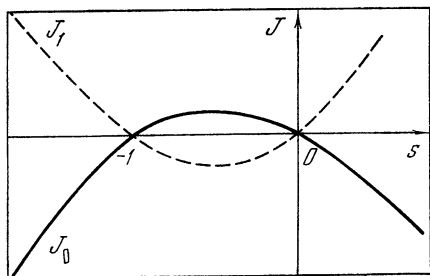


Рис. 4

Захаровым и связано с «вымерзанием» взаимодействия при  $\lambda \rightarrow \infty$ , что приводит к значениям  $s$ , меньшим  $-1$ .

Аналогичный анализ для частиц, описываемых интегралом столкновений Больцмана, приводит к условиям

$$\text{sign } J_0 = -\text{sign } \beta s_0, \quad \text{sign } J_1 = \text{sign } \beta s_1 \quad (s_0 = s_1 + 1/2).$$

Особым является случай активационного закона дисперсии  $\omega(\mathbf{k}) = \omega_0 + \delta\omega(\mathbf{k})$  для волн и  $E(\mathbf{p}) = E_0 + \delta E(\mathbf{p})$  для частиц. Знаки дисперсионных добавок могут быть произвольны (например,  $\delta\omega > 0$  для ленгмюровских плазмонов,  $\delta\omega < 0$  для оптических фононов в кристалле,  $\delta E < 0$  для дырок в металлах и полупроводниках). Поток энергии  $J_1$ , определенный по дисперсионной добавке, связан с полным потоком энергии через поток частиц  $J_0$ :  $J_1 = \omega_0 J_0 + J_1$ . Направления потоков энергии равны

$$\text{sign } J_1 = \text{sign } \beta s_1 (s_1 + 1) \delta\omega, \quad \text{sign } J_1 = \text{sign } \beta s_1 \delta E,$$

где  $\beta$  относится к дисперсионной добавке и в силу аналитичности спектра обычно равно двум в изотропной среде. Знак потока частиц остается прежним (10). Заметим, однако, что изменение направления потока за счет знака  $\delta\omega$  или  $\delta E$  по оси импульсов не означает изменения знака по оси энергии.

Определение направления потока тесно связано с нормировкой турбулентных распределений, которые, как правило, не соответствуют конечным плотностям (числам частиц) или энергиям при растяжении инерционного интервала на всю полуось энергий (частот). Эти распределения допускают нормировку на поток по спек-



ру, если на них сходятся сами интегралы столкновений (т. е. выполнено условие локальности).

Прямое вычисление в простейших случаях (например, для акустической турбулентности Захарова и Сагдеева [22], для капиллярных волн на мелкой воде [6, 21]) подтверждает, что безразмерный нормировочный коэффициент — порядка единицы. Для кулоновского спектра частиц с потоком энергии он обратно пропорционален кулоновскому логарифму [18].

#### 4. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ПАРАМЕТРИЗУЕМЫЕ ПОТОКОМ И ТЕМПЕРАТУРОЙ (НА ПРИМЕРЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ИЗЛУЧЕНИЯ)

Существование равновесных и турбулентных стационарных решений у кинетического уравнения поставило вопрос о том, каким должно быть распределение при совместном воздействии термостата, формирующего равновесный, и источника, формирующего турбулентный спектр, когда реализуется каждое из этих решений. Возможность установления либо равновесных, либо потоковых

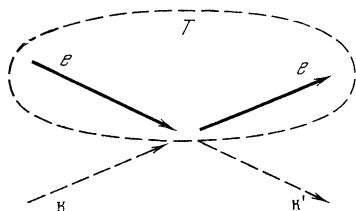


Рис. 5

степенных распределений анализировалась численно [23]. Достаточно простой пример излучения, рассеиваемого равновесными нерелятивистскими электронами (рис. 5) (играющими роль термостата), при наличии потока от источника фотонов позволяет провести аналитическое исследование задачи.

Оказывается, что одновременное наличие потока и температуры приводит к формированию единого распределения, вид которого существенно зависит от соотношения между потоками и температурой [15]. Типичным для него является возникновение промежуточной асимптотики [24], существенно искажающей «хвосты» распределения при самых малых потоках. При нерелятивистских энергиях электронов изменение частоты фотона при рассеянии мало ( $\Delta\omega/\omega \sim v/c$ ), так что фотонное кинетическое уравнение становится из интегрального дифференциальным. Соответствующее уравнение Компанейца [25] имеет вид

$$\dot{N}_k = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} q(v), \quad q(v) = -\rho v^4 \left[ \frac{T_e}{h} \frac{\partial N}{\partial v} + N(1 + N) \right].$$

Здесь  $q$  — поток фотонов в пространстве частот  $\nu = \omega/2\pi$ , коэффициент  $\rho$  определяется через томсоновское сечение  $\sigma$  и концентра-

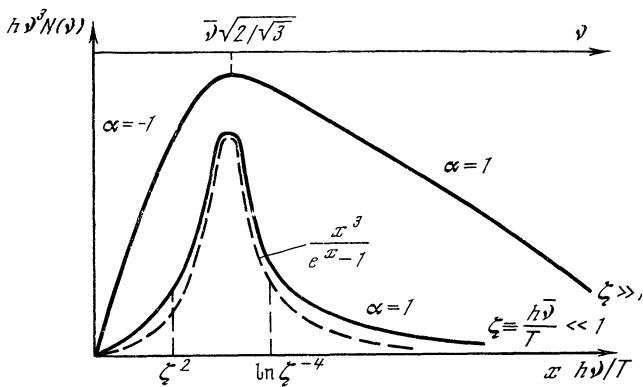


Рис. 6

цию электронов  $n$  [25]. Член с  $N^2$  описывает индуцированные, остальные — спонтанные процессы. Рассмотрим стационарное состояние, соответствующее постоянному отрицательному потоку  $q = -\rho v^{-4}$ . Оно описывается уравнением

$$\frac{T_e}{h_\nu} \frac{\partial N}{\partial \nu} + N^2 + N = \left(\frac{\bar{\nu}}{\nu}\right)^4, \quad (11)$$

из которого видно, что единственным параметром является отношение корня четвертой степени из потока к температуре  $\xi \equiv h\bar{\nu}/T_e$ . При малом потоке ( $\xi \ll 1$ ) решение имеет вид слабовозмущенного планковского распределения, от которого отрастают в области малых [14] и больших [15] частот степенные хвосты (рис. 6):

$$N_k \simeq (\bar{\nu}/\nu)^2 + T_e/h\nu \quad (\nu \leq \xi \bar{\nu}); \quad N_k \simeq (\bar{\nu}/\nu)^4 + e^{-h\nu/T_e} \quad (\nu \geq T_e \ln(1/\xi)).$$

(Полное решение приведено в [15].) При этом область частот<sup>5</sup>, занимаемая степенными потоковыми асимптотиками, существенно зависит от величины потока. С ростом потока она также растет, и при большом потоке эти асимптотики смыкаются, «съедая» равновесную часть распределения. Образуется бистепенный спектр, который следует из (11) при  $T_e \rightarrow 0$ :

$$N_k = 1/2 \left[ \sqrt{1 + 4(\bar{\nu}/\nu)^4} - 1 \right] \quad (T_e \ll h\bar{\nu}). \quad (12)$$

Такая неоднородность связана с одновременным учетом и спонтанных, и индуцированных процессов. Распределение (12) является нормируемым, соответствующее ему полное число фотонов конечно.

Каждая из степенных асимптотик может быть найдена независимо с использованием свойств симметрии в области однородности

<sup>5</sup> Этот пример интересен и тем, что удается убедиться в устойчивости степенного распределения  $\nu^{-4}$  (см. [28], где независимо найдено это распределение); к такому выводу можно прийти и из численного анализа, проведенного Илларионовым и Сюняевым [14].

кинетического уравнения [15]. В этой связи рассмотренный пример решения уравнения Компанейца интересен для теории турбулентности, так как наглядно демонстрирует, как степенные асимптотики входят в полное решение.

Рассеяние частиц на излучении при наличии потока может формировать и степенные спектры частиц, обсуждавшиеся в связи с проблемой объяснения степенных спектров космических лучей [16, 17]. В частности, для релятивистских электронов возникает степенная асимптотика с индексом  $\gamma = 2$  в дифференциальном пространственном потоке  $vn_p d^3p/d\varepsilon \sim \varepsilon^{-\gamma}$ . Заметим, что комптоновский спектр электронов с  $\gamma = 2$  является весьма универсальным — он получается, по существу, без каких-либо специальных предположений о виде фотонного спектра. В частности, он может устанавливаться за счет рассеяния на реликтовом излучении [16, 17].

### 5. ПЛАЗМЕННЫЙ ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕАКТОР КАК ПРИМЕР ТУРБУЛЕНТНОЙ СИСТЕМЫ С ПОТОКОМ ПО СПЕКТРУ

Под ПТР понимают систему релятивистских электронов и излучения, рассеиваемых и удерживаемых турбулентной плазмой. Процессом, определяющим распределения электронов и фотонов, является рассеяние с превращением плазменного колебания с частотой  $\omega_0$  в поперечную электромагнитную волну с частотой

$$\omega \sim \omega_0 (\varepsilon/mc^2)^2 \quad (\varepsilon \gg mc^2). \quad (13)$$

Плазменная турбулентность является заданной и играет роль некоторого статистически однородного и стационарного внешнего поля, разрешающего основной процесс рассеяния (рис. 7). Уравнения ПТР получаются разложением кинетических уравнений вида (1), (5) по малой передаче электронного импульса при рассеянии и с учетом доплеровского преобразования частоты (13) содержат усредненную вероятность перехода, зависящую лишь от отношения  $\omega/\varepsilon^2$ . Так как рассматривается один и тот же процесс, то каждое из кинетических уравнений для распределения фотонов  $N_k$  и электронов  $n_p$  содержит одну и ту же комбинацию функций распределения  $\omega N \partial n / \partial \varepsilon + n$ , умноженную на  $u(\omega/\varepsilon^2)$  и плотность электронных состояний  $\varepsilon^2$ . Величина  $u$  пропорциональна энергии плазменной турбулентности.

Таким образом, уравнения ПТР имеют вид [11]

$$\dot{n}_p = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^\infty d\omega S(\omega, \varepsilon); \quad \dot{N}_k = \frac{1}{\omega^3} \int_0^\infty d\varepsilon S(\omega, \varepsilon);$$

$$S(\omega, \varepsilon) = \varepsilon^2 u(\omega/\varepsilon^2) (\omega N \partial n / \partial \varepsilon + n).$$

Эти уравнения допускают два стационарных степенных решения. Одно из них, выраженное через индексы  $\varepsilon^2 n \sim \varepsilon^{-\gamma}$  и  $\omega^3 N \sim \omega^{-\alpha}$ , соответствует  $\gamma = 2$  и  $\alpha = -5/2$  [11], другое — индексам  $\gamma = 3$

и  $\alpha = -5/2$  [13]. Оказалось, что первое из них соответствует постоянному потоку числа релятивистских электронов [11], направленному в сторону больших энергий [12], а второе представляет собой решение с постоянным потоком энергии по спектру как электронов, так и фотонов, причем суммарный поток направлен в сторону малых энергий [12].

Как уже отмечалось, простой степенной вид стационарных колмогоровских спектров существенно связан с симметрией системы. В гидродинамических и плазменных системах — это отсутствие выделенных масштабов (автомодельность), приводящая к однород-

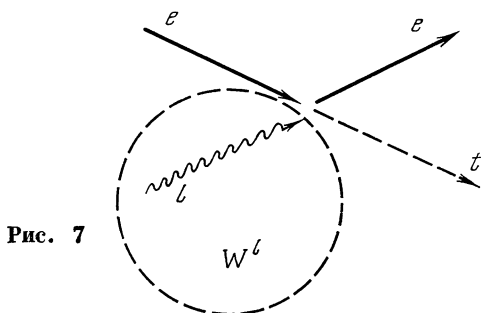


Рис. 7

ности уравнений. Возможность аналитического исследования этих систем, впервые отмеченная Захаровым, связана с этой однородностью, позволяющей найти решения кинетических уравнений слабой турбулентности (см. [1, 9]). В степенных решениях кинетических уравнений ПТР также определяющей оказалась симметрия [11], но иная, нежели в гидродинамике. Симметрия уравнений ПТР проявляется в зависимости  $u$  от  $\omega/\epsilon^2$ . На степенном распределении для волн

$$N_k = A\omega^{-1/2} \quad (\alpha = -5/2) \quad (14)$$

при степенном распределении электронов

$$n_p = a\epsilon^s \quad (15)$$

величина  $S(\omega, \epsilon)$  также зависит от  $\omega$  лишь в комбинации  $\omega/\epsilon^2$ , что и приводит к требуемой для существования степенных решений однородности уравнений ПТР, впервые отмеченной Норманом и Тер-Хааром [11]. Это позволило получить степенные решения, явно используя симметрию, и благодаря этому исключить ошибки предыдущих работ, связанные с громоздким численным решением нелинейных уравнений ПТР. Рассматриваемые как уравнения слабой турбулентности, они представляют значительный интерес в связи с тем, что функция  $u(x)$  достаточно хорошо убывает как на бесконечности, так и в нуле, обеспечивая существование моментов  $B(v) = \int_0^\infty x^v u(x) dx$ .

На степенных распределениях (14), (15) потоки

$$J_0(\varepsilon) = - \int_0^{\infty} d\omega S;$$

$$J_1(\varepsilon) = - \int_0^{\varepsilon} d\varepsilon \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^{\infty} d\omega S, \quad J_1(\omega) = - \int_0^{\omega} d\omega \int_0^{\infty} d\varepsilon S$$

приобретают также степенной вид [12]

$$J_0(\varepsilon) = - a \varepsilon^{s+4} [sAB(1/2) + B(0)];$$

$$J_1(\varepsilon) = - a \frac{s+4}{s+5} \varepsilon^{s+5} [sAB(1/2) + B(0)];$$

$$J_1(\omega) = - a \frac{1}{s+5} \omega^{(s+5)/2} \left[ sAB \left( - \frac{4+s}{2} \right) + B \left( - \frac{5+s}{2} \right) \right],$$

из которого следуют стационарные решения с постоянным по спектру потоком. В ПТР величиной потока параметризуется только электронное распределение

$$a_0 \sim |J_0^e|, \quad A_0 = B(-1/2)/4B(0), \quad J_1 = 0 \quad (\gamma = 2);$$

$$a_1 \sim |J_1^e + J_1^p|, \quad A_1 = B(0)/5B(1/2), \quad J_0 = 0 \quad (\gamma = 3).$$

При этом  $J_0^e > 0$ , а  $(J_1^e + J_1^p) < 0$ .

Требование локальности в данном случае сводится к существованию моментов  $B(\nu)$  при  $\nu = -1/2, 0$  и  $1/2$ , и в отличие от кулоновского случая, где локально только распределение с потоком энергии, спектры ПТР оказываются локальными как для потока энергии, так и для потока частиц.

Не останавливаясь на астрофизической стороне дела, которая подробно изучена в ряде работ (см. ссылки в обзоре Цытовича [26], в монографии Каплана и Цытовича [13] и работе Нормана и Тер-Хаара [11]), отметим, что потоки в ПТР должны создаваться источниками, сторонними по отношению к турбулентной плазме [12].

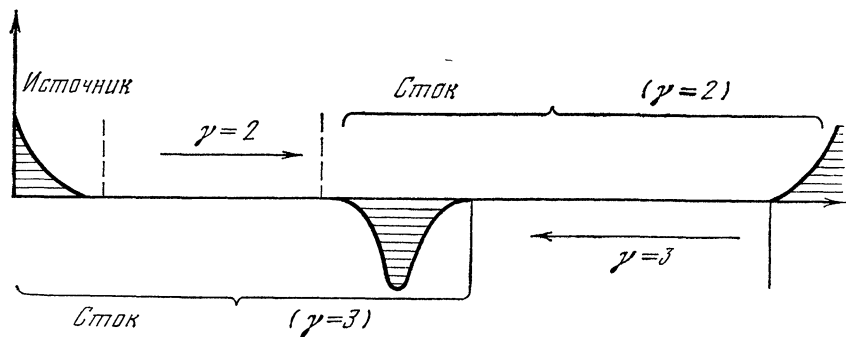


Рис. 8

В уравнениях ПТР, согласно сказанному в разделе 2, должны фигурировать для каждого инерционного интервала свои «точечные» источники, структура которых, как видно из рис. 8, может быть весьма сложна. Скорее всего в реальных условиях будут формироваться неоднородные спектры.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Кадомцев Б. Б., Конторович В. М.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, 17, с. 511.
2. *Монин А. С., Яглом И. М.* Статистическая гидромеханика. М., «Наука», 1965.
3. *Брейzman Б. Н., Захаров В. Е., Мушер С. Л.*— ЖЭТФ, 1973, 64, с. 1297.
4. *Силин В. П.* Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М., «Наука», 1973.
5. *Захаров В. Е., Филоненко Н. Н.*— Докл. АН СССР, 1966, 170, с. 1292.
6. *Кац А. В., Конторович В. М.*— ПМТФ, 1974, № 6, с. 97.
7. *Захаров В. Е.*— ЖЭТФ, 1966, 51, с. 688; 1972, 62, с. 1745.
8. *Кац А. В., Конторович В. М.*— Письма в ЖЭТФ, 1971, 14, с. 392.
9. *Кас А. V., Kontorovich V. M.*— Physics, 1977, 86a, p. 471.
10. *Боцман В. И., Кац А. В., Конторович В. М.*— Докл. АН СССР, 1975, 220, с. 1053.
11. *Norman C. A., Ter Haar D.*— Plasma turbulent reactors. Preprint Oxford Univ., N 57/74, 1974.
12. *Кац А. В., Конторович В. М.*— ЖЭТФ, 1977, 73, с. 2157.
13. *Каплан С. А., Цытович В. Н.* Плазменная астрофизика. М., «Наука», 1972.
14. *Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А.*— Астрон. журн., 1972, 49, с. 58; 1974, 51, с. 698.
15. *Кац А. В., Конторович В. М.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1977, 20, с. 1112.
16. *Гинзбург В. Л.*— УФН, 1953, 60, с. 343.
17. *Кац А. В., Конторович В. М., Кочанов А. Е.* Препринт ИРЭ АН УССР, № 93, 1978.
18. *Кац А. В., Конторович В. М., Моисеев С. С., Новиков В. Е.*— ЖЭТФ, 1976, 71, с. 177.
19. *Кац А. В., Конторович В. М.*— ЖЭТФ, 1973, 65, с. 206; 1973, 64, с. 153.
20. *Карась В. И., Моисеев С. С., Новиков В. Е.*— ЖЭТФ, 1976, 71, с. 1421.
21. *Кац А. В.*— ЖЭТФ, 1976, 71, с. 2104.
22. *Захаров В. Е., Сагдеев Р. З.*— Докл. АН СССР, 1970, 192, с. 247.
23. *Захаров В. Е., Мушер С. Л.*— Докл. АН СССР, 1973, 209, с. 1063.
24. *Баренблатт Г. И.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, № 5—6, с. 902.
25. *Зельдович Я. Б.*— УФН, 1975, 115, с. 161.
26. *Цытович В. Н.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, с. 822.
27. *Ахиезер А. И., Померанчук И. Я.* Некоторые вопросы теории ядра. М., ОГИЗ, 1948.
28. *Моисеев С. С., Назаренко Л. А., Новиков В. Е.*— УФЖ, 1978, 23, с. 1592.

# МЕТОДЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

О. И. БОГОЯВЛЕНСКИЙ, С. П. НОВИКОВ

Ряд задач общей теории относительности сводится к изучению конечномерных динамических систем при отыскании классов решений уравнений Эйнштейна, обладающих высокой симметрией. К настоящему времени хорошо изученными классами такого рода являются однородные (или пространственно-однородные) анизотропные космологические модели, описывающие возможную эволюцию Вселенной до достижения изотропной стадии Фридмана (т. е. на ранних стадиях эволюции). Наиболее важной частью качественных исследований возникающих здесь многомерных динамических систем является изучение поведения траекторий вблизи так называемой космологической сингулярности (каждая траектория при этом описывает решение уравнений Эйнштейна, т. е. пространство — время). Эта постановка вопроса приводит к ряду специфических черт качественного исследования, которые будут отмечены далее.

## 1. ОДНОРОДНЫЕ МОДЕЛИ

### С ГИДРОДИНАМИЧЕСКИМ ТЕНЗОРОМ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА. ФИЗИЧЕСКАЯ ОБЛАСТЬ S И ЕЕ ГРАНИЦА Г

Рассматривается четырехмерное многообразие (пространство-время)  $\mathcal{M}^4$  с индефинитной метрикой Эйнштейна  $g_{ab}$  сигнатуры  $(+ - - -)$ , удовлетворяющей уравнению Эйнштейна с гидродинамическим тензором энергии-импульса

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}, \quad (1)$$

где  $T_{ab} = (p + \varepsilon) u_a u_b - p g_{ab}$ . (Пусть система единиц такова, что  $c = 8\pi G/c^4 = 1$ ). Здесь  $p, \varepsilon$  — давление и плотность энергии в сопутствующей системе  $u^a = (1, 0, 0, 0)$ , где  $u^a$  — 4-вектор скорости материи,  $u^a u^b g_{ab} = 1$  и уравнение состояния имеет вид  $p = k\varepsilon$ ,  $0 \leq k < 1$ ,  $k$  — квадрат скорости звука. Наиболее интересны случаи  $k = 0$  (пыль) и  $k = 1/3$ , где  $T^a_a = 0$ . Недостающие уравнения на скорости  $u_a$ , дополняющие (1) до замкнутой системы, получаются из условий совместности (законов сохранения или уравнений гидродинамики) на правые части (1)

$$T^b_{a;b} = \nabla_b T^b_a = 0, \quad (2)$$

так как ковариантная дивергенция тензора в левой части уравнений (1) всегда равна нулю.

Многообразие  $\mathcal{M}^4$  с метрикой Эйнштейна  $g_{ab}$ , удовлетворяющей (1), называется однородной (пространственно-однородной) космологической моделью, если задана группа  $G$  преобразований  $\mathcal{M}^4 \rightarrow \mathcal{M}^4$ , сохраняющая метрику  $g_{ab}$  и имеющая трехмерные пространственно-подобные орбиты  $\mathcal{M}^3$ . Однородная модель максимально анизотропна, если число параметров в группе  $G$  равно 3. Если число параметров в  $G$  равно 4, то говорят о моделях с аксиальной изотропией. Изотропные модели (Фридмана) имеют шестипараметрические группы движений  $G$ . Наиболее общими являются анизотропные модели, остальные — их вырожденные частные случаи.

При исследовании уравнений (1) удобно пользоваться так называемой тетрадной записью метрики через скалярные произведения специальных векторных полей: выбираются  $G$ -инвариантные векторные поля  $X_\alpha$  на  $\mathcal{M}^4$  с коммутационными соотношениями вида

$$[X_0, X_\alpha] = 0, \quad [X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3),$$

где  $C_{\alpha\beta}^\gamma$  — структурные константы трехпараметрической группы  $G$  (они не зависят от времени), причем поля  $X_\alpha$  касательны к орбитам группы  $G$ . Мы будем выбирать синхронную систему отсчета, где  $(X_0, X_0) = 1$ ,  $(X_0, X_\alpha) = g_{0\alpha} = 0$ . Динамическими переменными являются компоненты метрики  $g_{\alpha\beta} = -(X_\alpha, X_\beta)$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ).

В силу однородности имеем  $\alpha_\beta = g_{\alpha\beta}(t)$ . Уравнение Эйнштейна (1) является уравнением второго порядка на матрицу  $g_{\alpha\beta}(t)$  после исключения скоростей материи в силу (2). Координата  $t$  направлена по оси  $X_0$  (синхронное время). Используя (1), (2) и уравнение состояния  $p = k\varepsilon$ , все величины выразим через метрику  $g_{\alpha\beta}$  и ее временные производные  $\dot{g}_{\alpha\beta}$ . Уравнение Эйнштейна (1) сводится тем самым к динамической системе в пространстве  $R^{12}$  с координатами  $(g_{\alpha\beta}, \dot{g}_{\alpha\beta})$ , которая описывает однородные космологические модели и представляет для нас интерес в «физической области»  $S$ , выделяемой, во-первых, положительностью пространственной метрики-матрицы  $(g_{\alpha\beta})$ , во-вторых, неотрицательностью плотности энергии  $T_{00} \geq 0$ .

Граница физической области  $S$  в пространстве  $R^{12} = (g_{\alpha\beta}, \dot{g}_{\alpha\beta})$  обозначается буквой  $\Gamma$ . Фазовая поверхность  $g = \det |g_{\alpha\beta}| = 0$  на границе  $\Gamma$  называется «космологической особенностью». Сильной космологической особенностью называется поверхность  $g_{\alpha\beta} = 0$  на границе  $\Gamma$  (для всех  $\alpha, \beta$ ).

Трехпараметрические группы  $G$  (и тем самым однородные модели) разделяются на девять типов Бьянки. Коммутационные соотношения всех типов имеют канонический вид

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= aX_2 + n^3X_3, & [X_2, X_3] &= n^1X_1, \\ [X_3, X_1] &= n^2X_2 - aX_3. \end{aligned}$$

Однородные модели различают по типам Бьянки согласно значениям коэффициентов  $a, n^i$  (см. [1]). Отметим, что для модели типа



I группа  $G$  коммутативна, для модели типа VIII  $G = SO(2,1)$ , а для модели типа IX  $G = SO(3)$  (или  $SU(2)$ ). При отсутствии скоростей, т. е. если  $u^a = (1, 0, 0, 0)$ , однородные модели упрощаются. В частности, ряд интересных моделей (например, типов I, VIII и IX) приводится к диагональной форме, где матрица  $g_{\alpha\beta}(t)$  диагональна во все моменты времени  $t \geq 0$ ; возникает динамическая система в пространстве  $R^6$  вместо  $R^{12}$ .

## 2. КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ОДНОРОДНЫХ МОДЕЛЕЙ ВБЛИЗИ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТИ

Уравнение Эйнштейна (1), приведенное к динамической системе в пространстве  $(g_{\alpha\beta}, \dot{g}_{\alpha\beta})$ , точнее в физической области  $S$  с границей  $\Gamma$ , обладает некоторыми важными простыми свойствами. Рассмотрим величину  $g = \det |g_{\alpha\beta}|$ , определяющую элемент пространственного объема; из положительности энергии  $T_{00} \geq 0$  вытекает, что функция  $g(t)$  для однородных моделей всех типов может иметь не более одного максимума (только для типа IX, в других случаях максимума нет) и совсем не имеет минимумов (кроме  $g = 0$ ). Здесь предполагается  $\varepsilon \geq 0$  и  $p \geq 0$  (т. е.  $k \geq 0$ ).

В силу этого мы будем рассматривать динамическую систему Эйнштейна отдельно в стадии расширения ( $g > 0, \dot{g} > 0$ ) и стадии сжатия ( $g > 0, \dot{g} < 0$ ). В сущности, обеим стадиям отвечает одна и та же динамическая система, но с противоположно направленным временем. Эта система определена в физической области  $S$  с границей  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_\infty \cup \Gamma_\varepsilon$ ;  $\Gamma_0$  отвечает условию  $g = 0$  (особенность);  $\Gamma_\infty$  отвечает либо условию  $\dot{g} = 0$  при  $g \neq 0$  (максимум расширения), либо пределам различных величин при  $t \rightarrow \infty$  для бесконечного расширения, если  $\dot{g} > 0$  и максимума нет;  $\Gamma_\varepsilon$  отвечает поверхности нулевой плотности энергии  $\varepsilon = T_{00} = 0$ .

В области  $S$  функция  $g(t)$  является монотонной. Поэтому каждая траектория динамической системы Эйнштейна движется (при сжатии) к границе  $\Gamma_0$  и (при расширении) к границе  $\Gamma_\infty$ . Функция  $g(t)$  обращается в нуль в некоторый конечный момент  $t = t_0$ .

Пусть  $t_0 = 0$ ; динамическая система Эйнштейна не имеет особых (стационарных) точек внутри области  $S$ . Все ее особенности лежат на границе  $\Gamma$  (динамическая система, возможно, с заменой времени, продолжается на границу  $\Gamma$ ). Нас особенно интересуют ранние стадии эволюции, т. е. поведение системы около границы  $\Gamma_0 \subset \Gamma$ , где  $g = 0$  (около космологической особенности). Особенно интересны наиболее сложные модели VII и IX типов, содержащие как частные случаи изотропные модели Фридмана и как предельные случаи модели I и V типов. (Модели Фридмана являются частными случаями только для I, V, VII и IX типов.) Имеются следующие трудности: 1) физическая область  $S$  и ее граница  $\Gamma$  некомпактны, например, производные  $\dot{g}_{\alpha\beta}$  могут быть сколь угодно велики на произвольно ранних стадиях эволюции; 2) хотя динамическая система Эйнштейна после замены времени продолжается

на границу  $\Gamma$  из физической области  $S$ , но все ее особые точки на границе  $\Gamma$  сильно вырождены (все их собственные числа нули); система не имеет «очевидных» инвариантных многообразий внутри  $S$ , кроме подпространств фазового пространства, отвечающих моделям с большей симметрией.

Программа исследования такова: желательно построить «компактификацию» физической области  $S$ , т. е. пополнить ее такой новой границей  $\tilde{\Gamma}$ , которая была бы компактна и на которую система продолжалась бы и при этом имела невырожденные особые точки. После этого, изучая сепаратрисные переходы на границе, мы получим информацию о ранних стадиях эволюции для траекторий внутри области  $S$ , т. е. для отрезков траекторий, близких к границе  $\tilde{\Gamma}_0 \subset \tilde{\Gamma}$ , где  $g(t)$  мало. Построение границы и компактификация полезны также для изучения системы на поздних стадиях эволюции  $g(t) \rightarrow \infty$  (или  $g(t) \rightarrow g_{\max}$  для IX типа). Это оказывается более простой и менее интересной задачей. Эта программа качественного исследования осуществлена в цикле работ [2—8]. Мы опишем здесь исследование модели IX типа без скоростей материи ( $u^a = 1, 0, 0, 0$ ), изученной в работах [3—5].

В этом случае матрицу  $g_{\alpha\beta}(t)$  можно считать диагональной  $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} q_\alpha^2$ . Система (1) при  $p = ke$  и с временной координатой  $\eta$ , где  $d\eta = (q_1 q_2 q_3)^{-k} dt$  ( $t$  — синхронное время), приводится к гамильтоновой форме с гамильтонианом

$$H(p, q) = \frac{1}{4(q_1 q_2 q_3)^{1-k}} (P(p_\alpha q_\alpha) + P(q_\alpha^2)),$$

где

$$P(x_\alpha) = 2 \sum_{\alpha < \beta}^3 x_\alpha x_\beta - \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha^2, \quad p_\alpha = \frac{d}{dt}(q_\gamma q_\delta) \quad (\alpha \neq \gamma, \delta).$$

Гамильтониан  $H$  допускает масштабную группу

$$q_\alpha^2 \rightarrow \lambda q_\alpha^2, \quad p_\alpha q_\alpha \rightarrow \lambda p_\alpha q_\alpha, \quad H \rightarrow \lambda^{(1+3k)/2} H. \quad (3)$$

Плотность энергии имеет вид  $\varepsilon = H (q_1 q_2 q_3)^{-1-k}$ , поэтому система рассматривается в физической области  $S$ , где  $q_\alpha > 0$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  и  $H = A \geq 0$ .

Нам будет удобно пользоваться неканоническими координатами  $P_\alpha = p_\alpha q_\alpha$  и  $Q_\alpha = q_\alpha^2$ . Используя масштабную группу (3), мы будем изучать систему на фактор-пространстве  $\bar{S} = S/(\lambda)$  по масштабной группе, где она уже перестает быть гамильтоновой (заметим, что в моделях VII и других типов, где группа  $G$  разрешима, система Эйнштейна негамильтонова с самого начала, но это не препятствует качественному исследованию).

Введем системы локальных координат в области  $\bar{S}$ , указывая тем самым искомую границу  $\tilde{\Gamma}$  и области  $V_1$  и  $W_1$ :

$$y_2 = Q_2/Q_1, \quad y_3 = Q_3/Q_1, \quad u_1 = P_1/Q_1;$$

$$v_1 = (P_2 + P_3)/Q_1, \quad v_2 = (P_2 - P_3)/Q_1;$$

$$d\tau_1 = Q_1 (q_1 q_2 q_3)^{k-1} d\eta;$$

$$\bar{u}_1 = u_1/v_1, \quad \bar{v}_2 = v_2/v_1, \quad w = 1/v_1, \quad d\tau_2 = v_1 d\tau_1.$$

В области  $V_1$  мы имеем по определению координаты  $y_2 \geq 0$ ,  $y_3 \geq 0$ ,  $v_1 > 0$ ,  $u_1, v_2$  любые, удовлетворяющие неравенству

$$H_1 = (1 - k) (q_1 q_2 q_3)^{1-k} Q_1^{-2} H \geq 0.$$

В области  $W_1$  имеем координаты  $y_2 \geq 0$ ,  $y_3 \geq 0$ ,  $w \geq 0$ ,  $\bar{u}_1, \bar{v}_2$  любые, удовлетворяющие неравенству

$$H_2 = H_1/v_1^2 \geq 0.$$

Очевидно, область  $W_1$  содержит  $V_1$ .

Аналогично строятся области  $(W_2, V_2)$  и  $(W_3, V_3)$ , перестановкой индексов заменяем  $Q_1$  на  $Q_2$  и  $Q_3$  и т. д.

В координатах  $V_1, W_1$  физической области  $\bar{S}$  система имеет вид

$$d\bar{u}_1/d\tau_2 = (y_2 + y_3 - 1) w^2 - \bar{u}_1 w^2 [y_2(1 + y_3 - y_2) + y_3(1 + y_2 - y_3)] + (2\bar{u}_1 - 1) H_2;$$

$$d\bar{v}_2/d\tau_2 = w^2 [y_2(1 - y_2) - y_3(1 - y_3)] - v_2 w^2 [y_2(1 + y_3 - y_2) + y_3(1 + y_2 - y_3)] + 2\bar{v}_2 H_2;$$

$$dw/d\tau_2 = w \{ \bar{u}_1 - 1 - w^2 [y_2(1 + y_3 - y_2) + y_3(1 + y_2 - y_3)] + 2H_2 \};$$

$$dy_2/d\tau_2 = y_2(1 + \bar{v}_2 - 2\bar{u}_1); \quad dy_3/d\tau_2 = y_3(1 - \bar{v}_2 - 2\bar{u}_1);$$

$$dQ_1/d\tau_2 = Q_1(\bar{u}_1 - 1).$$

Оказывается, граница  $\tilde{\Gamma}$ , присоединяемая к области  $\bar{S}$ , в координатах областей  $W_1, W_2, W_3$  компактна (кроме трех исключительных точек, обозначаемых через  $T_\alpha^0$ ). При этом система имеет множество особых точек вида (рис. 1):

1)  $T_\alpha^u$  — однопараметрическое семейство в  $\tilde{\Gamma}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ,  $0 < u < \infty$ ;

2)  $\Phi_{Л.Х}^y$  — двухпараметрическое семейство — треугольник в  $\tilde{\Gamma}$  с гранями  $\Phi_\alpha^0$  и вершинами  $\Phi_\alpha^{00}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ;

3)  $(\psi, \alpha)$  — три окружности,  $\alpha = 1, 2, 3$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ;

4)  $\overline{AE}_\alpha$  и  $\overline{BD}_\alpha$  — вырожденные отрезки;

5)  $N_\alpha$  — три изолированные особые точки.

Все особые точки, кроме  $T_\alpha^u$ , лежат в области «сильной космологической особенности»  $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ . В точках  $T_\alpha^u$  имеем  $q_\alpha = 0$ ,  $q_\gamma = q_\beta \neq 0$ . Граница  $\tilde{\Gamma}$  области  $\bar{S}$  имеет грани, ребра и т. д., причем все они являются инвариантными многообразиями динамической системы. Особые точки  $T_\alpha^u$ ,  $\Phi_{Л.Х}^y$  и  $N_\alpha$  имеют сепаратрисы, приходящие изнутри области  $\bar{S}$ , — это степенные асимптотики около особенности.

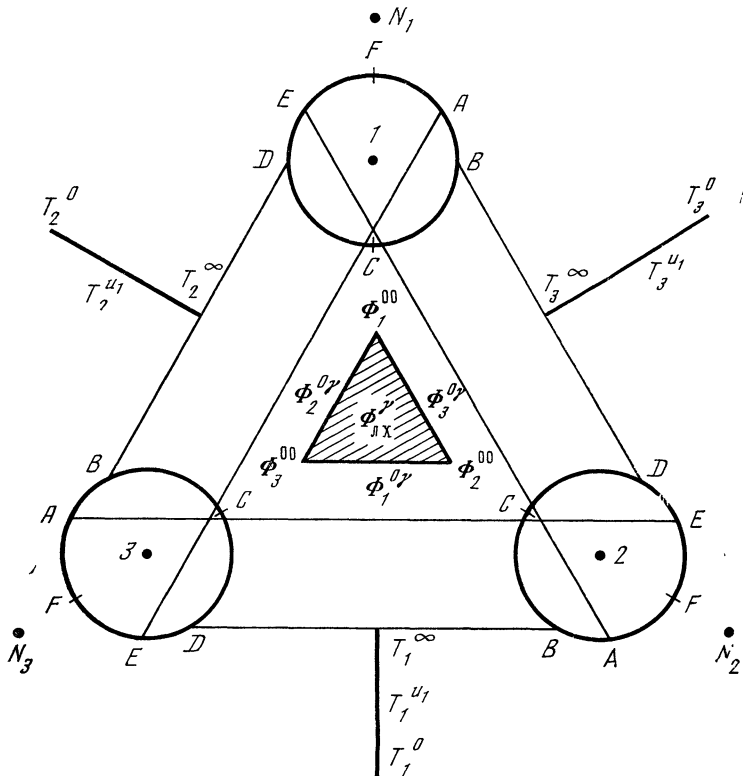


Рис. 1. Особые точки динамической системы для модели IX типа после учета масштабной инвариантности и пополнения физической области границей

$T_\alpha^u$  — асимптотика Тауба, дающая «фиктивную особенность»:

$$q_\alpha^2 = g_{\alpha\alpha} \cong C_1 t^2, \quad q_\beta = q_\gamma \sim \text{const};$$

$\Phi_{\text{Л.Х}}^\gamma$  — асимптотика, найденная Лифшицем и Халатниковым, называемая «квазиизотропной» типа Фридмана:

$$q_\alpha^2 = g_{\alpha\alpha} \cong C_\alpha t^{4/s(1+k)}, \quad C_\alpha = \text{const};$$

$N_\alpha$ :

$$q_\alpha^2 = g_{\alpha\alpha} \cong C_\alpha t^{(1-k)/(1+k)};$$

$$q_\beta^2 = g_{\beta\beta} \cong C_\beta t^{(3+k)/2(1+k)}, \quad q_\gamma^2 = g_{\gamma\gamma} \cong C_\gamma t^{(3+k)/2(1+k)}.$$

Остальные особые точки лежат в углах границы  $\tilde{\Gamma}$  и не имеют сепаратрис, приходящих изнутри  $\tilde{S}$ . Других степенных асимптотик система не имеет. Сепаратрисы (в сторону сжатия) из особых

точек идут в другие особые точки. Переходы вдоль сепаратрис образуют диаграмму (таблица). В сепаратрисной диаграмме заполненный квадрат означает сепаратрису, идущую из множества особых точек в верхней строке в множество особых точек в левом столбце, цифра в квадрате указывает размерность этой сепаратрисы, верхние индексы  $T$ ,  $T^2$  и  $\theta$  — сепаратрисные отображения на дугах  $(\psi, \alpha)$ , имеющие вид

$$T(\bar{u}_1, \bar{v}_2) = \left( \frac{1 + \bar{v}_2}{1 - \bar{v}_2 + 2\bar{u}_1}, \frac{1 - \bar{v}_2 - 2\bar{u}_1}{1 - \bar{v}_2 + 2\bar{u}_1} \right), \quad \theta(\bar{u}_1, \bar{v}_2) = (2 - \bar{u}_1, \bar{v}_2),$$

$$\bar{u}_1 - 1 = \cos \psi, \quad \bar{v}_2 = \sin \psi.$$

Из сепаратрисной диаграммы можно сделать следующие выводы в сторону сжатия и расширения Вселенной:

1. В сторону сжатия,  $\dot{g} < 0$ . Три окружности  $(\psi, \alpha)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  образуют замкнутую систему отображений относительно сепаратрисных переходов. Имеем отображения дуг (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} (FAB, \alpha) &\xrightarrow{T} (BCD, \alpha + 1), & (DEF, \alpha) &\xrightarrow{T^2} (BCD, \alpha + 2), \\ (BCD, \alpha) &\xrightarrow{\theta} (DEFAB, \alpha). \end{aligned}$$

Рассмотрим полуокружность  $DEFAB$  с отображением

$$K(\psi, \alpha) = \begin{cases} (\theta T \psi, \alpha + 1), & \psi \text{ в дуге } FB, \\ (\theta T^2 \psi, \alpha + 2), & \psi \text{ в дуге } DE. \end{cases}$$

Определим функцию  $u(\psi)$  ( $\bar{u}_1 - 1 = \cos \psi$ ,  $\bar{v}_2 = \sin \psi$ ):

$$u(\psi) = \frac{\bar{v}_2 + 3\bar{u}_1}{1 + \bar{v}_2 - 2\bar{u}_1} \quad (\text{в дуге } FB),$$

$$u(\psi) = \frac{-\bar{v}_2 + 3\bar{u}_1}{1 - \bar{v}_2 - 2\bar{u}_1} \quad (\text{в дуге } DE) \quad (0 < u(\psi) < \infty).$$

Мы получим

$$u(K(\psi)) = u(\psi) - 1, \quad u(\psi) > 1$$

$$u(K(\psi)) = 1/u(\psi) - 1, \quad u(\psi) < 1.$$

Таким образом, сепаратрисная диаграмма содержит известный режим Белинского — Лифшица — Халатникова (БЛХ) [1], открытый ими после многолетних поисков методом шивки асимптотик решений типа Казнера в разных областях. Можно установить свойство «структурной устойчивости», или «грубости», этого режима в смысле Андронова, проверив критерий Аносова (хотя и не точно). Сепаратрисный скелет этого режима является, как говорят, аттрактором. Дополнительно к БЛХ здесь получается, что почти все решения (не только открытая область начальных данных) в модели IX типа имеют асимптотику БЛХ около особенности. Найдены также все степенные асимптотики. Из них одна (типа  $N$ ) ранее не была известна.

|                          | S               | $T^0_\alpha$         | $\Phi_{J.I.X}^\gamma$ | $T^u_\alpha$     | $N_\alpha$       | $\Phi_{\alpha}^{0\gamma}$ | $\Phi_{\alpha}^{00}$ | $\overline{AB}_\alpha$ | $\overline{BC}_\alpha$ | $C_\alpha$     | $\overline{CD}_\alpha$ | $\overline{DE}_\alpha$ | $\overline{EF}_\alpha$ | $F_\alpha$       | $\overline{FA}_\alpha$ | $\overline{AE}_\alpha$ | $\overline{BD}_\alpha$ |
|--------------------------|-----------------|----------------------|-----------------------|------------------|------------------|---------------------------|----------------------|------------------------|------------------------|----------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $\Phi_{J.I.X}^\gamma$    | 3               |                      |                       |                  |                  |                           |                      |                        |                        |                |                        |                        |                        |                  |                        |                        |                        |
| $T^u_\beta$              | $\beta=1, 2, 3$ | $\beta=2$            |                       |                  |                  |                           |                      |                        |                        |                |                        |                        |                        |                  |                        |                        |                        |
| $N_\beta$                | $\beta=1, 2, 3$ | $\beta=\alpha \pm 1$ |                       |                  |                  |                           |                      |                        |                        |                |                        |                        |                        |                  |                        |                        |                        |
| $\Phi_{\beta}^{0\gamma}$ |                 | $\beta=2$            |                       |                  |                  |                           |                      |                        |                        |                |                        |                        |                        |                  |                        |                        |                        |
| $\Phi_{\beta}^{00}$      |                 |                      |                       |                  | $\beta=1$        |                           |                      |                        |                        |                |                        |                        |                        |                  |                        |                        |                        |
| $\overline{AB}_\beta$    |                 | $\beta=\alpha-1$     |                       | $\beta=\alpha-1$ | $\beta=\alpha-1$ | $\beta=\alpha-1$          | $\beta=\alpha$       |                        | $\beta=\alpha$         |                |                        |                        | $\beta=\alpha+1$       |                  |                        |                        |                        |
| $\overline{BC}_\beta$    |                 |                      | $\beta=1, 2, 3$       |                  |                  |                           |                      |                        |                        |                |                        | $\beta=\alpha-1$       |                        | $\beta=\alpha+1$ |                        |                        |                        |
| $C_\beta$                |                 |                      | $\beta=1, 2, 3$       |                  |                  |                           |                      |                        |                        |                |                        |                        |                        |                  |                        |                        | $\beta=\alpha$         |
| $\overline{CD}_\beta$    |                 |                      |                       |                  |                  |                           |                      | $\beta=\alpha+1$       | $\beta=\alpha+1$       |                |                        |                        | $\beta=\alpha-1$       |                  |                        |                        |                        |
| $\overline{DE}_\beta$    |                 | $\beta=\alpha+1$     |                       | $\beta=\alpha+1$ | $\beta=\alpha$   |                           |                      |                        |                        |                | $\beta=\alpha$         |                        |                        |                  | $\beta=\alpha-1$       |                        |                        |
| $\overline{EF}_\beta$    |                 |                      |                       |                  | $\beta=\alpha$   |                           |                      |                        |                        |                | $\beta=\alpha$         |                        |                        |                  |                        |                        |                        |
| $F_\beta$                |                 |                      |                       |                  | $\beta=\alpha$   |                           |                      |                        |                        | $\beta=\alpha$ |                        |                        |                        |                  |                        |                        |                        |
| $\overline{FA}_\beta$    |                 |                      |                       |                  | $\beta=\alpha$   |                           |                      |                        | $\beta=\alpha$         |                |                        |                        |                        |                  |                        |                        |                        |
| $\overline{AE}_\beta$    |                 | $\beta=\alpha$       |                       | $\beta=\alpha$   |                  |                           |                      |                        |                        |                |                        |                        |                        |                  |                        |                        |                        |
| $\overline{BD}_\beta$    |                 |                      | $\beta=1, 2, 3$       |                  |                  |                           |                      |                        |                        |                |                        |                        |                        |                  |                        |                        | $\beta=\alpha$         |

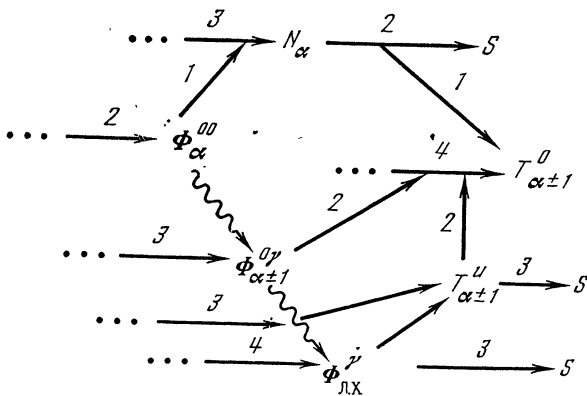


Рис. 2. Пути на сепаратрисной диаграмме в сторону расширения перед уходом от особенности

2. В сторону расширения,  $\dot{g} > 0$ . Сепаратрисные переходы в сторону расширения показаны на рис. 2. Здесь многоточие означает особые точки  $(\psi, \alpha)$ , стрелка — сепаратрису, цифра над ней — ее размерность, а волнистая стрелка — переход по непрерывности, если одно множество особых точек есть часть другого. Одновременно с авторами сепаратрисный путь расширения

$$\dots \rightarrow \Phi_\alpha^{00} \rightarrow N_\alpha \rightarrow T_{\alpha\pm 1}^0 \rightarrow S$$

был обнаружен Новиковым, Дорошкевичем, Лукашем методом сшивок различных асимптотик [9].

Режим  $T_\alpha^0$  таков, что размер одной оси много меньше двух других, но динамика расширения такая же, как и для  $\Phi_{\text{ЛХ}}^y$  (квазиизотропная). Мы получаем важный вывод: при расширении с вероятностью 1 система переходит в квазиизотропный режим, но не режим Фридмана. Их наблюдаемые различия незначительны и подлежат дальнейшему изучению.

Более детальное описание можно найти в [3, 5]. Исследование других моделей содержится в работах [6]. Наибольший интерес представляет окончательное исследование моделей типов IX [6] и VII [7, 8] при движении вещества.

Отметим, что дальнейшее развитие и применение подобных методов было проведено Богоявленским в ряде других задач: исследование возмущений известной цепочки Тода [10], исследование некоторых газодинамических моделей [11], исследование общих систем гидродинамического типа [12], сферически-симметричные автомодельные решения в общей теории относительности [13] и, наконец, в классической теории гравитирующего газа. Последняя задача освещена в Приложении.

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ АДИАБАТИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ  
САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА В ЗВЕЗДАХ<sup>1</sup>

Автомодельные сферически-симметричные адиабатические движения идеального самогравитирующего газа впервые были рассмотрены в работах [14, 15] в качестве модели взрыва сверхновых звезд (полную библиографию см. в [16]). При этом в работе [15] были получены все первые интегралы системы уравнений газовой динамики для автомодельных решений, найдены точные решения этой системы, вычислены некоторые асимптотики решений и проведено численное исследование системы при некоторых значениях параметров, а в работе [14] использовались только численные методы. В работе [15] с помощью найденных интегралов рассматриваемая система уравнений была сведена к автономной системе трех дифференциальных уравнений на функции автомодельной переменной  $\ln \lambda$ , где  $\lambda = r (\beta A G t^2)^{-1/w}$  ( $r$  — радиальная координата,  $t$  — время,  $G$  — постоянная тяготения,  $A$  — константа с размерностью  $\text{г} \cdot \text{см}^{(w-3)}$ ,  $\beta$  — безразмерная константа). Параметрами задачи являются показатели адиабаты  $\gamma > 1$  и  $1 < w < 3$ .

Целью нашей работы является: 1) исследование решений задачи о взрыве звезды (для не рассмотренных в [14, 15] значений параметров), 2) исследование режимов автомодельной аккреции самогравитирующего газа на центр, 3) изучение автомодельных решений со сходящимися ударными волнами.

В работе используются следующие методы: 1) пополнение фазового пространства системы границей на бесконечности, 2) полное разрешение вырожденных особых точек системы (с помощью специальных преобразований координат, называемых в алгебраической геометрии  $\sigma$ -процессами), исследование невырожденных особых точек и их сепаратрис, 3) аппроксимация траекторий системы последовательностями сепаратрис особых точек.

В нашей недавней работе [13] с помощью этих же методов было проведено полное исследование описанных выше трех задач в классе автомодельных решений в общей теории относительности. Отметим также одно чисто математическое следствие данной работы: найден класс трехмерных динамических систем (к нему принадлежит и изучаемая система), в которых некоторые особые точки разрешаются бесконечной последовательностью  $\sigma$ -процессов (так как преобразования систем из этого класса с помощью  $\sigma$ -процессов в некотором смысле зацикливаются).

Основные физические результаты работы состоят в следующем.

1. При  $\gamma < 4/3$ ,  $w > 5/2$  все решения задачи о взрыве звезды для чисел Маха ударной волны  $M \sim 1$  при  $\lambda \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ )

<sup>1</sup> Раздел написан О. И. Богдаевым.



стремятся к равновесному состоянию

$$\begin{aligned} \rho &= Ar^{-w}, & M &= 4\pi Ar^{3-w}/(3-w); \\ p &= 2\pi A^2 Gr^{2(1-w)}/(w-1)(3-w), & v &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

(обозначения являются общепринятыми)! Таким образом, после взрыва звезда вновь возвращается к состоянию, подобному исходному. Эти решения могут быть использованы для моделирования повторных взрывов звезд. Отметим, что для этих решений при  $\gamma < 4/[3 + (2w - 5)^2/8(w - 1)]$  скорость газа при  $\lambda \rightarrow 0$  совершает бесконечное число колебаний около нуля, поэтому приближение газа к состоянию равновесия имеет колебательный характер. Подобный режим движения газа после прохождения ударной волны был ранее найден в аналогичной задаче в общей теории относительности [13].

Автомодельные решения с образованием полости внутри газа при  $w = 5/2$  подробно изучались в [15]. Исследование системы в общем случае показывает, что при  $\gamma < 2(w - 1)/3$  решений с образованием полости не существует, в частности, в этой области параметров их нет и в задаче о взрыве звезды.

2. Автомодельные решения, описывающие аккрецию газа на центр, могут иметь при  $\lambda \rightarrow 0$  только одну из следующих двух устойчивых асимптотик. При  $4/3 < \gamma < 5/3$

$$\begin{aligned} M &\sim t^{2(3-w)/w}, & \rho &\sim r^{-1/(\gamma-1)} t^{2(-1+1/w(\gamma-1))}; \\ p &\sim r^{-\gamma/(\gamma-1)} t^{-2[2-(3\gamma-2)/w(\gamma-1)]}, & -v &\sim r^{(3-2\gamma)/(\gamma-1)} t^{-1-2(4-3\gamma)/w(\gamma-1)}. \end{aligned} \quad (5)$$

При  $1 < \gamma < 5/3$

$$\begin{aligned} M &\sim t^{2(3-w)/w}, & \rho &\sim r^{-3/2} t^{(3-2w)/w}; \\ p &\sim r^{-3\gamma/2} t^{-4+2(2+3\gamma/2)/w}, & -v &\sim r^{-1/2} t^{(3-w)w}. \end{aligned} \quad (6)$$

В этих асимптотиках в центре симметрии при  $t \neq 0$  возникает точечная масса, растущая со временем, поэтому (5) и (6) описывают в классической теории аккрецию газа на «черную дыру». В асимптотиках (5) и (6) давление, плотность и температура газа в центре бесконечны, газ падает на центр за конечное время, при этом в (5) число Маха течения газа  $M \rightarrow 0$ , а в (6)  $M \rightarrow \infty$  при  $\lambda \rightarrow 0$ .

При  $\gamma = 5/3$  существует устойчивая асимптотика, аналогичная (5) и (6), в которой число Маха течения газа стремится к произвольной константе. При  $\gamma = 4/3$  вместо (5) будет другая устойчивая асимптотика аккреции, в которой газ падает на центр за бесконечное время и точечная масса не образуется. При  $\gamma > 5/3$  автомодельной аккреции не существует.

При  $1 < \gamma < 5/3$  имеются решения без ударных волн, определенные при всех  $r, t \geq 0$  и обладающие при  $r \rightarrow 0$  асимптотикой (6), а при  $t \rightarrow 0$  — асимптотикой, в которой плотность газа и масса изменяются как в равновесном состоянии (4), а давление

и скорость газа имеют вид

$$p = C_1 r^{2(1-w)}, \quad v = C_2 r^{1-w/2},$$

причем знак размерной константы  $C_2$  может быть любым, а  $C_1 > 0$ .

Исследование системы показывает, что при  $4/3 < \gamma < 5/3$ ,  $w > 2$  все автомодельные решения, продолжающиеся до центра симметрии, кроме некоторой двумерной сепаратрисы для разлета газа от центра, описывают автомодельную аккрецию (5) или (6).

3. Автомодельные решения со сходящейся ударной волной определены при  $t \leq 0$ ,  $r \geq 0$  (см. [17]). Следующее точное решение при  $w = (2\gamma - 1)/2$  ( $\gamma - 1$ ) удовлетворяет всем условиям сшивки на ударной волне. При  $0 \leq \lambda < \lambda_1$

$$\begin{aligned} M &= \frac{r^3}{2Gt^2} V^2, & v &= \frac{r}{(-t)} V, \\ \rho &= \frac{(3-w)V^2}{Gt^2 4\pi(2+wV)}, & P &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где функция  $V(\lambda) > 0$  определена уравнением

$$V^{-1} (1 + 3V/2)^{1-w/3} = \lambda^{w/2}, \quad (8)$$

а параметр  $\lambda_1$  вычисляется из (8) при  $V = 4/w$  ( $\gamma - 1$ ).

При  $\lambda > \lambda_1$  решение является равновесным состоянием (4).

Решение (7), (8) в области перед ударной волной описывает поток пылевидной материи, идущий от центра. При  $r \rightarrow 0$  это решение имеет асимптотику (6) (после замены  $t \rightarrow -t$ ,  $v \rightarrow -v$ ) — аналог «белой дыры» в классической теории. При всех  $\gamma$ ,  $w$  существуют решения, аналогичные (7), (8), в которых перед ударной волной давление  $p > 0$  (если  $p = 0$ , то при любых  $\gamma$ ,  $w$  решение можно получить в аналитическом виде). Эти решения указывают режим сжатия «белой дыры» ударной волной, при котором газ переходит в состояние равновесия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М. — УФН, 1970, 102, с. 463.
2. Новиков С. П. — ЖЭТФ, 1972, 62, с. 1979.
3. Богоявленский О. И., Новиков С. П. — ЖЭТФ, 1973, 64, с. 1475.
4. Богоявленский О. И. — УМН, 1973, 28, с. 231.
5. Богоявленский О. И., Новиков С. П. — Труды семин. им. И. Г. Петровского, 1975, 1, с. 7.
6. Богоявленский О. И. — Труды семин. им. И. Г. Петровского, 1976, 2, с. 67; ЖЭТФ, 1976, 70, с. 361; ТМФ, 1976, 27, с. 184.
7. Пересецкий А. А. — Мат. заметки, 1977, 21, с. 71.
8. Пересецкий А. А. — УМН, 1976, 31, с. 251.
9. Дорошкевич А. Г., Лукаш В. Н., Новиков И. Д. — ЖЭТФ, 1973, 64, с. 1457.
10. Bogoyavlensky O. I. — Commun Math. Phys., 1976, 51, p. 201.
11. Богоявленский О. И. — Прикл. мат. и мех., 1976, 40, с. 270; Письма в «Астрон. журн.», 1975, с. 1922.

12. Богоявленский О. И.— Докл. АН СССР, 1976, 232, с. 1289.
13. Богоявленский О. И.— ЖЭТФ, 1977, 73, с. 1201.
14. Carrus P., Fox P., Gaas F., Korol Z.— Astrophys. J., 1951, 113, p. 496.
15. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1954.
16. Дибай Э. А., Каплан С. А. Размерности и подобие астрофизических величин. М., «Наука», 1976.
17. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Гостехиздат, 1963.

## О СТРАННЫХ АТТРАКТОРАХ В ФИЗИКЕ

А. С. ПИКОВСКИЙ, М. И. РАБИНОВИЧ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Будучи открыты сравнительно недавно, странные аттракторы (СА) стали в последние два-три года предметом, вызывающим чрезвычайный интерес у физиков, химиков, радиотехников и специалистов по многим другим естественным и социальным наукам. Дело в том, что СА — это математический образ стохастических автоколебаний в конечномерных динамических системах. Под стохастическими (хаотическими) автоколебаниями мы будем понимать (по аналогии с данным Андроновым определением периодических автоколебаний [1]) установившиеся случайные процессы в неконсервативных динамических системах, поддерживаемые за счет регулярных (статических либо периодических) источников.

Сам термин «странный аттрактор» (Strange attractor) впервые появился в работе Рюэлля и Такенса [2], которые назвали таким образом притягивающие множества в фазовом пространстве, не являющиеся многообразиями. Сейчас, однако, термин СА связывается не столько с топологией притягивающего множества, сколько со случайностью поведения динамической системы на аттракторе [3, 4]. Мы не будем здесь стремиться придерживаться вполне строгих определений (см., например, [3]), считая, что всякий раз, когда в динамической системе устанавливается непериодический и неквазипериодический режим, траектория попадает на СА.

Самым популярным сейчас примером движения на СА является установившийся режим непериодических пульсаций, обнаруженный Эдвардом Лоренцем в сравнительно простой модели

$$\dot{X} = \sigma Y - \sigma X, \quad \dot{Y} = rX - Y - XZ, \quad \dot{Z} = -bZ + XY, \quad (1)$$

приближенно описывающей конвективные движения в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости [5, 6]. Система (1) оказалась весьма интересной как для математиков, так и для физиков. Например, Хакен и Грэхем свели к (1) уравнения одномодовой генерации твердотельного лазера [7], а Юдович показал, что (1)

можно интерпретировать как уравнения нелинейного осциллятора, частота которого инерционным образом зависит от энергии колебаний (см. также работу Шмицу, Мориока [8]).

Следует отметить, что интерес к модели (1) возродился лишь через 10 лет после опубликования работы [5]. Это, по-видимому, объясняется тем, что специалистам по теории обыкновенных дифференциальных уравнений никаких других аттракторов, кроме состояния равновесия и предельных циклов (объектов, характерных для систем 2-го порядка), известно не было. За последние же 15 лет благодаря усилиям Смейла, Вильямса, Аносова, Синая и других математиков выяснилось качественное отличие многомерных систем от двумерных. В частности, это отличие заключается в том, что многомерные системы в целых областях в пространстве параметров (более строго — в пространстве систем) могут характеризоваться стохастическим поведением.

Когда же понимание того обстоятельства, что стохастические движения в многомерных динамических системах отнюдь не патология и распространены столь же широко, как и предельные циклы, вышло за пределы узкого круга математиков, СА стали открываться один за другим. В многочисленных работах последних лет обнаружено много новых СА, имеющих отношение к различным физическим проблемам. Появились также надежды на то, что с помощью СА удастся описать турбулентность в распределенных (т. е. бесконечномерных) системах. Связь СА с гидродинамической турбулентностью обсуждается в недавно вышедших обзорах [9, 10].

В данной работе мы обсудим СА, возникающие в ряде физических ситуаций. Некоторое внимание будет уделено также их математической интерпретации.

## 2. ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Представления о стохастичности динамических систем возникли много раньше появления первого СА. Было обнаружено, что хаотические движения, правда, не обязательно притягивающие<sup>1</sup>, возможны уже в системах третьего порядка, и в их возникновении важную роль играют гомоклинические структуры [12, 13]. Под гомоклинической структурой мы будем понимать окрестность гомоклинической траектории, возникающей в результате пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий (сепаратрис) седловых циклов или состояний равновесия. В системах с одной степенью свободы (фазовое пространство — плоскость) сепаратрисы одномерны и гомоклиническая траектория есть просто петля — выходящая из седла сепаратриса возвращается в него же.

<sup>1</sup> Заметим, что если не интересоваться процессами установления, то свойства стохастического движения в автоколебательной и консервативной системах могут оказаться идентичными, аналогично тому, как предельный цикл идентичен одной из замкнутых траекторий консервативной системы [11].

Такая гомоклиническая траектория исчезает при малом возмущении, т. е. не груба; примером служит уравнение

$$\ddot{u} - u + u^2 = 0, \quad (2)$$

фазовый портрет которого приведен на рис. 1. В трехмерном фазовом пространстве сепаратрисы периодического движения уже двумерны и гомоклиническая траектория представляет собой линию грубого пересечения двух поверхностей. Описание возникающей при этом гомоклинической структуры продемонстрируем на конкретных физических примерах.

1. Первый пример — это нелинейный осциллятор вида (2), на который действует внешняя сила

$$\ddot{u} - u + u^2 = \varepsilon \cos t. \quad (3)$$

Фазовое пространство этого уравнения трехмерно. Совпадавшие при  $\varepsilon = 0$  устойчивая и неустойчивая сепаратрисные поверхности при  $\varepsilon \neq 0$  уже различаются, и при их пересечении образуется грубая гомоклиническая траектория (рис. 2). Для исследования поведения траектории в ее окрестности удобно перейти к рассмотрению отображения, порождаемого траекториями за период  $T = 2\pi$ . Оно имеет вид, представленный на рис. 3. Глядя на этот рисунок, можно понять, почему открывший гомоклиническую структуру Пуанкаре писал: «...пересечения образуют нечто вроде решетки, или ткани, или сетки с бесконечно тесными петлями; ни одна из двух кривых никогда не должна сама себя пересекать, но она должна изгибаться столь сложным образом, чтобы пересечь бесконечное число раз все петли сети. Приходится поражаться сложности этой фигуры, которую даже не пытаюсь начертить. Ничто не может дать нам лучшее представление о сложности проблемы трех тел и всех проблем динамики, где нет голоморфного интеграла и ряды Болина расходятся» [14].

Лишь сравнительно недавно было дано полное описание траекторий, лежащих в окрестности гомоклинической траектории [12, 15, 16]. Это описание символическое. Каждой траектории гомоклинической структуры ставится в соответствие траектория графа (рис. 4), т. е. бесконечная в обе стороны последовательность нулей и единиц. Нуль означает, что траектория проходит вблизи периодического движения, единица — что она делает оборот вблизи гомоклинической траектории. Основной гомоклинической траектории соответствует последовательность (...0001000...), другим гомоклиническим траекториям — последовательности, у которых слева и справа стоят нули, а в середине сколь угодно сложная последовательность из нулей и единиц; периодическим траекториям отвечают периодические последовательности.

Решения, соответствующие гомоклинической структуре, можно непосредственно наблюдать в эксперименте, если события будут разворачиваться не только во времени, но и в пространстве.

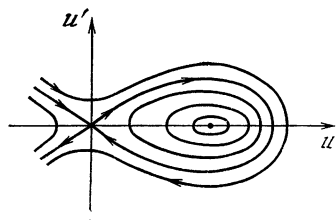


Рис. 1. Фазовая плоскость уравнения (2)

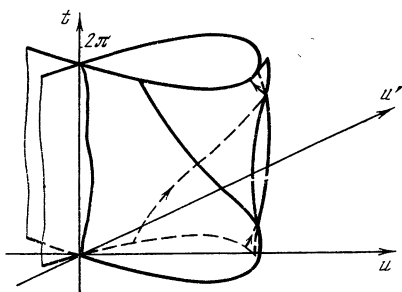


Рис. 2. Пересечение сепаратрисных поверхностей, приводящее к появлению грубых гомоклинических траекторий

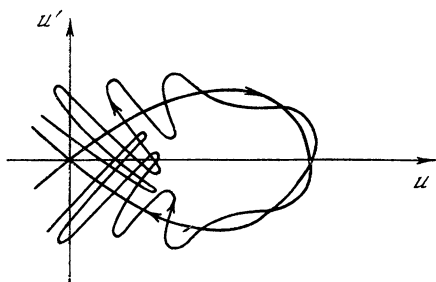


Рис. 3. Отображение, порождаемое траекториями системы (3) за период (получается из рис. 2, если продолжить изображенные на нем сепаратрисные поверхности)

Такую замену  $t$  на  $\xi = x - t$  реализуют стационарные волны, распространяющиеся с единичной скоростью в нелинейной среде. Если среда описывается известным уравнением КДВ, то для стационарных волн получается уравнение (2); негрубая гомоклиническая траектория описывает уединенную волну — солитон [17]. Пусть теперь волны в нелинейной среде связаны с заданной синусоидальной волной, тогда получим

$$u_t + 2uu_x + u_{xxx} = \varepsilon \sin(t - x). \quad (4)$$

Для стационарных волн, синхронных с синусоидой, получается уравнение (3) (см., например, [18, уравнение (6.14)]).

Локализованным стационарным волнам соответствуют различные гомоклинические траектории — последовательности, у которых слева и справа нули, а в середине некоторые символы — единицы. Такие волны можно рассматривать как «случайный» набор солитонов, они могут реализоваться в безграничной среде. Экспериментально обычно исследуются ограниченные системы — резонаторы. В них стационарные волны должны быть периодическими, что соответствует разнообразным конечным последовательностям из нулей и единиц — периодическим траекториям графа рис. 4. Такие волны наблюдались в экспериментах [19, 20] (рис. 5).

2. Весьма важно, что обсуждавшаяся картина сложных движений по существу не меняется при учете затухания. Рассмотрим, например, маятник, на который действует периодическая сила

$$m\ddot{\phi} + g\dot{\phi} + l \sin \phi = I_a + I_b \sin \omega t. \quad (5)$$

Это же уравнение описывает точечный джозефсоновский контакт, через который пропускается ток  $I_a + I_b \sin \omega t$  [21]. Здесь  $\phi$  — разность фаз макроскопической волновой функции по обе

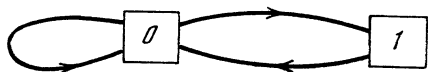


Рис. 4. Граф, отвечающий разрешенным последовательностям нулей и единиц

стороны контакта, связанная с напряжением  $V$  на нем:  $V = \hbar\dot{\phi}/2e$ ,  $m = \hbar C/2e$ ,  $g = \hbar G/2e$ , где  $C$  и  $G$  — соответственно емкость и проводимость контакта,  $l = I_0$  — критический ток. Определяющая макроскопические свойства контакта вольт-амперная характеристика выражает зависимость среднего во времени напряжения  $\langle V \rangle$  от постоянной составляющей тока  $I_a$ . В автономном случае (5) имеет лишь два притягивающих режима — статический с  $V = 0$  и периодический, для которого  $\langle V \rangle \sim \langle \dot{\phi} \rangle \neq 0$ . Переход от одного режима к другому с изменением  $I_a$  характеризуется гистерезисом. В неавтономном случае эти два режима разделены гомоклинической структурой, что приводит к непредсказуемости положения скачка на вольт-амперной характеристике. Эта случайность перехода наблюдалась при повторении эксперимента с одинаковыми начальными условиями [21].

Гомоклинические структуры имеют прямое отношение к СА. Например, при изменении параметра в системе Лоренца (1) гомоклиническая структура непосредственно предшествует возникновению СА [4]. Возможны ли СА, представляющие собой притягивающую гомоклиническую структуру, сейчас сказать трудно.

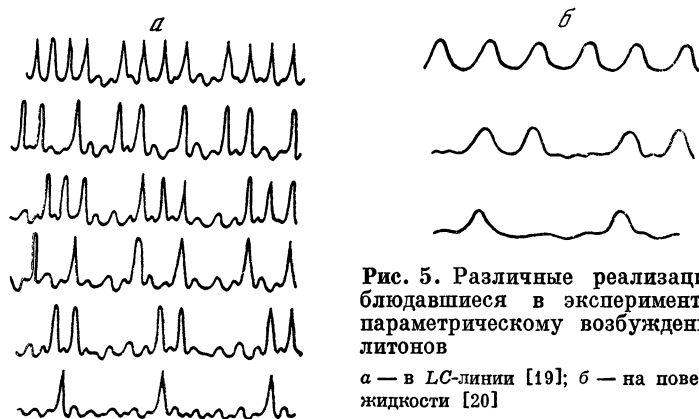


Рис. 5. Различные реализации, наблюдавшиеся в экспериментах по параметрическому возбуждению солитонов

$a$  — в LC-линии [19];  $b$  — на поверхности жидкости [20]

### 3. ПРИМЕРЫ СТРАННЫХ АТТРАКТОРОВ

В этом разделе мы приведем ряд примеров притягивающей стохастичности, пока без математического обсуждения.

1. Одной из самых простых систем, демонстрирующих хаотическое поведение, является система с дискретным временем, переходящая из состояния  $x_i$  в состояние  $x_{i+1}$  по закону

$$x_{i+1} = 1 - ax_i^2. \quad (6)$$

Системы с дискретным временем — отображения — во многом аналогичны системам с непрерывным временем — обыкновенным дифференциальным уравнениям. Все явления, встречающиеся в отображениях, могут встретиться и в системах с непрерывным временем и наоборот (только размерности соответствующих систем должны быть разными). У отображений, например, могут быть как простые аттракторы (устойчивые неподвижные и периодические точки), так и странные.

Относительно невзаимно-однозначного отображения отрезка в себя (6) известно, что при каждом  $a$  оно имеет не более одной притягивающей периодической точки, в то время как поведение других точек может быть стохастическим [22].

У системы (6) состояние в момент времени  $i + 1$  непосредственно связано лишь с предыдущим состоянием. Если же учитывать хотя бы короткую предысторию, то получим уравнение  $x_{i+1} = 1 - ax_i^2 + bx_{i-1}$ , которое удобно записать в виде системы [23]

$$x_{i+1} = y_i + 1 - ax_i^2, \quad y_{i+1} = bx_i. \quad (7)$$

Уравнения (7) определяют двумерное взаимно-однозначное отображение плоскости  $(x, y)$  в себя. Численный анализ (7), проведенный Хеноном при  $b = 0,3$ ,  $a = 1,4$ , убедительно продемонстрировал существование в этой системе СА — притягивающей области, имеющей сложную (канторовскую, см. [3]) структуру, показанную на рис. 6. Системы типа (6) и (7) довольно часто встречаются, например, в биологических и экологических задачах. Дискретность времени в таких задачах связана с сезонностью или сменой поколений [24].

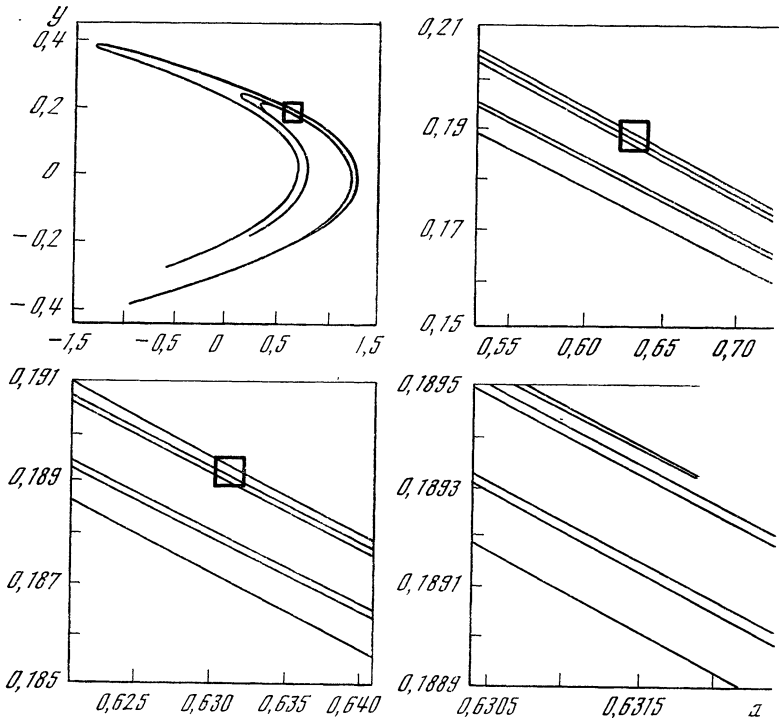
2. Системы с дискретным временем удобны для изучения, но при решении конкретных задач чаще приходится иметь дело с СА в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Одна из таких систем относится к химической кинетике и была предложена Ресслером [25]:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= k_1 + k_2a - a(k_3b + k_4c)/(a + K), \\ \dot{b} &= k_5a - k_6b, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\dot{c} = k_7a - k_8c - k_9c^2 - k_{10}c/(c + K') \quad (\mu \ll 1).$$

Здесь переменные  $a$ ,  $b$  и  $c$  отвечают концентрациям реагентов, описываемых осциллятором Тьюринга и переключателем Эден-





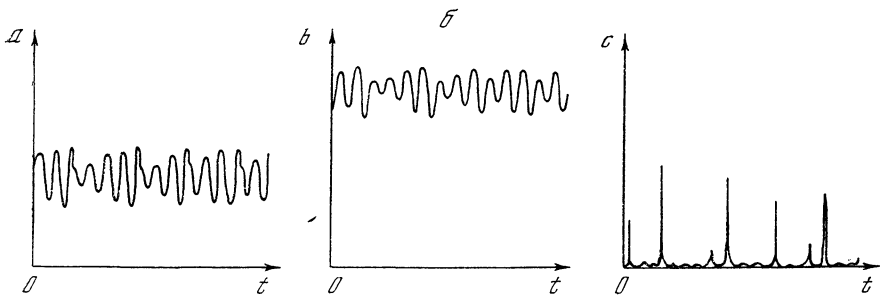
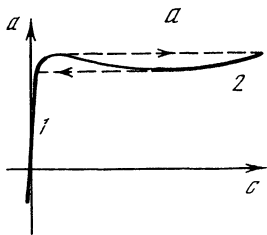
**Рис. 6.** Странный аттрактор в системе (7) [23]

Последовательное увеличение выделенных квадратиков показывает канторовскую структуру

штейна соответственно (см., например, [26]),  $k_i$  — коэффициенты  $K$  и  $K'$  — малые постоянные (с их помощью аппроксимируется ступенчатая функция). Ресслер наблюдал в системе (8) при  $k_1 = 37,8$ ,  $k_2 = 1,4$ ,  $k_3 = k_4 = 2,8$ ,  $k_5 = 2$ ,  $k_6 = 1$ ,  $k_7 = 8$ ,  $k_8 = 1,84$ ,  $k_9 = 0,0616$ ,  $k_{10} = 100$ ,  $K = 0,05$ ,  $K' = 0,02$ ,  $\mu = 0,0$  хаотические автоколебания. Механизм их генерации является общим для широкого класса систем «переключательного» типа, имеющих малый параметр при одной из производных. Траектория в такой системе состоит из медленных участков, лежащих на поверхности медленных движений, и быстрых — перескоков с одной части этой поверхности на другую [1, 11].

В системе (8) поверхность медленных движений (она задается соотношением  $\dot{c} = 0$ ) состоит из участков 1 и 2 (рис. 7, а). Основные события разворачиваются на участке 1, близком к полуплоскости  $c = 0$ ,  $a < k_{10}/k_7$ . Положив  $c = 0$ , а также считая  $K = 0$  (это можно сделать, так как на аттракторе всегда  $a > 0$ ), получим уравнение осциллятора Тьюринга на поверхности медленных движений  $\dot{b} - 0,4\dot{b} + 4,2b = 75,6$ .

Рис. 7. Поверхность медленных движений (а) и результат численного интегрирования (б) системы (8) [25]



Это — неустойчивый фокус. Когда траектория, раскручиваясь, достигает края области 1, происходит срыв на участок 2 и после недолгого пребывания на нем перескок обратно в область 1, траектория снова раскручивается и т. д. Именно такую осциллограмму неперiodических колебаний наблюдал Ресслер (рис. 7).

Системы с «переключателями» хорошо известны в радиотехнике — это схемы, генерирующие релаксационные колебания [1]. Естественно, можно построить и схему, генерирующую релаксационные стохастические автоколебания, аналогичные рис. 7. Такая схема была предложена нами в [27] (см. также раздел 4 и рис. 11).

3. Обсудим теперь несколько СА, близких (по виду уравнений) к точно интегрируемым нелинейным системам. Они получаются из консервативной системы гидродинамического типа (описывающей, например, вращение твердого тела с одной закрепленной точкой [28, 29]) добавлением лишь линейных членов. К этому классу относится система Лоренца (1), а также уравнения, описывающие распадное ограничение параметрически возбуждаемых волн [30]:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= hY - \nu_1 X - YZ; & \dot{Y} &= hX - \nu_2 Y + XZ; \\ \dot{Z} &= -Z + XY \end{aligned} \quad (9)$$

( $h$  пропорционально амплитуде накачки).

Остановимся здесь несколько подробнее на другой системе из этого же класса, которая исследована мало, хотя придумана была даже раньше, чем система Лоренца. Эта система связана с идеей Булларда о моделировании магнитогидродинамического динамо с помощью сосредоточенной системы, состоящей из дисков и ка-

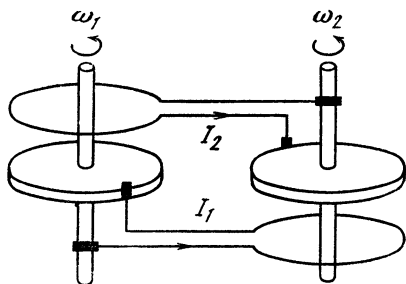


Рис. 8. Два связанных дисковых динамо [32]

тушек [31]. Конкретное описание интересующего нас случая было дано Рикитэйком [32] и Алланом [33]. Модель, изображенная на рис. 8, состоит из двух дисков, вращающихся с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в магнитных полях, создаваемых катушками с токами  $I_2$  и  $I_1$  соответственно. Ток  $I_1$  ( $I_2$ ) снимается с периферии и оси диска  $\omega_1$  ( $\omega_2$ ). Если пренебречь трением в осях дисков, уравнения примут следующий вид:

$$LI_{1,2} + RI_{1,2} = \omega_{1,2}MI_{2,1}; \quad C\dot{\omega}_{1,2} = G - MI_1I_2. \quad (10)$$

Здесь  $L$  и  $R$  — индуктивности и сопротивления катушек;  $M$  — коэффициент взаимоиндукции катушки с диском;  $C$  — момент инерции диска;  $G$  — приложенный извне момент. Заменой  $I_{1,2} = \sqrt{G/M}x_{1,2}$ ,  $\omega_1 = \sqrt{GL/CM}(z + a)$ ,  $\omega_2 = \sqrt{GL/CM}(z - a)$ ,  $t = \sqrt{CL/GMt}$  система (10) приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \mu x_1 &= ax_2 + zx_2; \\ \dot{x}_2 + \mu x_2 &= -ax_1 + zx_1; \\ \dot{z} &= 1 - x_1x_2, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mu = \sqrt{R^2C/LG}$ ;  $a$  — параметр, определяемый начальными значениями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Исследуя численно (11) при  $\mu = 0,1$ ,  $a = 1,875$ , Аллан [33] получил неперриодические осцилляции, аналогичные тем, которые наблюдал в 1963 г. для своей системы Лоренц, — траектория раскручивается вокруг одного из состояний равновесия, затем переходит к другому, крутится вокруг него и т. д. (рис. 9).

Однако система (11) обладает двумя неприятными свойствами. Во-первых, состояния равновесия в ней негрубые — одно собственное значение отрицательно, два других — чисто мнимые. Другое, еще более существенное свойство — наличие ссобой прямой  $x_1 = x_2 = 0$ , по которой изображающая точка может уйти в бесконечность. Эта прямая принадлежит аттрактору, и то, что Аллан не наблюдал очень больших значений  $z$ , объясняется лишь малым временем интегрирования.

«Исправим» систему, добавив формально в уравнение для  $z$  малое затухание — слагаемое  $-\gamma z$ ,  $\gamma \ll 1$ . Тогда два прежних

состояния равновесия станут устойчивыми, и из бесконечности придет еще одно:  $x_1 = x_2 = 0, z = \gamma^{-1}$ . Получившаяся система аналогична (1) и (9). Важным общим свойством систем (1), (9) и «исправленной» (11) является их диссипативность: все траектории входят в ограниченный объем фазового пространства. Для системы (11), например, положив  $u = x_1^2 + x_2^2 + 2z^2$ , имеем

$$\dot{u} = -\gamma u + 2\gamma^{-1} - [(2\mu - \gamma)(x_1^2 + x_2^2) + \gamma(z - \gamma^{-1})^2].$$

Отбрасывая заключенные в квадратные скобки положительные слагаемые, получим  $\dot{u} \leq -\gamma u + 2\gamma^{-1}$ , т. е. все траектории вхо-

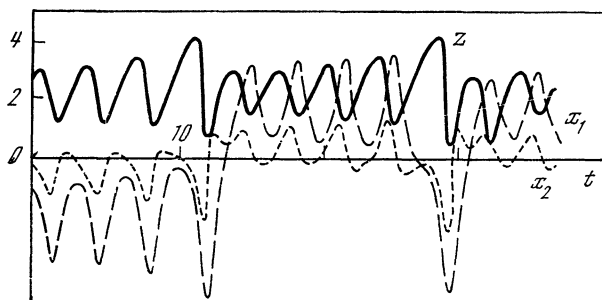


Рис. 9. Результат численного интегрирования системы (11) [33]

дят в эллипсоид  $u = 2\gamma^{-2}$ . Еще раз подчеркнем, что добавление затухания в уравнение (11) — искусственное и очевидного физического смысла не имеет. Если мы попытаемся ввести торможение дисков непосредственно в (10), то получим систему 2-го порядка, где стохастичности нет [33]. Возможно, однако, что стохастичность не исчезнет, если считать параметры дисков и катушек разными.

#### 4. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

1. Мы уже отмечали, что реализация негрубых движений, затруднительная в сосредоточенных системах, довольно естественна в волновых задачах при постановке соответствующих краевых условий. Примерами могут служить солитоны в консервативных диспергирующих средах (им соответствуют гомоклинические траектории) и стационарные ударные волны в средах с диссипацией (им соответствуют гетероклинические траектории, соединяющие два различных состояния равновесия).

Наличие СА делает возможным существование новых типов стационарных волн. Выделим среди них следующие: 1) сложные периодические волны — замкнутые траектории, 2) локализованные случайные волны — различные гомоклинические траектории, 3) перепады со случайной структурой — траектории, соединяющие состояния равновесия с СА, 4) ударные волны со слу-

чайным фронтом — траектории, идущие от одного состояния равновесия к другому через стохастическую область, 5) периодические волны, переходящие в случайные, — траектории, идущие от цикла на СА. Стохастические стационарные волны возможны, например, в линии, изображенной на рис. 10. Уравнения, описывающие волны в такой линии, имеют вид (ср. [34, уравнение (3.6.4)])

$$\frac{\partial I}{\partial x} = gU - C \frac{\partial U}{\partial t} - I_1, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (12)$$

$$U = L_1 \frac{\partial I_1}{\partial t} + rI_1 + U_1, \quad I_1 = C_1 \frac{\partial U_1}{\partial t} + i(U_1).$$

Для стационарных волн, зависящих лишь от  $\xi = t - x/V$ , имеем

$$I_\xi = k_1 I - k_2 I_1, \quad I_{1\xi} = k_3 I - k_4 I_1 - k_5 U_1,$$

$$C_1 U_{1\xi} = I_1 - i(U_1) \quad [(k_i > 0)]. \quad (13)$$

Система (13) исследовалась нами в [27], она, подобно уравнениям (8), демонстрирует стохастические релаксационные автоколебания. Эти автоколебания, в частности, могут быть и пространствен-

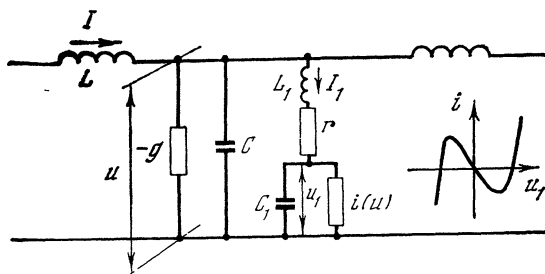


Рис. 10. LC-линия, описываемая уравнениями (12)

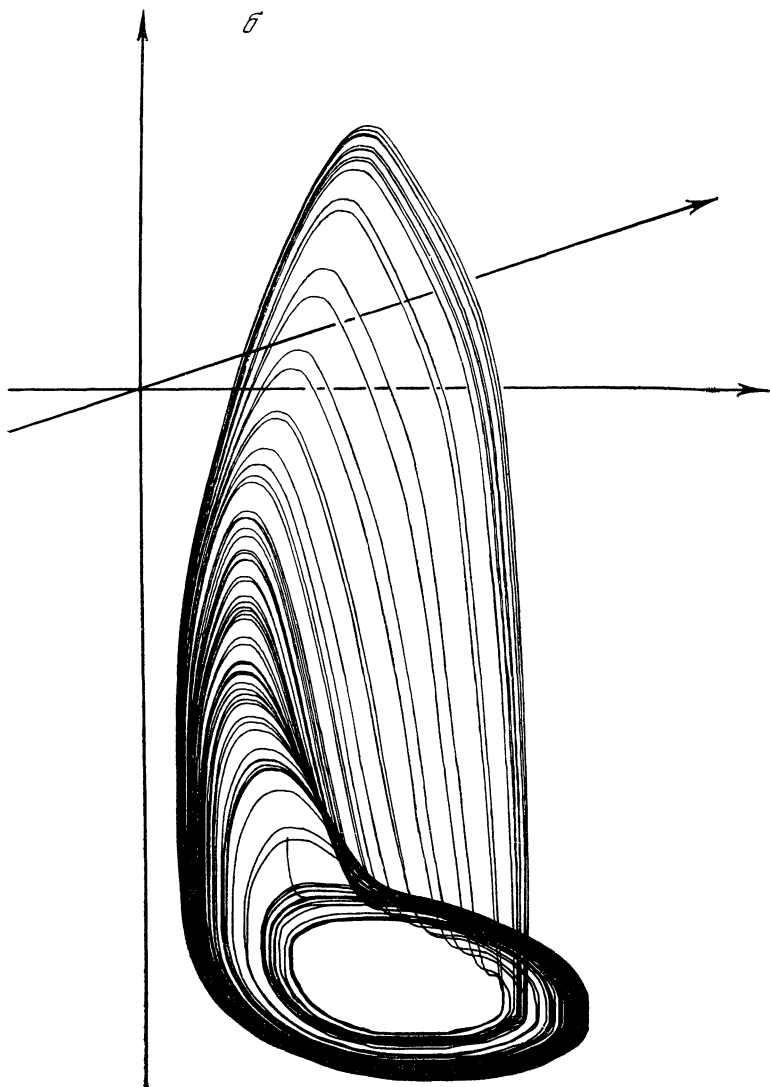
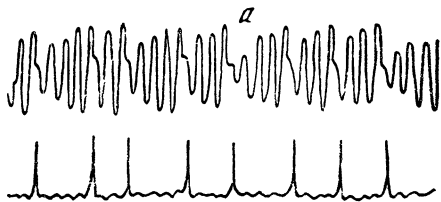
но-однородными — вся линия «дышит», как одна ячейка. Хаотический режим в такой ячейке удалось наблюдать экспериментально (рис. 11)<sup>2</sup>.

В заключение отметим, что теория стохастических стационарных волн сейчас находится еще в зачаточном состоянии; мы, однако, надеемся, что приведенные выше соображения пробудят к ней интерес.

2. Тот факт, что уравнения уже для стационарных волн дают стохастическое поведение, должен, естественно, как-то проявиться и в нестационарных процессах. Эти процессы исследуются, как правило, численно.

<sup>2</sup> Эти результаты получены совместно с С. В. Кияшко.

Рис. 11. Стохастические автоколебания в одной ячейке линии рис. 10 (а) и вид СА в системе (13) (б)



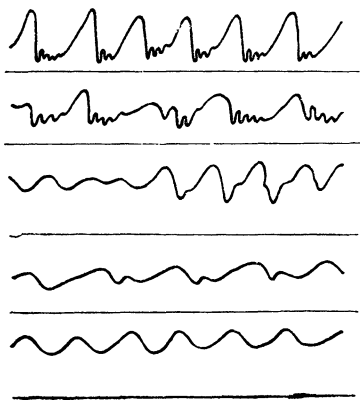


Рис. 12. Волны на вертикально стекающей пленке жидкости [39]

Рассмотрим, например, уравнение квазипростой волны в неравновесной среде

$$u_t + 2uu_x + u_{xx} + u_{xxxx} = 0; \quad (14)$$

зависимость инкремента спектральных компонент от волнового числа дается формулой  $\gamma(k) = k^2 - k^4$ . Уравнение (14) с периодическими граничными условиями  $u(x) = u(x + 819,2)$  численно исследовалось в [35], и действительно было обнаружено турбулентное состояние. Спектр  $\Phi(k) = |\overline{u_k}|^{2t}$  в области  $k \gg 1$  был близок к  $\Phi(k) \sim k^{-2}$  — спектральному закону, выведенному Ка-

домцевым и Петвиашвили для ансамбля пилообразных волн [36]. Приведенную в [35] реализацию действительно можно интерпретировать как случайный набор пил. Уравнение (14) описывает волны, образующиеся при течении тонкой пленки вязкой жидкости по вертикальной плоскости [37, 38]. В экспериментах [39] наблюдались очень сложные волновые режимы (рис. 12). Не исключено, что эти режимы имеют отношение к стохастическим решениям (14). Однако детального сравнения теории и эксперимента пока нет.

Для теории нелинейных волн стало уже привычным, что практически все эффекты, имеющиеся для самих волновых полей, можно обнаружить и для огибающих. Не составляют исключения и стохастические волны.

Исследование распространения огибающей квазимонохроматического пакета в консервативной нелинейной диспергирующей среде приводит к нелинейному уравнению Шредингера для комплексной амплитуды  $\psi$  [17]

$$i\psi - \psi_{xx} - v|\psi|^2\psi = 0. \quad (15)$$

Для ряда задач представляет интерес учет в (15) неконсервативных слагаемых. Соответствующее уравнение численно исследовалось в [40]:

$$i\psi_t - 0,5\psi_{xx} - 4|\psi|^2\psi = i(\psi - |\psi|^2\psi + \psi_{xx}). \quad (16)$$

Уравнение (16), как и (14), имеет стохастические решения.

3. Во многих случаях для анализа нелинейных волновых процессов, как известно, удобен модовый подход. Замечательно, что число мод, взаимодействие которых приводит к стохастичности, может быть не очень велико.

В работе [41] стохастичность обнаружена в системе из 10 гар-

моник, связанных квадратичной нелинейностью, такой же, как и в уравнении (14). Предполагалось также, что инкремент  $\gamma(k)$  меняется линейно от  $\gamma(1) = \gamma_0$  до  $\gamma(10) = -\gamma_0$ . Численный расчет показал, что суммарная энергия мод лишь незначительно флуктуирует возле среднего значения, в то время как энергии отдельных мод случайным образом менялись на несколько порядков.

Стохастичность, как известно, может появиться и в системе из меньшего числа мод, в частности, странные аттракторы в системе двух взаимодействующих волн с учетом линейных и нелинейных расстройек описаны в [42].

## 5. ФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ

При исследовании конкретных систем аналитические методы (например, анализ устойчивости состояний равновесия, определение области «мешка», куда траектории только входят, и т. д.) не дают, как правило, ответа на вопрос о структуре аттрактора. Поэтому приходится прибегать к численному исследованию. При этом возникает проблема: как убедиться, что мы наблюдаем действительно СА? Для этого необходимо проверить, выполняются ли математические критерии стохастичности.

1. Одним из таких критериев является гиперболичность [3]. Говоря нестрого, гиперболичность означает, что все траектории — седловые, т. е. каждая из них имеет устойчивую и неустойчивую сепаратрисы. Устойчивая сепаратриса состоит из точек, которые постоянно приближаются к данной траектории при  $t \rightarrow \infty$ , неустойчивые — из тех точек, что приближаются к траектории при  $t \rightarrow -\infty$ . Термин «постоянно» означает, что приближение не должно сменяться хотя бы временным уходом и наоборот. Требуется также, чтобы устойчивая и неустойчивая сепаратрисы непрерывно зависели от траекторий.

Свойство гиперболичности очень удобно для математического исследования. Доказано, в частности, что если СА гиперболичен, то 1) он структурно устойчив (груб); 2) имеется инвариантная эргодическая мера, к которой слабо сходится любое достаточно равномерное начальное распределение вероятностей; 3) эта мера не меняется, если на СА действуют малые шумы.

Гиперболические СА, как показали примеры, построенные Вильямсом и Плыкиным (см., например, [3]), существуют. Однако нам не известна ни одна конкретная динамическая система, в которой был бы обнаружен гиперболический СА.

Наиболее близок к гиперболичности аттрактор в системе Лоренца. Для него нарушается лишь непрерывная зависимость устойчивых и неустойчивых сепаратрис от траекторий. Поэтому некоторые следствия из гиперболичности сохраняются (существование инвариантной меры), а некоторые, например грубость, — нет.



На первый взгляд то, что СА в физической системе негрубый, т. е. его топологическая структура меняется при сколь угодно малом изменении параметров системы, делает его ненаблюдаемым. Однако отождествление наблюдаемости и грубости, естественное для двумерных систем, неверно для систем с большей размерностью фазового пространства. Дело в том, что с физической точки зрения тонкие особенности топологического устройства такого сложного объекта, как СА, не важны. На первый план здесь выдвигаются статистические свойства движения — время спада корреляций, распределение инвариантной меры и т. д. Эти же свойства при возмущении системы могут меняться мало, т. е. являются грубыми (заметим, что соответствующие строгие формулировки нам здесь не известны).

2. Сложнее обстоит дело с аттрактором системы (11). Здесь нарушается самое важное, по сути, свойство, фигурирующее в определении гиперболичности, — постоянство растяжения и сжатия вдоль неустойчивых и устойчивых сепаратрис. Оказывается, устойчивые и неустойчивые сепаратрисы могут касаться. Подобная ситуация получила название «дикая гиперболичность». Исследовавший ее Ньюхаус показал, что дикая гиперболичность устойчива — малые возмущения не уничтожают касания [43].

Трудности, возникающие при исследовании дикой гиперболичности, связаны с тем, что внутри аттрактора могут существовать устойчивые циклы — для некоторых траекторий сжатие может оказаться сильнее растяжения.

Эта же сложность существенна для отображения (7). Оно содержит точки, вблизи которых происходит только сжатие, — это точки на отрезке  $x = 0$ . Однако численный анализ, проведенный Хеноном [23], достаточно убедительно показал, что траектории ведут себя хаотически. Мы исследовали (также численно) поведение двух близких траекторий. Оказалось, что примерно на четыре растягивающих отображения приходится одно сжимающее, но в среднем близкие точки расходятся. Ситуация здесь аналогична отображению (6), где из-за наличия критической точки, в которой  $dx_{i+1}/dx_i = 0$ , не исключено существование устойчивого цикла.

Возможно, в описанных случаях действительно существуют очень сложные, но устойчивые циклы. Тогда наблюдаемая экспериментально стохастичность может быть не собственной, а связанной с присутствием в системе малых шумов. Это различие, однако, будет проявляться лишь на больших промежутках времени, подобному тому, как проявляется различие между квазипериодическим движением и аппроксимирующим его «многооборотным» циклом [44].

Совсем еще недавно стохастическое поведение неконсервативных динамических систем если и наблюдалось, то связывалось исключительно с действием флуктуаций. Собственная же стохас-

тичность автоколебательных систем казалась чем-то совершенно невероятным. Трудно было себе представить, основываясь на привычном «двумерном» опыте, что устойчиво может существовать какой-либо другой аттрактор, кроме предельного цикла.

Открытие странных аттракторов и их широкое распространение в конкретных физических системах всего лишь за 4-5 лет существенно изменили эти представления. Как известно, всякая хорошая идея по мере своей разработки проходит три этапа признания: 1) «этого не может быть», 2) «это не доказано», 3) «это очевидно». Похоже, что странные аттракторы пройдут этот путь сравнительно быстро, уже сейчас для них довольно много доказано, и они, по-видимому, скоро минуют второй этап.

Менее оптимистичной представляется перспектива развития теории автоколебаний распределенных систем, и в частности теории гидродинамической турбулентности. Прогресс здесь может быть достигнут, например, на пути доказательства соответствия между турбулентным течением и конечномерным СА — это означает, что мы только подходим ко второй стадии и самые интересные результаты еще впереди.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
2. Ruelle D., Takens F.— *Communs Math. Phys.*, 1971, 20, N 3, p. 167.
3. Синай Я. Г.— В кн.: Нелинейные волны. М., «Наука», 1979, с. 192.
4. Kaplan J. L., York J. A. Preprint, Univ. of Maryland, 1977.
5. Lorenz E. N.— *J. Atmos. Sci.*, 1963, 20, p. 130.
6. McLaughlin J. B., Martin P. C.— *Phys. Rev. A*, 1975, 12, N 1, p. 186.
7. Haken H.— *Phys. Lett.*, 1975, 53A, N 1, p. 77.
- 7a. Graham R.— *Phys. Lett.*, 1976, 58A, N 7, p. 440.
8. Shimizu T., Morioka N.— *Phys. Lett.*, 1978, 66A, N 3, p. 182.
9. Монин А. С.— УФН, 1978, 125, № 1, с. 93.
10. Рабинович М. И.— УФН, 1978, 125, № 1, с. 124.
11. Андронов А. А. Собр. трудов. М., Изд-во АН СССР, 1956, с. 110.
12. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1972.
13. Moser J. Stable and random motions in dynamical systems. N. Y., Princeton, 1973.
14. Пуанкаре А. Избр. труды, т. 2. М., «Наука», 1972, гл. 33.
15. Шильников Л. П.— *Мат. сб.*, 1967, 74 (116), № 3, с. 378.
16. Алексеев В. М.— 9-я летняя математическая школа. Киев, Ин-т математики АН УССР, 1972, с. 242.
17. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И.— УФН, 1971, 103, № 2, с. 193.
18. Chester W.— *Proc. Roy. Soc. London*, 1968, A306, N 1484, p. 5.
19. Горшков К. А., Островский Л. А., Панко В. В.— *Изв. вузов. Радиофизика*, 1973, 16, № 8, с. 1195.
20. Chester W., Bones J. A.— *Proc. Roy. Soc. London*, 1968, A306, N 1484, p. 22.
21. Belykh V. N., Pederson N. F., Soerensen O. H. Report N 164, Lyngby, 1976.
22. Guckenheimer J.— *Invent. Math.*, 1977, 39, p. 165.
23. Henon M.— *Communs Math. Phys.*, 1976, 50, p. 69.

24. *May R.* — Nature, 1976, 261, N 5560, p. 450.
25. *Rössler O. E.* — Z. Naturforsch., 1976, 31a, S. 259.
26. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М., «Мир», 1973.
27. *Пиковский А. С., Рабинович М. И.* — Докл. АН СССР, 1978, 239, № 2, с. 301.
28. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М., «Наука», 1973.
29. Нелинейные системы гидродинамического типа. М., «Наука», 1974.
30. *Пиковский А. С., Рабинович М. И., Трахтенгерц В. Ю.* — ЖЭТФ, 1978, 74, № 4, с. 1366.
31. *Bullard E. C.* — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, p. 774.
32. *Rikitake T.* — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, 54, N 1, p. 89.
33. *Allan D. W.* — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1962, 58, N 4, p. 671.
34. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М., «Сов. радио», 1977.
35. *Yamada T., Kuramoto Y.* — Progr. Theor. Phys., 1976, 56, p. 681.
36. *Кадошцев Б. Б., Петвиашвили В. И.* — Докл. АН СССР, 1973, 208, с. 794.
37. *Маурин Л. Н., Одшиария Г. Э., Точинин А. А.* — В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, Ин-т теплофизики, 1977, с. 190.
38. *Петвиашвили В. И.* — В кн.: Нелинейные волны. М., «Наука», 1979, с. 5.
39. *Нагоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Троян Е. Н., Алексеенко С. В.* — В кн.: Волновые процессы в двухфазных системах. Новосибирск, Ин-т теплофизики, 1975, с. 182.
40. *Kuramoto Y., Yamada T.* — Progr. Theor. Phys., 1976, 56, p. 679.
41. *Flynn R. W., Manheimer W. M.* — Phys. Fluids, 1971, 14, N 9, p. 2063.
42. *Дубровин В. И., Коган В. Р., Рабинович М. И.* — Физ. плазмы, 1978, 4, № 5.
43. *Newhouse S.* Preprint, I. H. E. S., 1977.
44. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний. М., «Наука», 1972, с. 45.

## СТОХАСТИЧНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Я. Г. СИНАЙ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время снова широко обсуждается старая проблема: каким образом детерминированные дифференциальные уравнения могут порождать движения, которые естественно рассматривать как случайные. Наиболее часто упоминаемые в этой связи примеры — модель Лоренца в теории тепловой конвекции и разнообразные модели экологии. Цель этой работы — пояснить, что дает математика для понимания подобных явлений.

Эмпирически настроенные исследователи говорят о появлении стохастических режимов у динамических систем, когда численное или какое-либо иное моделирование системы приводит к появлению траекторий, сложным образом заполняющих фазовое пространство или его часть, т. е. не имеющих никакого видимого асимп-

тотического режима. Именно так было в известной работе Лоренца [1], который обнаружил траектории, переходящие из одного полупространства в другое совершенно нерегулярным образом.

При математическом анализе явления стохастичности очевидно, что стохастичность может быть разной, более сильной или менее сильной. Мы приведем сейчас несколько свойств динамических систем, которые естественно рассматривать как последовательно усиливающие друг друга свойства стохастичности.

1. Самым простым из них является существование в фазовом пространстве распределения вероятностей  $P$ , инвариантного относительно динамической системы.

Инвариантность означает, что для любой фазовой функции  $f$  интеграл  $\int f(x_t) dP(x)$  не зависит от  $t$ . В гамильтоновых системах наличие инвариантного распределения или инвариантной меры на многообразиях постоянной энергии — непосредственное следствие теоремы Лиувилля, приводящее к появлению микроканонического распределения. В общем случае, когда одновременно происходят процессы накачки и потери энергии, наличие инвариантного распределения свидетельствует о существовании инвариантного множества в фазовом пространстве с однородным по времени режимом, хотя, возможно, и внутренне неустойчивого. Если инвариантное распределение выбрано, то можно проводить усреднение по времени

$$\lim_{T \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x_t) dt = \bar{f}$$

для начальных данных, взятых с вероятностью 1 по отношению к этому распределению.

Имеются общие теоремы, начиная с известной теоремы Крылова — Боголюбова, согласно которым в случае компактного, т. е. ограниченного, фазового пространства всегда есть хотя бы одно инвариантное распределение. Однако часто таких инвариантных распределений может быть много. Среди них наиболее существенными являются распределения, обладающие определенными свойствами устойчивости. Для того чтобы объяснить, что мы под этим понимаем, допустим, что в начальный момент времени имеется какое-либо начальное распределение вероятностей  $P_0$  с произвольной плотностью  $\rho$ ,  $dP_0(x)/dx = \rho(x)$ . Можно представлять себе  $P_0$  как распределение вероятностей, с которым выбираются начальные данные. Иными словами, вводя  $P_0$ , мы на самом деле допускаем наличие случайного механизма, действующего в начальный момент времени.

Другое истолкование  $P_0$  состоит в том, что, поскольку нет никаких видимых оснований рассматривать отдельные избранные траектории, следует изучать поведение типичных, т. е. составляющих основную массу в смысле  $P_0$ , траекторий. Согласно теореме

Лиувилля, распределение вероятностей в момент  $t$  будет задаваться плотностью  $\rho(x; t)$ , удовлетворяющей уравнению  $\partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho v) = 0$ , где исходная динамическая система записана в виде  $dx/dt = v(x)$ . В реальных ситуациях часто бывает, что  $\rho(x; t)$  при больших  $t$  становится чрезвычайно изрезанной, т. е. сильно-осциллирующей функцией, однако для хороших, например, непрерывных функций  $f$  существуют пределы, не зависящие от начальной плотности  $\rho(x)$ :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int f(x) \rho(x; t) dx = \int f(x) d\bar{P}(x). \quad (1)$$

Тогда  $\bar{P}$  — инвариантное распределение, и это есть то распределение, которое определяет средние по времени характеристики траекторий системы, т. е. то, какую часть времени система проводит в той или иной ячейке фазового пространства.

Таким образом, для гладких динамических систем проблему существования инвариантной меры естественно ставить как проблему существования предела (1), не зависящего от начального распределения  $P_0$ . Для динамических систем, удовлетворяющих так называемой аксиоме Смейла, существование предела  $\bar{P}$  было показано в недавних работах Рюэлля [2] и Боуэна и Рюэлля [3]. Мы подробно обсуждаем эту проблему ниже в разделе 3.

2. После того как инвариантное распределение  $\bar{P}$  выбрано, можно изучать поведение временных средних  $\frac{1}{T} \int_0^T f(x_t) dt$  и их пределов при  $T \rightarrow \pm \infty$ . Если  $\bar{P}$  эргодично, то

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x_t) dt = \int f(x) d\bar{P}(x).$$

Существенно, однако, что последнее равенство выполняется с  $\bar{P}$ -вероятностью 1. Когда в динамической системе имеется большое разнообразие траекторий, то, действительно, совпадение левой и правой частей происходит только для  $\bar{P}$ -типичных траекторий и имеются траектории с нетипичным в смысле  $\bar{P}$  поведением средних. Обычно это связано с существованием других инвариантных распределений, отличных от  $\bar{P}$ , и траекторий, типичных по отношению к ним.

3. Представление о статистическом характере динамической системы часто составляется на основании поведения автокорреляционных функций  $b(t) = \int f(x_t) f(x) d\bar{P}(x) = \langle f(x_t), f(x) \rangle$ . Эргодичность не препятствует тому, что  $b(t)$  не стремится к 0 при  $t \rightarrow \pm \infty$  (в предположении, что  $\int f(x) dP(x) = 0$ ): при наличии в системе периодических или условно-периодических движений функция  $b(t)$  также будет периодической или условно-периодической. Развитая стохастичность же должна приводить к тому, что

$b(t)$  стремится к 0 настолько быстро, что  $b(t)$  можно записать в виде

$$b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} a(k) dk. \quad (2)$$

Когда  $b(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \pm \infty$  для любой функции  $f$ ,  $\int |f|^2 d\bar{P} < \infty$ , то говорят, что в системе есть перемешивание. Перемешивание несомненно, свидетельствует о стохастичности динамической системы.

4. В классической теории вероятностей подробно изучаются последовательности независимых случайных величин или случайных величин, образующих цепь Маркова. С некоторой общей точки зрения эти примеры являются «наиболее случайными». Динамическая система тем стохастичнее, чем она ближе в определенном смысле к цепи Маркова или к последовательности независимых случайных величин. Цель этой статьи — объяснить, как эту близость можно установить, исходя из сравнительно простых критериев и не считая на ЭВМ длинные отрезки траекторий. Интересно, что существенную роль при этом играет формализм статистической механики (см. раздел 4). Пока же в качестве показателей близости к последовательности независимых случайных величин примем следующие два свойства.

*Центральная предельная теорема.* В случае эргодических систем разность  $\frac{1}{T} \int_0^T f(x_t) dt - \int f(x) d\bar{P}(x)$  стремится к 0 при

$T \rightarrow \infty$ . Возникает естественный вопрос о характере стремления ее к 0. Во многих случаях эта разность имеет порядок  $T^{-1/2}$ . Однако если рассмотреть выражение  $T^{1/2} \left( \frac{1}{T} \int_0^T f(x_t) dt - \int f(x) d\bar{P}(x) \right)$ ,

то оно имеет порядок 1 при  $T \rightarrow \infty$ , но не стремится ни к какому пределу при  $T \rightarrow \infty$ . По аналогии с теорией вероятностей можно ожидать, что для хороших функций  $f$  выражение

$T^{1/2} \left( \frac{1}{T} \int_0^T f(x_t) dt - \int f(x) d\bar{P}(x) \right)$ , рассматриваемое как случайная

величина в смысле теории вероятностей, подчиняется в пределе  $T \rightarrow \infty$  классическому гауссову распределению вероятностей.

Можно представить себе в таком случае, что интеграл  $\int_0^T f(x_t) dt$  как бы складывается из слабо зависимых, в смысле теории вероятностей, слагаемых.

*Экспоненциальное убывание корреляций.* Экспоненциальное стремление к нулю автокорреляционных функций  $b(t)$  означает аналитичность спектральной плотности  $a(t)$  в (2). В теории вероят-

ностей это свойство выполняется для цепей Маркова или их «достаточно хороших» возмущений. Поэтому можно полагать, что экспоненциальное убывание корреляций для гладких функций  $f$  свидетельствует о близости системы к конечной цепи Маркова. Показатель экспоненты обычно связывается со временем релаксации или радиусом корреляции системы.

Последнее свойство оказывается в известных нам примерах наиболее трудным для доказательства. Более того, оно не является всеобщим. Например, во многих задачах неравновесной статистической механики есть веские основания полагать, что убывание корреляций является только степенным. Так будет, по-видимому, в некоторых бильярдных проблемах.

Как упоминалось выше, приведенные свойства стохастичности в определенном смысле усиливают друг друга. Об эргодичности можно говорить, когда выбрано инвариантное распределение, а из перемешивания следует эргодичность. Центральная предельная теорема и экспоненциальное убывание корреляций обычно выводятся из гораздо более сильных свойств типа перемешивания.

Со стохастичностью динамических систем связано много проблем, из которых мы упомянем сейчас три.

*Малые случайные возмущения динамической системы.* Под малым случайным возмущением динамической системы понимаются траектории системы стохастических дифференциальных уравнений  $dx/dt = v(x) + \varepsilon \zeta(t)$ , где  $\zeta(t)$  — белый шум;  $\varepsilon$  — малый параметр. Об относящихся сюда результатах мы будем говорить позже. Несколько неожиданным оказывается то, что динамическая стохастичность системы часто действует сильнее, чем стохастичность белого шума в правой части. В основном именно динамическая стохастичность определяет временное поведение системы при малых  $\varepsilon$ .

Другой аспект той же проблемы — соотношение между результатами машинного эксперимента и поведением траекторий динамической системы. По-видимому, во многих задачах траектории, получаемые с помощью ЭВМ, гораздо ближе к траекториям динамической системы, чем можно было бы думать на основании грубых прикидок (см. ниже раздел 5). Однако подробно этот вопрос не выяснен.

*Системы, близкие к стохастическим.* В исследованиях Новикова [4], Новикова и Богоявленского [5], Богоявленского [6], а также в работе Рабиновича, Вышкинда [7] появились примеры динамических систем, в которых на «границе» фазового пространства система ведет себя стохастическим образом. Для самой динамической системы это означает, что в течение больших промежутков времени, зависящих от близости траектории к границе, система ведет себя стохастически и временные средние достаточно близки к своим пределам. Однако это время и «степень стохастичности» на конечных промежутках выяснены недостаточно.

*Характер квазиклассического приближения и некоторые аку-*

стические проблемы в случае стохастических систем. Со спектром уравнения Шредингера  $\Delta\psi + V(x)\psi = E\psi$ , где  $V$  — потенциал типа твердой стенки, т. е.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x \in Q), \\ \infty & (x \notin Q), \end{cases}$$

где  $Q$  — область с кусочно-гладкой границей, тесно связана динамическая система бильярдного типа в  $Q$ . Естественно ожидать, что при больших  $E$  характер собственных функций зависит от эргодических свойств соответствующего бильярда. Интересные результаты были получены здесь Лазуткиным [8] и Шнирельманом [9]. Лазуткин показал, что в случае выпуклых двумерных областей с гладкой границей (класса  $C^{5/3}$ ) существуют каустики, образующие множество положительной меры<sup>1</sup>. Исходя из этого он построил множество собственных функций значений положительной плотности и отвечающих им квазисобственных функций, локализованных около каустики. В работе Шнирельмана [9] было, наоборот, показано, что эргодичность бильярдной системы приводит к определенной «равномерной распределенности» собственных функций по поверхности бильярда.

Интересные связи эргодических свойств бильярдных систем с задачами акустики обсуждаются в работах Джойса [11, 12].

## 2. СТОХАСТИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ И СВОЙСТВА ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ

Цель этого раздела — изложить некоторые общие подходы к выяснению свойств стохастичности. Окажется, что свойства стохастичности зависят, грубо говоря, от поведения сепаратрис траекторий динамических систем, т. е. объектов, популярных и хорошо изученных в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Другая важная идея состоит в том, что стохастические свойства устойчивы у неустойчивых динамических систем. В этом месте полезно ввести четкое определение в соответствии с принятой в математической литературе традицией.

**О п р е д е л е н и е 1.** Стохастическим аттрактором называется инвариантное, т. е. состоящее из траекторий, замкнутое множество  $W$  в фазовом пространстве со следующими свойствами:

1) существует окрестность  $U$ ,  $W \subset U$ , состоящая из таких  $x$ , что  $\text{dist}(x_t, W) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ; последнее означает, что  $x_t \rightarrow W$  при  $t \rightarrow \infty$ ;

2) для любого начального распределения вероятностей  $P_0$  с

<sup>1</sup> Условие гладкости границы существенно. Как показал Бунимович [10], бильярд в области, имеющей форму стадиона (граница состоит из двух полуокружностей и двух прямолинейных параллельных отрезков), эргодичен и обладает перемешиванием. Следовательно, в такой области невозможны каустики.



плотностью  $\rho_0$ , сосредоточенного на  $U$ , его сдвиг при  $t \rightarrow \infty$  сходится к инвариантному распределению  $\bar{P}$  на  $W$ , не зависящему от  $P_0$ ;

3) распределение вероятностей  $\bar{P}$  является перемешивающим (т. е. автокорреляционные функции стремятся к 0 при  $t \rightarrow \pm \infty$ ).

Условие перемешивания необходимо для того, чтобы исключить предельные циклы. За исключением того случая, когда  $W$  совпадает со всем фазовым пространством, понятие стохастического аттрактора не является симметричным во времени: при замене  $t$  на  $-t$  аттрактор становится неустойчивым.

Начиная с известной работы Рюэлля и Такенса [13], в литературе распространился термин «странный аттрактор». Авторы хотели этим подчеркнуть, что такие аттракторы не являются многообразиями. Полезно объяснить, почему во многих случаях это так. Часто внутри самого аттрактора движение оказывается полностью неустойчивым: траектории любых двух точек экспоненциально расходятся, оставаясь, разумеется, на аттракторе. В силу этого аттрактор  $W$  «расслаивается» инвариантным образом на неустойчивые подмногообразия. Они определяются однозначно тем, что полутраектории любых двух точек такого подмногообразия при  $t \rightarrow -\infty$  сближаются экспоненциально. Следовательно, устойчивые направления, по которым происходит сближение с аттрактором, должны быть трансверсальны к этим неустойчивым подмногообразиям и по устойчивым направлениям точки стремятся к  $W$ . Однако для движений с инвариантной мерой выполняется теорема Пуанкаре о возвращении, согласно

Рис. 1

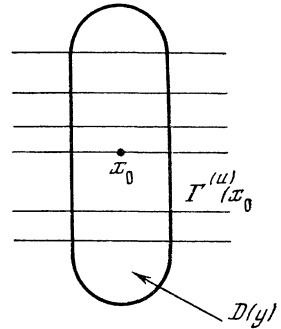
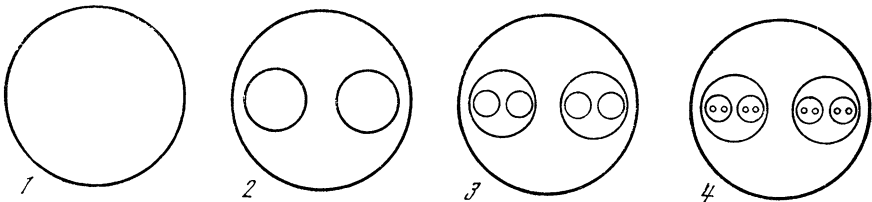


Рис. 2



которой движение должно носить рекуррентный характер. Из этого следует, что если в малой окрестности точки  $x_0 \in W$  построить неустойчивое подмногообразие  $\Gamma^{(u)}(x_0)$  и трансверсальные, т. е. идущие под углом к нему, подмногообразия  $D(y)$ ,  $y \in \Gamma^{(u)}(x_0)$  дополнительной размерности, то неустойчивые подмногообразия  $\Gamma^{(u)} \subset W$  не могут проходить через каждую точку  $D(y)$ , поскольку тогда не останется устойчивых направлений. Естественная возможность состоит в том, что  $\Gamma^{(u)}$  должны «протыкать» в точках замкнутого совершенного множества типа хорошо известного в математике канторова множества (рис. 1).

Удивительно, что подобные явления могут происходить в аналитических системах дифференциальных уравнений. Физику легче всего представить себе канторово множество как иерархию структур типа рис. 2.

Прежде чем переходить к изложению общей теории, приведем два примера стохастических аттракторов. В обоих примерах речь идет о динамических системах с дискретным временем, т. е. об итерациях единственного преобразования  $T$ . Достаточно хорошо известно, как связаны динамические системы с дискретным временем с динамическими системами с непрерывным временем (см. [14—16]).

**С о л е н о и д С м е й л а — В и л ь я м с а** (см. [17]). Этот пример строится в пространстве размерности 3 и больше. Рассмотрим полноторий  $Q \subset R^3$ , т. е. внутренность тора. Его сечение вертикальной плоскостью состоит из двух кругов (рис. 3, а). Предположим, что действие преобразования  $T$  состоит в том, что такой полноторий в два раза сжимается и в два раза удлиняется, после чего он перекручивается и вкладывается внутрь  $Q$  (рис. 3, б). Пересечение  $TQ$  с двумя первоначальными кругами имеет вид, изображенный на рис. 3, в.

Теперь уже нетрудно понять, что  $T^2Q$  имеет вид, указанный на рис. 3, г, и  $T^nQ$  образуют убывающую последовательность кружков, пересечением которой будет канторово совершенное множество.

**А т т р а к т о р П л ы к и н а** (см. [18]). Аттрактор Плыкина строится на плоскости. Сначала рассматривается область на плоскости с тремя дырками (рис. 4, а). Точный вид границы и расположение дырок внутри не существенны. Разрежем эту область на три части, так что каждая часть будет представлять собой полукольцо, и нарисуем образы каждой части (рис. 4, б). Итерируя и дальше наше преобразование, мы получим довольно сложное множество на плоскости. Важность этого примера объясняется тем, что он представляет собой устойчивый стохастический аттрактор на плоскости. С его помощью можно построить систему трех дифференциальных уравнений с подобным же аттрактором. Приведенные примеры носят модельный характер; скорее всего в реальных системах аттракторы будут выглядеть несколько иначе, хотя и во многих отношениях похоже.

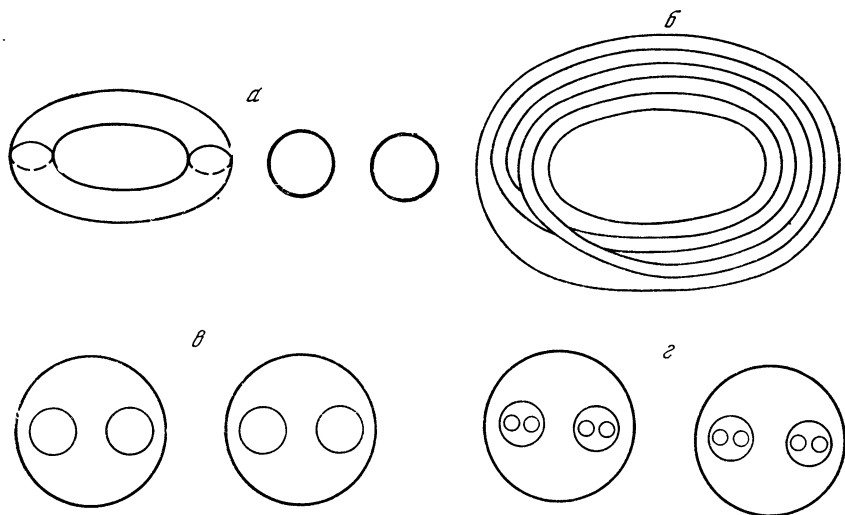


Рис. 3

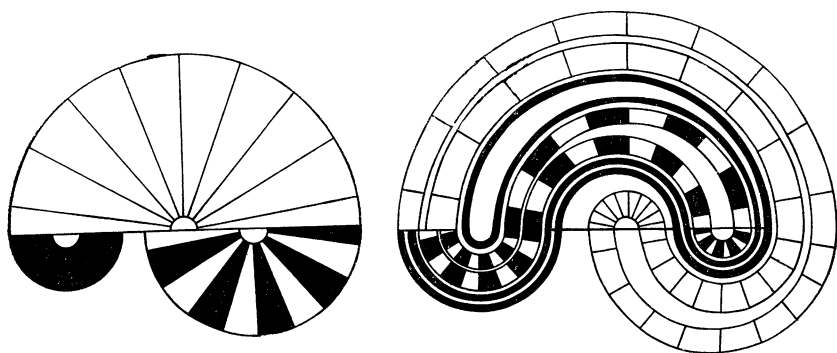


Рис. 4

**Гиперболичность.** Опыт исследования различных классов динамических систем показывает, что наиболее полный математический анализ можно провести в системах, обладающих самыми сильными стохастическими свойствами. В основе анализа лежит понятие гиперболичности, которое мы приведем в форме, наиболее удобной для проверки на ЭВМ. Поскольку речь идет о поисках стохастических аттракторов, то следует начинать с поиска окрестностей таких аттракторов. Далее, в случае динамических систем с непрерывным временем удобнее перейти к отображениям Пуанкаре, по этой причине мы будем формулировать условия гиперболичности для отдельных отображений. Итак, допустим, что в области  $Q \subset R^N$  задано отображение  $T : x =$

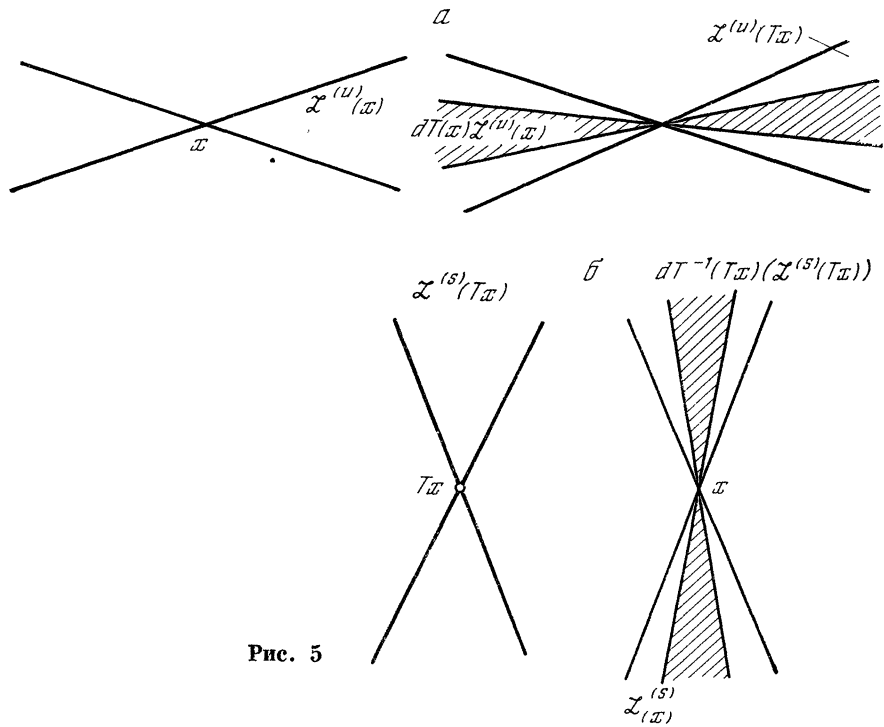


Рис. 5

$= (x_1, x_2, \dots, x_N) \xrightarrow{T} (f(x) = f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x))$ . Для начала мы предположим, что  $T$  задано всюду на  $Q$  и бесконечно дифференцируемо. Это условие можно ослабить. В следующей статье (с. 212) рассматриваются преобразования  $T$ , возникающие, по-видимому, в модели Лоренца, где функции  $f$  разрывны.

Предположим, что  $TQ \subset Q$ , т. е.  $Q$  уже есть окрестность будущего аттрактора  $W$ , который естественно искать в виде  $W = \bigcap_{n \geq 0} T^n Q$ . В реальных ситуациях ячейки  $Q$  надо брать охватыва-

ющими траектории со стохастическим поведением. С отображением  $T$  связывается набор его матриц Якоби:  $dT(x) = \|\partial f_i / \partial x_j\|$ . Вектор  $e$  назовем растягивающимся, если  $\|dT(x)e\| > \|e\|$ . Набор всех растягивающихся векторов в данной точке  $x$  образует конус растягивающихся векторов. Изменив знак неравенства на противоположный, получим определение сжимающегося вектора и конуса сжимающихся векторов. Для  $N = 2$  этих определений было бы достаточно. В многомерном случае приходится определять еще расширяющиеся или сжимающиеся подпространства как подпространства, состоящие из соответственно расширяющихся или сжимающихся векторов.

Допустим теперь, что для пары целых чисел  $k, l, k + l = N$  и постоянной  $\lambda$  ( $1 < \lambda < \infty$ ) для каждой точки  $x \in Q$  задано

открытое множество  $\mathcal{L}^{(u)}(x)$   $k$ -мерных расширяющихся подпространств  $L^{(u)}$  и открытое множество  $\mathcal{L}^{(s)}(x)$   $l$ -мерных сжимающихся подпространств  $L^{(s)}$  (индекс  $s$  происходит от слова «stable»), и при этом

1)  $(dT(x))\mathcal{L}^{(u)}(x) \subset \mathcal{L}^{(u)}(Tx)$ , т. е. для любого  $L^{(u)} \in \mathcal{L}^{(u)}(x)$  образ  $(dT)L^{(u)} = L_1^{(u)} \in \mathcal{L}^{(u)}(Tx)$ ; более того, для любого вектора  $e \in L^{(u)} \in \mathcal{L}^{(u)}(x)$  справедливо неравенство

$$\|dT(x)e\| \geq \lambda \|e\|;$$

2)  $(dT(Tx))^{-1}\mathcal{L}^{(s)}(Tx) \subset \mathcal{L}^{(s)}(x)$ , т. е. для любого  $L^{(s)} \in \mathcal{L}^{(s)}(Tx)$  образ  $(dT)^{-1}L^{(s)} = L_1^{(s)} \in \mathcal{L}^{(s)}(x)$ ; более того, для любого вектора  $e \in L^{(s)} \in \mathcal{L}^{(s)}(Tx)$  справедливо неравенство

$$\|(dT)^{-1}(Tx)e\| \geq \lambda \|e\|.$$

При  $N = 2$  эти условия упрощаются. Можно говорить об открытых множествах растягивающихся и сжимающихся векторов. Тогда 1) и 2) означает то, что изображено на рис. 5 (а и б).

Выполнение соотношений 1), 2) зависит, разумеется, от выбора системы координат. Поэтому, после того как множество  $Q$ , для которого  $TQ \subset Q$ , найдено, проверка выполнения 1) и 2) включает, как часть, выбор системы координат, в которой 1) и 2) имеют место. Ясно также, что свойства 1) и 2) грубые: при малом возмущении правых частей они сохраняются. Свойства 1), 2) мы будем называть свойствами гиперболичности,  $\mathcal{L}^{(u)}(x)$  ( $\mathcal{L}^{(s)}(x)$ ) — конусом растягивающихся (сжимающихся) подпространств.

### 3. ПЕРВЫЕ СЛЕДСТВИЯ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ

Рассмотрим ячейку  $Q$ , на которой определено отображение Пуанкаре со свойством гиперболичности. Предположив, что  $\mathcal{L}^{(s)}(x)$ ,  $\mathcal{L}^{(u)}(x)$  непрерывно зависят от  $x$ , можно доказать первую теорему о свойствах гиперболических преобразований  $T$ .

**Т е о р е м а 1.** *Для каждой точки  $x \in Q$  можно построить локальное  $l$ -мерное многообразие  $\gamma^{(s)}(x)$ , непрерывно зависящее от  $x$ , для которого  $T\gamma^{(s)}(x) \subset \gamma^{(s)}(Tx)$ .*

Многообразие  $\gamma^{(s)}(x)$  касается сжимающихся направлений и показывает характер и направление сжатия, т. е. притяжения к аттрактору. При  $l = 1$  каждое  $\gamma^{(s)}(x)$  представляет собой кривую. Теорема 1 — частный случай так называемой теоремы Адамара — Перрона, которой посвящена обширная математическая литература (см. [19–21]). Окончательная форма теоремы такого типа получена Песиным [21], который строит  $\gamma^{(s)}(x)$  для индивидуальных траекторий.

Рассмотрим множество  $W = \bigcap_{p \geq 0} T^p Q$ . Ясно, что  $W$  есть аттрактор в том смысле, что для любой точки  $x \in Q$  расстояние  $\text{dist}(T^p x, W) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$ . Поэтому  $T^p W = W$  при всех  $p$ , в том числе и при отрицательных, а из этого вытекает несколько неожиданная теорема 2.

**Теорема 2.** Для каждой точки  $x \in W$  можно построить  $k$ -мерное (открытое) многообразие  $\gamma^{(u)}(x)$ , касающееся растягивающихся направлений, такое, что  $T^{-1}\gamma^{(u)}(x) \subset \gamma^{(u)}(T^{-1}x)$ .

Эта теорема также есть вариант уже упоминавшейся теоремы Адамара — Перрона. Покажем, что все  $\gamma^{(u)}(x) \in W$ . Для любой точки  $y \in \gamma^{(u)}(x)$  имеем

- 1)  $\text{dist}(T^p y, W) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$  как для всякой точки из  $Q$ ;
- 2)  $\text{dist}(T^p y, W) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow -\infty$ , поскольку  $\text{dist}(T^p y, W) \leq \leq \text{dist}(T^p y, T^p x) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow -\infty$ , причем последнее стремление происходит с экспоненциальной скоростью.

Рассмотрим множество  $W' \subset Q$ , состоящее из точек  $y$ , для которых выполнено 1) и 2). Ясно, что  $W \subseteq W'$ ,  $TW' = W' = = T^{-1}W'$ ,  $W' \subset Q$ . Из последних двух соотношений вытекает, что  $W' \subset \bigcap_{p \geq 0} T^p Q = W$ , а, стало быть, из первого соотношения  $W = W'$ . Тем самым мы получаем важный вывод: всякий аттрактор вдоль неустойчивых направлений распадается на гладкие многообразия (при  $k = 1$  кривые)  $\gamma^{(u)}(x)$ .

Далее,  $\gamma^{(u)}(x)$  есть «локальное» неустойчивое многообразие точки  $x$ . Полным неустойчивым многообразием точки  $x$  естественно назвать  $\Gamma^{(u)}(x) = \bigcup_{p=0}^{\infty} T^{-p}(\gamma^{(u)}(T^p x))$ . Таким образом, аттрактор  $W$  состоит из неустойчивых многообразий  $\Gamma^{(u)}(x)$ . Как мы уже объясняли, это не исключает того, что пересечение  $W \cap \gamma^{(s)}(x)$  есть множество типа канторова совершенного множества.

Теперь мы переходим к обсуждению следующего основного утверждения: аттрактор  $W$  является стохастическим аттрактором. Первый шаг в этом направлении состоит в построении специальных мер на каждом неустойчивом многообразии  $\Gamma^{(u)}(x)$ . Считаем сейчас точку  $x$  и слой  $\Gamma^{(u)}(x)$  фиксированными.

Рассмотрим полутраекторию  $T^{-p}x$ ,  $p \geq 0$  точки  $x$  и соответствующие неустойчивые подмногообразия  $\Gamma^{(u)}(T^{-p}x)$ . Так как каждое  $\Gamma^{(u)}(x)$  является гладким, то на нем можно рассмотреть риманов объем  $d\sigma_{\Gamma^{(u)}(x)}$ , т. е. меру, индуцированную римановой метрикой на  $\Gamma^{(u)}(x)$ . Сдвинем  $d\sigma_{\Gamma^{(u)}(T^{-n}x)}$  под действием  $T^n$ . Тогда мы получим меру  $d\sigma_{\Gamma^{(u)}(x)}^{(n)}$  на  $\Gamma^{(u)}(x)$ . Оказывается, это и есть один из основных пунктов теории, что меры  $\sigma_{\Gamma^{(u)}(x)}^{(n)}$  имеют в определенном смысле предел при  $n \rightarrow \infty$  (см. также след. статью). Мы разъясним подробно это утверждение и заодно покажем, в каком смысле предельный объект можно явно вычислить.

Введем коэффициент растяжения  $\lambda^{(u)}(x)$ , определяемый следующим образом: рассмотрим элемент объема  $d\sigma_{\Gamma^{(u)}(x)}$  на  $\Gamma^{(u)}(x)$  и применим к нему преобразование  $T$ . Мы получим элемент объема на  $T\Gamma^{(u)}(x) = \Gamma^{(u)}(Tx)$ . Тогда  $\lambda^{(u)}(x)$  есть их отношение,

т. е.  $\lambda^{(u)}(x) = \frac{Td\sigma_{\Gamma^{(u)}(x)}}{d\sigma_{\Gamma^{(u)}(x)}}$ . Из условия гиперболичности вытекает,

что  $\lambda^{(u)}(x) > 1$ . Нетрудно понять, что каждая мера  $\sigma_{\Gamma^{(u)}(x)}^{(n)}$  задается плотностью по риманову объему  $d\sigma_{\Gamma^{(u)}(x)}$ , которая в точке  $y \in \Gamma^{(u)}(x)$  равна  $\lambda^{(u)}(T^{-1}y) \cdot \lambda^{(u)}(T^{-2}y) \dots \lambda^{(u)}(T^{-n}y)$ . Каждый сомножитель больше 1, и поэтому все произведение растет экспоненциально по  $n$ . Однако отношение

$$\frac{\lambda^{(u)}(T^{-1}y_1) \cdot \lambda^{(u)}(T^{-2}y_1) \dots \lambda^{(u)}(T^{-n}y_1)}{\lambda^{(u)}(T^{-1}y_2) \cdot \lambda^{(u)}(T^{-2}y_2) \dots \lambda^{(u)}(T^{-n}y_2)} = \kappa_n(y_1, y_2) \quad (3)$$

$(y_1, y_2 \in \Gamma^{(u)}(x))$

имеет предел при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n(y_1, y_2) = \kappa(y_1, y_2)$ , поскольку при движении в отрицательном по времени направлении неустойчивые многообразия сжимаются и расстояние между точками  $T^{-n}y_1, T^{-n}y_2$  экспоненциально по  $n$  стремится к нулю. Функция  $\lambda^{(u)}(y)$  дифференцируема по  $y$  вдоль слоя, и в силу этого отношение  $\lambda^{(u)}(T^{-n}y_1)/\lambda^{(u)}(T^{-n}y_2)$  с экспоненциальной скоростью сходится к 1. Отсюда вытекает существование предела  $\kappa(y_1, y_2)$ .

Ясно, что 1)  $\kappa(y_1, y_2) > 0$ ; 2)  $\kappa(y_1, y_2) \kappa(y_2, y_3) = \kappa(y_1, y_3)$ ; 3)  $\kappa(Ty_1, Ty_2) = \frac{\lambda^{(u)}(y_1)}{\lambda^{(u)}(y_2)} \kappa(y_1, y_2)$ . Фиксируем точку  $y_0 \in \Gamma^{(u)}(x)$  и рассмотрим всевозможные меры на  $\Gamma^{(u)}(x)$  с плотностями по риманову объему  $\rho(y) = C\kappa(y_0, y)$  ( $C = \text{const}$ ). Класс мер, получаемых таким образом, не зависит от точки  $y_0$ . Действительно, для любой другой точки  $\bar{y}_0 \in \Gamma^{(u)}(x)$  можем написать, пользуясь 2)

$$\bar{\rho}(y) = C\kappa(\bar{y}_0, y) = C\kappa(\bar{y}_0, y_0)\kappa(y_0, y) = C_1\kappa(y_0, y) = \rho(y).$$

Обозначим введенный класс мер через  $M(\Gamma^{(u)}(x))$ . Тогда

$$TM(\Gamma^{(u)}(x)) = M(\Gamma^{(u)}(Tx)), \quad (4)$$

т. е. под действием  $T$  класс мер  $M(\Gamma^{(u)}(x))$  на слое  $\Gamma^{(u)}(x)$  переходит в аналогичный класс мер на слое  $\Gamma^{(u)}(Tx)$ . Последнее соотношение вытекает из того, что мера с плотностью  $C\kappa(y_0, y)$  переходит под действием  $T$  в меру с плотностью  $C\kappa(y_0, y)(\lambda^{(u)}(y))^{-1}$ , для которой в силу 3)

$$C\kappa(y_0, y)(\lambda^{(u)}(y))^{-1} = C(\lambda^{(u)}(y_0))^{-1}\kappa(Ty_0, Ty) = C_1\kappa(Ty_0, Ty).$$

Класс мер  $M(\Gamma^{(u)}(x))$  чрезвычайно важен для проблемы построения интересующего нас распределения вероятностей  $P$  на аттракторе  $W$ . Мы привели здесь столь подробное его описание для того, чтобы было видно, насколько эффективно его можно определить. Так как в (3) сходимость экспоненциальная, то функции  $\kappa(y_1, y_2)$  можно строить с хорошей точностью с помощью небольшого числа итераций.

Теперь можно непосредственно перейти к построению основного инвариантного распределения  $\bar{P}$  для аттрактора  $W$ . Возьмем неустойчивое многообразие  $\Gamma^{(u)}(x)$  и плотность  $\rho(y) = C\kappa(y_0, y)$  меры на  $\Gamma^{(u)}(x)$ . Несколько неожиданным оказывается утвержде-

ние о том, что инвариантное распределение  $\bar{P}$  строится путем усреднения по любому слою  $\Gamma^{(u)}(x)$  с плотностью  $\rho$ . Более точно рассмотрим область  $C \subset Q$  и ее пересечение с аттрактором  $W$ , т. е.  $C_1 = C \cap W$ . Построим расширяющуюся последовательность областей  $O_1 \subset O_2 \subset \dots$  на слое  $\Gamma^{(u)}(x)$ , исчерпывающих этот слой, т. е.  $\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i = \Gamma^{(u)}(x)$ . Тогда

$$\bar{P}(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left[ \int_{O_i \cap C_1} \rho(y) d\sigma(y) \right] \left[ \int_{O_i} \rho(y) d\sigma(y) \right]^{-1}. \quad (5)$$

В этом равенстве заключено два утверждения: о существовании предела и о его независимости от  $\Gamma^{(u)}(x)$ . Как будет объяснено, оба эти утверждения представляют собой следствие марковско-го характера динамики в условиях гиперболичности. Более того, по нашему мнению, ничего большего слова о марковском характере динамики и не выражают.

Для того чтобы пояснить, откуда вытекает (5), разобьем область  $Q$  на мелкие части  $Q_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ), где каждая часть  $Q_i$  есть параллелограмм. В двумерном случае это означает, что  $Q_i$  действительно есть двумерный криволинейный параллелограмм, одна пара сторон которого направлена по сжимающимся направлениям, а другая — по растягивающимся. В многомерном случае параллелограмм — это ячейка, которая допускает разбиение на  $l$ -мерные площадки, касательные векторы к которым являются сжимающимися векторами, и разбиение на  $k$ -мерные площадки, касательные векторы к которым являются растягивающимися векторами. При этом каждая  $l$ -мерная площадка пересекается с каждой  $k$ -мерной площадкой, притом ровно в одной точке.

Рассмотрим локальный слой  $\gamma^{(u)}(x) \subset \Gamma^{(u)}(x)$ , лежащий внутри одной ячейки  $Q_i$ , граница которого содержится в границе  $Q_i$ . Тогда  $T^n \gamma^{(u)}(x) \subset \Gamma^{(u)}(T^n x)$  представляет собой большой кусок неустойчивого многообразия  $\Gamma^{(u)}(T^n x)$ , поскольку под действием  $T^n$  произошло экспоненциальное растяжение. При больших  $n$   $T^n(\gamma^{(u)}(x))$  пересечет каждую ячейку  $Q_j$ , притом много раз. Это дает возможность построить матрицу вероятностей перехода: за условную вероятность перехода  $p_{ij}$  из ячейки  $Q_i$  в ячейку  $Q_j$  примем дробь

$$\frac{\int_{T^n(\gamma^{(u)}(x)) \cap Q_j} \rho(y) d\sigma_{\Gamma^{(u)}(T^n x)}(y)}{\int_{T^n(\gamma^{(u)}(x))} \rho(y) d\sigma_{\Gamma^{(u)}(T^n x)}(y)}. \quad (6)$$

Необходимо пояснить, почему такая величина действительно может рассматриваться как вероятность перехода из  $Q_i$  в  $Q_j$ , т. е. почему она не зависит от выбора  $\gamma^{(u)}(x) \subset Q_i$  или (что то же самое) почему для двух разных  $\gamma^{(u)}(x_1), \gamma^{(u)}(x_2)$  ( $x_1, x_2 \in Q_i$ )



построенные по ним вероятности перехода равны или почти равны.

Дело в том, что через каждую точку  $y_1 \in \gamma^{(u)}(x_1)$  мы можем провести сжимающийся слой  $\gamma^{(s)}(y_1)$ , который пересечет  $\gamma^{(u)}(x_2)$  в некоторой точке  $y_2 \in \gamma^{(u)}(x_2)$ . Это означает, что расстояние между точками  $T^n y_1, T^n y_2$  экспоненциально стремится к 0 при  $n \rightarrow \infty$ . Иными словами, каждый слой  $T^n(\gamma^{(u)}(x_1)), T^n(\gamma^{(u)}(x_2))$  очень длинный при больших  $n$ , но при этом слои экспоненциально близки друг другу. В таком случае, если  $T^n(\gamma^{(u)}(x_1))$  в какой-либо своей части пересекает  $Q_j$ , то и  $T^n(\gamma^{(u)}(x_2))$  в соответствующей части пересекает  $Q_j$ . Поэтому построенные выше выражения (6) при больших  $n$  почти не зависят от  $x \in Q_i$  и действительно определяют условные вероятности. Но теперь ясно, что существование предела (5) и его независимость от слоя являются простыми следствиями эргодической теоремы для цепей Маркова.

При аккуратном и последовательном проведении описанных рассуждений возникает ряд технических с математической точки зрения трудностей, которые удается преодолеть, делая ряд дополнительных предположений. Наиболее общие результаты принадлежат Боуэну и Рюэллю для аттракторов, являющихся так называемыми базисными множествами. В определении базисного множества, помимо условия гиперболичности, входит требование всюду плотности периодических траекторий на  $W$ .

**Т е о р е м а** [2, 3, 22]. *Если аттрактор  $W$  является базисным множеством, то предел (5) существует, не зависит от слоя, и преобразование  $T$  по отношению к распределению вероятностей  $\bar{P}$  является перемешивающим. Более того, для любого начального распределения  $P_0$  с плотностью  $\rho_0$ , сосредоточенного в окрестности и аттрактора  $W$ , итерации  $T^n P_0$  сходятся к  $\bar{P}$ .*

Таким образом, если аттрактор  $W$  — базисное множество, то он является стохастическим аттрактором. В приложении показано, что для отображения Пуанкаре, отвечающего, согласно распространенной точке зрения, модели Лоренца, также справедливо утверждение теоремы Боуэна — Рюэлля.

#### 4. МАРКОВСКИЕ РАЗБИЕНИЯ И СВЯЗЬ СО СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКОЙ

В равновесной статистической механике есть большой параметр — число степеней свободы. В теории динамических систем большим параметром служит время. Оказывается, что для аттракторов со свойством гиперболичности можно провести далекую аналогию со статистической механикой, если один большой параметр чисто формально заменить на другой.

Для того чтобы объяснить это подробнее, опишем вначале системы статистической механики, аналогию с которыми мы будем проводить. Рассмотрим так называемые спиновые модели статистической механики. В таких моделях конфигурацией служит последовательность значений спиновых переменных  $\varphi = \{\varphi(n),$

$-\infty < n < \infty$ }, где отдельная переменная принимает одно из конечного числа возможных значений. Термодинамика системы определяется трансляционно — инвариантным гамильтонианом, который задается функцией  $U(\varphi)$ , являющейся потенциалом взаимодействия переменной  $\varphi(0)$  со всеми остальными переменными. Если  $U(\varphi) = \sum_n U(\varphi(0), \varphi(n))$ , то мы имеем дело с бинарным взаимодействием. Однако с точки зрения общих принципов нет никаких оснований выделять потенциал бинарного взаимодействия. Единственное разумное требование к потенциалу  $U$  — убывание взаимодействия между частицами на больших расстояниях. Соответствующее условие можно сформулировать следующим образом: для любого  $m$  функцию  $U$  можно аппроксимировать функцией  $U_m$  переменных  $\varphi(n)$ ,  $|n| \leq m$  так, что для  $\max_{\varphi} |U - U_m| = \alpha_m$  ряд  $\sum m \alpha_m < \infty$ . Ослабление этого условия может привести к фазовым переходам, что в наших задачах неестественно.

Имея потенциал  $U$ , можно построить по нему распределение Гиббса. В статистической механике есть два способа сделать это [23 — 25]:

1. Рассмотрим конфигурации на отрезке  $[-m, m]$ , т. е. набор переменных  $\varphi^{(m)} = \{\varphi(n), |n| \leq m\}$  и граничные условия  $\bar{\varphi} = \{\varphi(n), |n| > m\}$ . Распределение Гиббса на отрезке  $[-m, m]$  при граничных условиях  $\bar{\varphi}$  строится как распределение вероятностей на конфигурациях  $\varphi^{(m)}$ , где вероятность конфигурации  $\varphi^{(m)}$  пропорциональна  $\exp \left\{ - \sum_{n=-m}^m U(T^n \varphi) \right\}$ ; здесь  $T$  — сдвиг,  $\varphi = \{\varphi(n), -\infty < n < \infty\}$  — бесконечная конфигурация, которая на  $[-m, m]$  совпадает с  $\varphi^{(m)}$  и вне  $[-m, m]$  совпадает с  $\bar{\varphi}$ . Выражение  $\sum_{n=-m}^m U(T^n \varphi)$  надо рассматривать как сумму внутренней энергии конфигурации  $\varphi^{(m)}$  и энергии взаимодействия  $\varphi^{(m)}$  с переменными  $\bar{\varphi}$  вне отрезка  $[-m, m]$ .

При  $m \rightarrow \infty$  мы получим в пределе распределение вероятностей на пространстве бесконечных конфигураций  $\varphi$ , которое при сделанном выше предположении о скорости убывания взаимодействия не будет зависеть от выбора последовательности граничных условий [26]. Это распределение вероятностей называется предельным распределением Гиббса, отвечающим потенциалу  $U$ .

2. Рассмотрим на пространстве бесконечных конфигураций  $\varphi$  распределение вероятностей  $P_0$ , при котором переменные  $\varphi(n)$  независимы и каждая переменная  $\varphi(n)$  принимает свои значения с равными вероятностями. Построим для любого  $m$  распределение вероятностей  $P_m$  на том же пространстве с плотностью по  $P_0$ , равной  $\frac{1}{\Xi_m} \exp \left\{ - \sum_{|n| \leq m} U(T^n \varphi) \right\}$ ,  $\Xi_m = \int \exp \left\{ - \sum_{|n| \leq m} U(T^n \varphi) \right\} dP_0$ .

Тогда существует предел этих распределений  $P_m \rightarrow \bar{P}$ ,  $m \rightarrow \infty$ , приводящий к тому же результату, что и в 1.

Теперь мы объясним, почему точки аттракторов с гиперболическими свойствами можно представлять себе как конфигурации бесконечной спиновой системы. В основе подхода лежит понятие марковского разбиения [22, 27]. Уточним использованное выше понятие параллелограмма. Мы будем сейчас под параллелограммом понимать подмножество  $C$  области  $U$ , расслаивающееся на локальные слои  $\gamma^{(s)}(x)$  устойчивых многообразий и на локальные слои  $\gamma^{(u)}(x)$  неустойчивых многообразий, причем любое пересечение  $\gamma^{(s)}(x) \cap \gamma^{(u)}(y)$  любых двух локальных слоев состоит в точности из одной точки.

Покроем аттрактор  $W$  параллелограммами  $C_1, C_2, \dots, C_r$  так, что два параллелограмма пересекаются только по границе. Тогда набор подмножеств  $\{C_1, C_2, \dots, C_r\}$  называется марковским разбиением, если для любого внутреннего локального слоя  $\gamma^{(u)} \subset C_i$  пересечение  $T\gamma^{(u)} \cap C_j$  состоит из одного или нескольких локальных слоев неустойчивого многообразия, лежащего в  $C_j$ , и (аналогично) если  $T\gamma^{(s)}$  лежит внутри  $C_j$ , то он целиком содержится в некотором устойчивом локальном слое  $\gamma_1^{(s)} \subset C_j$ .

Марковские разбиения существуют у систем Аносова [27], у аттракторов, являющихся базисными множествами [22]. Разбиения марковского типа весьма естественно строятся для преобразования, отвечающего модели Лоренца (см. след. статью).

Основное свойство марковского разбиения заключается в следующем. Бесконечное пересечение  $\bigcap_{-\infty}^{\infty} T^n C_{i_n}$  непусто и состоит в точности из одной точки, если ячейки  $C_i$  выбраны достаточно малыми и непусты все попарные пересечения  $C_{i_n} \cap TC_{i_{n+1}}$  ( $-\infty < n < \infty$ ). Тогда точку  $x = \bigcap_{-\infty}^{\infty} T^n C_{i_n}$  можно рассматривать как бесконечную конфигурацию спинов  $\varphi = \{\varphi(n), -\infty < n < \infty\}$ , где  $\varphi(n) = i_n$ . При этом точке  $Tx$  отвечает сдвинутая конфигурация спинов.

С помощью марковского разбиения можно объяснить полезное понятие топологической энтропии, характеризующее разнообразие траекторий динамической системы. Строгое определение этого понятия см. в [28, 29].

Будем считать, что в каждый момент времени наблюдается траектория данной точки не точно, а только с точностью до элементов марковского разбиения  $\{C_1, C_2, \dots, C_r\}$ , т. е. в каждый момент времени регистрируется только то, в какой ячейке  $C_{i_n}$  точка оказывается в момент времени  $n$ . Тогда вместо траектории длины  $n$  мы имеем набор номеров  $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}$ . Марковское разбиение обладает тем свойством, что слову  $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}$  отвечает траектория, если  $C_{i_k} \cap TC_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ .

Введем матрицу пересечений  $\Pi = \|\pi_{kl}\|$ , где  $\pi_{kl} = 1$ , если

$C_k \cap TC_i \neq \emptyset$  и 0 в остальных случаях. Из известной теоремы Фробениуса вытекает, что число возможных слов  $(i_0, i_1, \dots, \dots, i_{n-1})$  асимптотически при  $n \rightarrow \infty$  ведет себя как  $\text{const } \lambda^{(n)}$ , где  $\lambda$  — наибольшее собственное значение матрицы  $\Pi$ . Иными словами, логарифм числа возможных слов  $(i_0, \dots, i_{n-1})$ , т. е. числа возможных отрезков траекторий по отношению к марковскому разбиению, ведет себя как  $n \ln \lambda$ . Число  $\ln \lambda$  называется топологической энтропией. Оно не зависит от марковского разбиения, если ячейки  $C_i$  достаточно мелкие.

С топологической энтропией тесно связана так называемая мера с максимальной энтропией. Для построения этой меры, грубо говоря, надо взять при каждом  $m$  равномерное распределение вероятностей для пересечений  $\bigcap_{|n| \leq m} T^n C_i$  и устремить  $m \rightarrow \infty$ .

После того как точки аттрактора  $W$  представлены как конфигурации бесконечной спиновой системы, можно использовать описанный выше термодинамический формализм для построения многочисленных инвариантных распределений вероятностей на  $W$ . Для этого достаточно взять какой-либо потенциал взаимодействия  $U$  и при помощи него построить предельное распределение Гиббса. Если два потенциала  $U_1, U_2$  порождают одно и то же предельное распределение Гиббса, то они связаны специальным соотношением [22, 25]. В частности, описанное в предыдущем разделе инвариантное распределение  $\bar{P}$  оказывается предельным распределением Гиббса, если положить  $U = \ln \lambda^{(u)}$ .

## 5. ДИНАМИЧЕСКАЯ СТОХАСТИЧНОСТЬ И СЛУЧАЙНАЯ СТОХАСТИЧНОСТЬ

Как говорилось в разделе 1, при моделировании динамических систем на ЭВМ и в теории возмущений часто приходится рассматривать малые случайные возмущения динамических систем. При этом точка  $x$  вместо точки  $Tx$  переходит в точку  $x'$ , близкую к  $Tx$ . Можно представить себе, что точка  $x'$  получается в результате действия какого-либо случайного механизма, описываемого распределением вероятностей, сосредоточенным в окрестности точки  $Tx$ . Если плотность этого распределения вероятностей обозначить  $\pi(y | Tx)$ , то мы получаем цепь Маркова, при которой точка  $x$  переходит сначала в точку  $Tx$ , а затем в случайную точку  $y$ , выбранную в соответствии с распределением с плотностью  $\pi(y | Tx)$ . Траектория этой цепи Маркова есть, таким образом, последовательность точек  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Мы покажем, что в условиях гиперболичности, если  $y_0 \in M$  и радиусы окрестностей, где сосредоточены плотности  $\pi$ , не превосходят  $\varepsilon_0 > 0$ , то для каждой траектории цепи Маркова можно найти такую точку  $z \in W$ , что  $\text{dist}(y_n, T^n z) \leq \text{const } \varepsilon_0$  при всех  $n \geq 0$ . Это утверждение показывает, что у цепи Маркова траек-

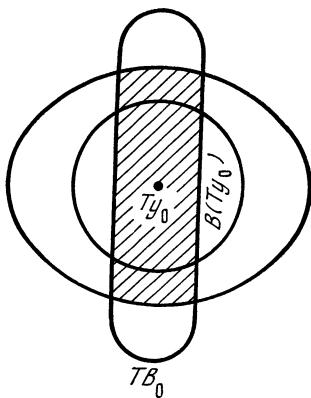


Рис. 6

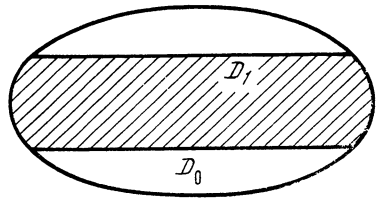


Рис. 7

торий в некотором смысле не больше, чем траекторий у исходной динамической системы, и поэтому из сказанного вытекает важный вывод: динамическая стохастичность, вызванная гиперболичностью, сильнее стохастичности, вызываемой малыми случайными добавками. Более точно было бы сказать, что при малом случайном возмущении динамической системы со свойством гиперболичности ее статистические свойства также меняются мало. Наиболее полные математические теоремы, относящиеся к этому кругу вопросов, принадлежат в случае гиперболических аттракторов Киферу [30, 31].

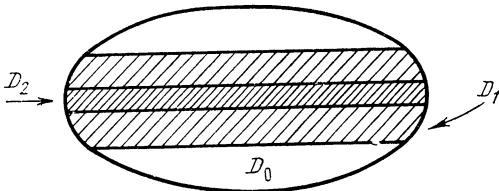


Рис. 8

Рассуждение, при помощи которого устанавливается сформулированное выше утверждение, появилось, по-видимому впервые, в работе Аносова [19] (см. также [32]).

Имея случайную траекторию  $y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$ , рассмотрим при любом  $m$  вид множества  $D_m$  точек  $z$ , для которых  $\text{dist}(y_n, T^n z) \leq \text{const} \cdot \varepsilon_0$  ( $0 \leq n \leq m$ ), где  $\text{const}$  выбрана большей по сравнению с  $\lambda > 1$ , фигурирующим в определении условия гиперболичности. При  $m = 0$   $D_0$  есть шар  $B(y_0)$  радиуса  $\text{const} \cdot \varepsilon_0$  с центром в точке  $y_0$ .

Возможные положения  $y_1$  согласно определению цепи Маркова лежат в шаре  $B(Ty_0)$  радиуса  $\varepsilon_0$  с центром в точке  $T(y_0)$  (рис. 6). Точки  $z'$ , удовлетворяющие условию  $\text{dist}(z', y_1) \leq \varepsilon_0$  для любого  $y_1 \in B(Ty_0)$ , заполняют шар  $B_1(Ty_0)$  радиуса  $(\text{const} - 1)\varepsilon_0$  с центром в точке  $Ty_0$ . Под действием  $T$  шар  $B_1(Ty_0)$

преобразуется в «эллипсоид»  $T(B_1(Ty_0))$ , вытянутый в растягивающемся направлении и сжатый в сжимающемся направлении.

На рис. 6 заштриховано множество  $T(B_1(Ty_0)) \cap B_1(Ty_0) = B_2(Ty_0)$ . На рис. 7 изображено множество  $D_1 = B(y_0) \cap T^{-1}(B_2(Ty_0))$ , т. е. множество тех  $z$ , для которых  $\text{dist}(y_0, z_0) \leq \text{const } \varepsilon_0$ ,  $\text{dist}(y_1, Tz) \leq \text{const } \varepsilon_0$ .

Опишем еще один шаг процесса. Пусть даны  $y_0, y_1$ . Рассмотрим точку  $Ty_1$  и ее  $\varepsilon_0$ -окрестность. Ясно, что  $y_2$  лежит в этой окрестности. Тогда  $(\text{const} - 1)\varepsilon_0$ -окрестность точки  $Ty_1$  состоит из точек, которые отстоят от  $y_1$  на расстояние, не превосходящее  $\text{const } \varepsilon_0$ . На рис. 8 изображен вид  $D_0, D_1, D_2$ . Рассуждая аналогично и дальше, мы получим, что множества  $D_m$  сжимаются и в пределе дают слой  $\gamma^{(s)}$ , который и состоит из точек  $z$  с нужным свойством.

Нам представляется, что условие гиперболичности, сформулированное в разделе 2, наиболее удобно для проверки его численными методами. Можно думать, что к этому условию надо добавить минимальные требования, чтобы вывести из них утверждение о существовании стохастического аттрактора. По-видимому, эти требования должны относиться к структуре границы  $U$ . Во всяком случае, в примере модели Лоренца (см. след. статью) часть границы  $U$  образована из сепаратрис периодических траекторий, и это обстоятельство используется весьма существенно. Вероятно, условие подобного типа следует потребовать и в общем случае для того, чтобы доказать в наиболее общей ситуации теоремы типа Боуэна — Рюэлля.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lorenz E.— J. Atmos. Sci., 1963, 20, N 21, p. 130.
2. Ruelle D.— Amer. J. Math., 1976, 98, N 3, p. 619.
3. Bowen R., Ruelle D.— Invent. Math., 1975, 29, p. 181.
4. Новиков С. П.— ЖЭТФ, 1972, 62, № 6, с. 1977.
5. Богоявленский О. И., Новиков С. П.— ЖЭТФ, 1973, 64, с. 1475.
6. Богоявленский О. И. Нелинейные осцилляционные режимы в некоторых физических проблемах. Препринт Ин-та теор. физики, № 197, 1977.
7. Вышкинд С. Я., Рабинович М. И.— ЖЭТФ, 1976, 71, № 2, с. 557.
8. Лазуткин В. Ф.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, 37, N 1, с. 186.
9. Шнирельман А.— УМН, 1974, 29, № 6, с. 181.
10. Бунимович Л. А.— Функци. анализ и его прил., 1974, 8, № 8, с. 73.
11. Joyce W. B.— Phys. Rev. D, 1974, 9, N 12, p. 3234.
12. Joyce W. B.— J. Acoust. Soc. America, 1975, 58, N 3, p. 643.
13. Ruelle D., Takens F.— Comm. Math. Phys., 1971, 20, p. 167.
14. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
15. Кушниренко А. Г.— 9-я летняя матем. школа. Киев. Ин-т мат. АН УССР, 1972, с. 52.
16. Хитецки С. Введение в дифференциальную динамику. М., «Мир», 1975.
17. Смейл С.— УМН, 1970, 25, № 1, с. 113.
18. Плякин Р. В.— Мат. сб., 1974, 94 (136), № 2, с. 243.

19. Аносов Д. В.— руды Математического ин-та им. Стеклова АН СССР, 1967, 90.
20. Hirsch M., Pugh C., Shub M.— Bull. Amer. Math. Soc., 1970, 76, N 5, p. 1015.
21. Песин Я. Б.— УМН, 1977, 32, № 4, с. 55.
22. Bowen R. Lecture Notes in Math. Berlin, Springer, 1975, p. 108.
23. Добрушин Р. Л.— Функци. анализ и его прил., 1968, 2, № 4, с. 31.
24. Рюэлль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. М., «Мир», 1971.
25. Синай Я. Г.— УМН, 1972, 27, № 4, с. 21.
26. Ruelle D.— Commun. Math. Phys., 1968, 9, p. 267.
27. Синай Я. Г.— Функци. анализ и его прил., 1968, 2, № 1, с. 64; № 3, с. 70.
28. Adler R., Konheim A., McAndrews M.— Trans. Amer. Math. Soc., 1965, 114, p. 309.
29. Динабург Е. И.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1971, 35, № 2, с. 324.
30. Кифер Ю. И.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, 38, № 5, с. 1091.
31. Кифер Ю. И.— Теория вероятн. и ее приложения, 1974, 19, № 3, с. 514.
32. Каток А. Б.— 9-я летняя матем. школа. Киев, Ин-т матем. УССР, 1972, с. 125.

## СТОХАСТИЧНОСТЬ АТТРАКТОРА В МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА

Л. А. БУНИМОВИЧ, Я. Г. СИНАЙ

Системой Лоренца называется система трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = -\sigma x + \sigma y;$$

$$dy/dz = rx - y - xz;$$

$$dz/dt = -bz + xy. \tag{1}$$

Она была выведена в работе Зальцмана [1] в результате обрезания уравнений галеркинского типа для задачи о тепловой конвенции между двумя плоскостями, находящимися при разной температуре. Параметры  $\sigma$ ,  $r$ ,  $b$  в (1) имеют физический смысл:  $b$  — константа, характеризующая размеры системы,  $\sigma$  — число Прандтля,  $r$  — число Релея. Е. Лоренц в известной работе [2] провел качественный анализ этой системы и ее моделирование на ЭВМ. В последнее время свойства этой модели широко обсуждаются в математической и физической литературе. Упомянем известные нам обзор Рюэлля [3], статьи Вильямса [4] и Гугенхеймера [5, 6], а также весьма важную для нас работу Афраймовича, Быкова и Шильникова [7]. Другие ссылки на математические работы можно найти в названных статьях. Из физических работ отметим статью Мартина и Мак-Логлина [8] о связи всей проблематики с проблемой возникновения турбулентности и работы Рабиновича и др. [9, 10].

Приведем сейчас ряд простых свойств модели Лоренца.

1. Дивергенция  $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(\sigma + 1 + b) < 0$ . Это означает, что лебеговский объем экспоненциально сжимается при движении вдоль траекторий системы (1).

2. Любое решение (1) ограничено при  $t > 0$ . Более точно, если  $u^2(t) = x^2(t) + y^2(t) + (z(t) - r - \sigma)^2$ , то при некоторых положительных постоянных  $C_1, C_2$  справедливо неравенство  $du/dt \leq -C_1 u + C_2$ . Отсюда вытекает, что всякая траектория раньше или позже попадает в шар  $u \leq 2C_2/C_1$  и затем остается в нем.

3. Неподвижные точки и их характеристики. Легко видеть, что точка  $O$  — начало координат — является неподвижной точкой для системы (1) при всех значениях входящих в нее параметров. При  $r < 1$  это единственная стационарная точка, и она является притягивающей. Когда значение  $r$  становится большим единицы, точка  $O$  теряет устойчивость и в системе возникают еще две неподвижные точки  $O_1 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$  и  $O_2 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ . При всех  $r > 1$  у системы (1) имеются только эти три неподвижные точки. При значениях параметра  $1 < r < \sigma(\sigma + b + 3)(\sigma - b - 1)^{-1} = r_0$   $O_1$  и  $O_2$  являются притягивающими. Однако при переходе  $r$  через значение  $r_0$  они теряют устойчивость, и при  $r > r_0$  у системы (1) нет ни одной притягивающей неподвижной точки. Отметим, что значения параметров  $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$ , при которых система (1) впервые численно исследовалась Лоренцем [2], удовлетворяют этому условию. При этом у точки  $O$  два устойчивых направления и одно неустойчивое, у точек  $O_1$  и  $O_2$  — одно устойчивое и два неустойчивых.

4. Система инвариантна относительно замены  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$ .

В работе [7] при помощи моделирования на ЭВМ и качественных методов теории бифуркаций изучалось поведение системы при  $r = 28, b = 8/3$  и при изменении параметра  $\sigma$  от 1 до 10. При этом были получены результаты, исследованию которых и посвящен наш последующий анализ. В [7] было обнаружено следующее.

1. При  $1 \leq \sigma < \sigma_1, \sigma_1 \approx 3,42$  точка  $O = (0, 0, 0)$  является неподвижной точкой с двумя показателями в левой полуплоскости и одним в правой. Две другие неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$  — притягивающие (притягивающие фокусы).

Обозначим ветви неустойчивой сепаратрисы точки  $O$  через  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Тогда при  $\sigma < \sigma_1$   $\Gamma_1$  ( $\Gamma_2$ ) притягивается к  $O_1$  ( $O_2$ ).

2. При  $\sigma = \sigma_1$  ветви  $\Gamma_1, \Gamma_2$  становятся двойкоасимптотическими, т. е. лежащими на устойчивой сепаратрисе точки  $O$ . Такая ситуация с общей точки зрения изучалась в работе Шильникова [11], который показал, что при прохождении параметра  $\sigma$  через  $\sigma_1$  рождаются две периодические гиперболические траектории



Рис. 1

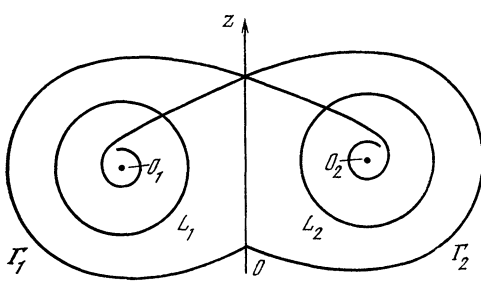
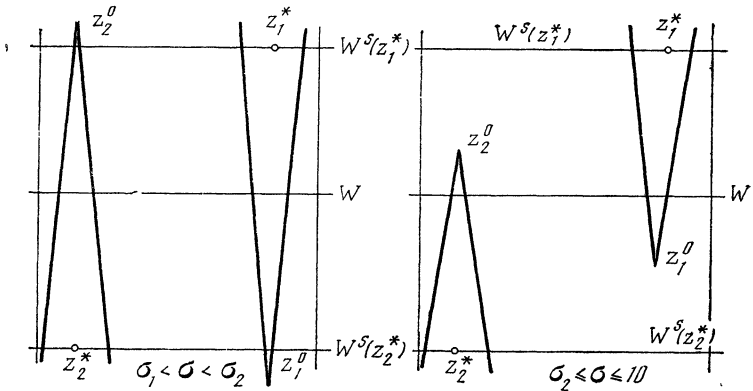


Рис. 2



$L_1$  и  $L_2$ , причем при  $\sigma > \sigma_1$   $\Gamma_1$  притягивается к  $O_2$ , а  $\Gamma_2$  притягивается к  $O_1$  (рис. 1).

3. При  $\sigma = \sigma_2$ ,  $\sigma_2 \approx 5,87$  происходит следующая бифуркация, состоящая в том, что сепаратриса  $\Gamma_1$  притягивается, наматываясь, к  $L_2$ , а сепаратриса  $\Gamma_2$  по симметрии притягивается к  $L_1$ .

То, что обычно называется аттрактором Лоренца, появляется при  $\sigma \geq \sigma_2$ . В интервале  $[\sigma_2, \sigma_3)$ ,  $\sigma_3 \approx 6,47$  в фазовом пространстве системы имеются три притягивающих множества: аттрактор Лоренца  $\Omega$  и состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$ . При переходе значения  $\sigma$  через  $\sigma_3$  периодические движения  $L_1$  и  $L_2$  стягиваются к  $O_1$  и  $O_2$ , и при  $\sigma_3 < \sigma \leq 10$  в системе имеется единственное устойчивое предельное множество — аттрактор Лоренца.

Для того чтобы нагляднее представить себе, что происходит, рассмотрим отображение последования Пуанкаре  $T$  плоскости  $z = 27$  в себя. Выбор этой плоскости объясняется тем, что она содержит неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$ . Возьмем произвольную точку  $a$  плоскости  $z = 27$ , в которой  $dz/dt < 0$ , т. е. интегральная кривая, проходящая через  $a$ , «протыкает» плоскость  $z = 27$  сверху вниз. Мы продолжаем такую интегральную кривую и в качестве  $Ta$  возьмем следующую точку на плоскости  $z = 27$ , в которой эта кривая снова «протыкает» сверху вниз плоскость  $z = 27$ .

Вид преобразования  $T$  при различных значениях параметра

о представлен на рис. 2. Здесь  $z_1^*$  и  $z_2^*$  — неподвижные точки  $T$ , возникающие на пересечении  $L_1$  и  $L_2$  с плоскостью  $z = 27$ ;  $W^s(z_1^*)$  и  $W^s(z_2^*)$  — пересечения с этой плоскостью устойчивых сепаратрис  $z_1^*$  и  $z_2^*$ ;  $z_1^0$  и  $z_2^0$  — соответственно пересечения  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с  $z = 27$ ;  $W$  — пересечение с этой плоскостью устойчивой сепаратрисы нуля. Правый треугольник (с основанием  $W^s(z_1^*)$  и вершиной  $z_1^0$ ) есть образ под действием преобразования  $T$  верхнего прямоугольника (со сторонами  $W$  и  $W^s(z_1^*)$ ). Аналогично левый треугольник есть образ нижнего прямоугольника.

Статистические свойства аттрактора Лоренца естественно объяснить, предположив, что отображение  $T$  обладает свойствами гиперболичности, подобными тем, которые обсуждались выше. Проверка выполнения этих свойств должна проводиться с помощью ЭВМ.

Отличие рассматриваемой ситуации от обсуждавшейся ранее состоит главным образом в разрывном характере отображения  $T$ . Тем не менее мы покажем, что описанную программу можно полностью провести.

Пусть  $\Pi_0$  — прямоугольник  $|x| \leq 1$ ,  $|y| \leq 1$ . Рассмотрим отображение  $\Pi_0$  в себя, которое обозначим через  $T$ . Отображение  $T$  задается следующим образом: на открытом прямоугольнике  $\Pi_0^{(1)} = \{ |x| < 1, 0 < y < 1 \}$  отображение задается при помощи функций  $\bar{x} = f_1(x, y)$ ,  $\bar{y} = g_1(x, y)$ , принадлежащих классу  $C^2$ . Соответственно на открытом прямоугольнике  $\Pi_0^{(2)} = \{ |x| < 1, -1 < y < 0 \}$  отображение  $T$  задается при помощи функций  $\bar{x} = f_2(x, y)$ ,  $\bar{y} = g_2(x, y)$  также класса  $C^2$ , причем  $f_2(x, y) = -f_1(-x, -y)$  и  $g_2(x, y) = -g_1(-x, -y)$ . Предполагается, что функции  $f_1$  и  $g_1$  ( $f_2$  и  $g_2$ ) допускают доопределение по непрерывности на отрезок  $W = \{ |x| \leq 1, y = 0 \}$ , так что  $\lim_{y \rightarrow 0} f_1(x, y) = x_1^0$  ( $\lim_{y \rightarrow 0} f_2(x, y) = x_2^0$ ) и  $\lim_{y \rightarrow 0} g_1(x, y) = y_1^0$  ( $\lim_{y \rightarrow 0} g_2(x, y) = y_2^0$ ), где  $0 < x_1^0 < 1$ ,  $-1 < y_1^0 < 0$ ,  $-1 < x_2^0 < 0$ ,  $0 < y_2^0 < 1$ . Преобразование  $T$  имеет неподвижную точку  $z_1^*$  ( $z_2^*$ ) типа седло в прямоугольнике  $\Pi_0^{(1)}$  ( $\Pi_0^{(2)}$ ) с координатами  $(x_1^*, 1)$  (соответственно  $(x_2^*, -1)$ ), где  $x_1^* < 0$  ( $x_2^* < 0$ ), корни характеристического уравнения в которой положительны. Отрезок  $y = 1$  ( $y = -1$ ) принадлежит устойчивому инвариантному многообразию точки  $z_1^*$  ( $z_2^*$ ). Предполагается, что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial f_1}{\partial x} \right\| < 1, \quad \left\| \left( \frac{\partial g_1}{\partial y} \right)^{-1} \right\| < 1; \\ & \left\| \left( \frac{\partial g_1}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial y} \right\| \left\| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right\| < \left( 1 - \left\| \frac{\partial f_1}{\partial x} \right\| \right) \left( 1 - \left\| \left( \frac{\partial g_1}{\partial y} \right)^{-1} \right\| \right); \\ & 1 - \left\| \left( \frac{\partial g_1}{\partial y} \right)^{-1} \right\| \left\| \frac{\partial f_1}{\partial x} \right\| > 2 \sqrt{\left\| \left( \frac{\partial g_1}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \right\| \left\| \left( \frac{\partial g_1}{\partial y} \right)^{-1} \right\| \left\| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right\|}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\|h(x, y)\| = \max_{(x, y) \in \Pi_0} |h(x, y)|$ . Аналогичные условия выполняются для функций  $f_2$  и  $g_2$ . Легко видеть, что эти неравенства выражают условие гиперболичности для конусов. Соответствующие конусы имеют общую границу, уравнение которой (в естественных координатах) есть  $x = y$ . Таким образом, расширяющийся конус задается условием  $y > x$ , а сжимающийся —  $x > y$ .

Рассмотрим на прямоугольнике  $\Pi_0$  совокупность кривых класса  $C^1$ , однозначно проектирующихся на ось абсцисс. Тогда каждая такая кривая задается на некотором отрезке  $[x_0, x_1]$  гладкой функцией  $y = f(x)$ . Пусть  $\Gamma$  — совокупность всех таких кривых, для которых  $f'(x) > 1$ . Тогда из условий (2) вытекает, что  $T\Gamma \subset \Gamma$ .

Образ  $T^k\Pi_0$  представляет собой объединение конечного (ограниченного сверху числом  $2^k$ ) числа замкнутых множеств. Два из этих множеств (содержащие седла  $z_1^*$  и  $z_2^*$ ) представляют собой криволинейные треугольники, две стороны которых есть образы отрезков правой и левой сторон прямоугольника  $\Pi_0$ ; вершина, в которой эти стороны пересекаются, есть точка  $z_1^0 = (x_1^0, y_1^0)$  (или  $z_2^0 = (x_2^0, y_2^0)$ ), а третья сторона — отрезок сжимающегося многообразия точки  $z_1^*$  (или  $z_2^*$ ). Все остальные множества из  $T^k\Pi_0$  имеют вид веретен, вытянутых в направлении оси ординат. Граница каждого из этих множеств состоит из двух компонент, которые пересекаются в двух точках (вершинах), одна из которых есть  $T^i z_1^0$ , а другая —  $T^j z_2^0$ , где  $0 \leq i, j \leq k$  и  $i \neq j$ . Такие множества мы будем называть ячейками. Ясно, что если две ячейки пересекаются по обеим вершинам, то одна из них целиком лежит внутри другой.

Ячейку с вершинами  $T^i z_1^0, T^j z_2^0$  будем называть основной, если она содержит все остальные ячейки с этими же вершинами. Рангом ячейки с этими вершинами мы будем называть максимальное из чисел  $i$  и  $j$ . Порядком ячейки  $\Delta$  будем называть такое максимальное число  $k$ , что  $\Delta \subset T^k\Pi_0$ . Заметим, что ранг ячейки не превосходит ее порядка. Ранг и порядок совпадают только для основных ячеек;  $y$ -длиной ячейки  $\Delta$  будем называть длину ее проекции на ось  $y$ .

Из условий (2) вытекает, что для любой ячейки  $\Delta$   $y$ -длина ее образа  $T\Delta$  превосходит  $y$ -длину ячейки  $\Delta$  не менее чем в  $1 + \vartheta$  раз, где число  $\vartheta > 0$  не зависит от  $\Delta$ . Заметим, что  $T\Delta$  может состоять из двух связанных компонент. В этом случае под  $y$ -длиной  $T\Delta$  мы подразумеваем сумму  $y$ -длин этих компонент. Регулярной компонентой множества  $\Omega$  мы будем называть гладкую кривую  $\omega \in \Omega$ , однозначно проектирующуюся на оси  $x$  и  $y$ , целиком лежащую в какой-либо ячейке  $\Delta$  и пересекающую  $\Delta$  по обеим вершинам. Эти вершины являются концами регулярной компоненты  $\omega$ . Разбиение  $\Omega$  на регулярные компоненты обозначим через  $\xi$ .

В дальнейшем мы будем предполагать, что  $z_1^0$  и  $z_2^0$  — неперидические точки (в противном случае доказательство теоремы 1

только упрощается). Тогда существуют такие окрестности  $U(z_1^0) = U_1$  и  $U(z_2^0) = U_2$ , что  $T^i U_j \cap W = \emptyset$ , где  $i = 0, 1, \dots, \dots, p$ ;  $j = 1, 2$ , а число  $p$  таково, что  $(1 + \delta)^p = 2 + \delta$ , где  $\delta > 0$ . Поэтому если какая-то ячейка разбивается на две (после попадания на  $W$ ) и одна из образовавшихся ячеек имеет малую  $y$ -длину  $l$  и целиком содержится в  $U_1$  или  $U_2$ , то  $y$ -длина соответствующей ячейки не менее чем  $p$  итераций будет расти, после чего, когда образ этой ячейки впервые пересечет  $W$ ,  $y$ -длина большей из двух образовавшихся ячеек будет не менее чем  $l(1 + \delta/2)$ .

Далее, из условий (2) вытекает, что существует расщепление  $\eta$  прямоугольника  $\Pi_0$  на почти горизонтальные кривые, такое, что если кривая  $\tilde{\Gamma}_a \in \eta$  пересекает ось  $y$  в точке  $y = a$ ,  $\tilde{\Gamma}_b \in \eta$  — в точке  $y = b$  и  $T\tilde{\Gamma}_a \cap \tilde{\Gamma}_b \neq \emptyset$ , то  $T\tilde{\Gamma}_a \subset \tilde{\Gamma}_b$ . Действительно, из (2) следует, что счетная совокупность кривых  $\tilde{\Gamma}_W$ , таких, что  $T^k \tilde{\Gamma}_W \subset W$ , при некотором  $k > 0$  всюду плотна на  $\Pi_0$ . Эта счетная совокупность естественно продолжается до полного разбиения  $\Pi_0$ , обладающего требуемыми свойствами. Из условий (2) получаем, что длина любой кривой из  $\eta$  под действием  $T$  уменьшается не менее чем в  $1 + \gamma$  раз, где  $\gamma > 0$ .

**Теорема 1<sup>1</sup>.** *На множестве  $\Omega$  (аттракторе Лоренца) существует мера  $\tilde{\mu}$ , обладающая следующими свойствами.*

- 1)  $\tilde{\mu}$  инвариантна относительно преобразования  $T$ ;
- 2) Условная мера  $\tilde{\mu}(\cdot | C_\xi)$ , индуцированная  $\tilde{\mu}$  на почти каждой регулярной компоненте  $C_\xi$  множества  $\Omega$ , задается плотностью  $\tilde{f}(\cdot)$  по нормированной длине  $C_\xi$ ;
- 3) Имеет место следующая альтернатива: либо  $T$  как автоморфизм пространства с мерой обладает перемешиванием и является  $K$ -автоморфизмом<sup>2</sup>, либо спектр динамической системы  $(\Omega, \tilde{\mu}, T)$  содержит циклическую компоненту.

Доказательство этой теоремы мы проведем в несколько этапов. Покажем прежде всего, что на каждой регулярной компоненте  $C_\xi$  множества  $\Omega$  можно определить нормированную меру, задающуюся плотностью по длине  $C_\xi$  и естественно связанную с преобразованием  $T$ .

Пусть  $x \in \Omega$ . Регулярную компоненту  $\Omega$ , содержащую точку  $x$ , будем обозначать через  $C_\xi(x)$ . Рассмотрим отображение  $T^{-n}$ ,

<sup>1</sup> Утверждение теоремы справедливо и без предположения о симметрии системы ( $f_2(x, y) = -f_1(-x, -y)$ ,  $g_2(x, y) = -g_1(-x, -y)$ ).

<sup>2</sup> Можно доказать более сильное свойство, что  $T$  является  $B$ -автоморфизмом. Это означает, что динамическая система, порожденная преобразованием  $T$  с инвариантной мерой  $\mu$ , метрически изоморфна преобразованию сдвига в пространстве реализаций последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин. Для физика это свойство системы не является принципиально важным, так как соответствующий изоморфизм может осуществляться при помощи весьма сложных функций. Однако в математической литературе этому свойству системы отводится значительное место.

где  $n > 0$ . Естественное разбиение множества  $\Omega$ , индуцируемое отображением  $T^{-n}$  и разбиением  $\xi$ , обозначим через  $\xi_n = T^{-n}\xi$ . Тогда  $T^{-n}C_\xi(x) = C_{\xi_n}(T^{-n}x)$ . Легко видеть, что преобразование  $T^{-n}$  отображает  $C_\xi(x)$  на  $C_{\xi_n}(T^{-n}x)$  взаимно-однозначно. На каждом элементе  $C_{\xi_n}(T^{-n}x)$  разбиения  $\xi_n$  рассмотрим нормированную меру, порожденную длиной. Образ этой меры под действием преобразования  $T^n$  на  $C_\xi(x)$  обозначим через  $\mu_n$ . Мера  $\mu_n$  при любом  $n$  задается плотностью  $f_n(\cdot)$  по нормированной длине на  $C_\xi(\cdot)$ . Эта плотность всюду положительна на  $C_\xi(\cdot)$ , а при подходе к границе  $C_\xi(\cdot)$  стремится к нулю со степенной асимптотикой. Соответствующий показатель степени  $\alpha$  выражается через собственные значения точки  $O$  в системе дифференциальных уравнений (1).

Найдем теперь аналитический вид плотности  $f_n$ . Пусть на компоненте  $C_\xi^0$  задана условная мера  $\mu(\cdot | C_\xi^0)$ . Тогда отображение  $T$  индуцирует на  $C_\xi = TC_\xi^0$  меру  $\mu_1$ , задаваемую следующим выражением:

$$d\mu_1(x | C_\xi) = \frac{d\mu(T^{-1}x | C_\xi^0) J(T^{-1}x)}{\int_{C_\xi^0} J(T^{-1}y) d\mu(T^{-1}y | C_\xi^0)},$$

где  $J(z)$  — якобиан преобразования  $T$  в точке  $z$ . Отсюда вытекает, что если  $y_1, y_2 \subset C_\xi$ , то

$$\frac{f_n(y_1)}{f_n(y_2)} = \frac{J(T^{-1}y_2) J(T^{-2}y_2) \dots J(T^{-n}y_2)}{J(T^{-1}y_1) J(T^{-2}y_1) \dots J(T^{-n}y_1)}. \quad (3)$$

Пусть  $\mathfrak{M}_n = \{(x, y) \in \Pi : |y| < (1 + \vartheta/2)^{-n}\}$ . Мы исключаем из рассмотрения множество  $\mathfrak{M}_{n_0} = \bigcup_{n \geq n_0} \{z : T^n z \in \mathfrak{M}_n\}$ , где  $n_0$  — достаточно большое натуральное число. Все выбираемые в дальнейшем большие числа ( $r, m$  и т. д.) предполагаются превосходящими  $n_0$ . Легко видеть, что  $\mu(\mathfrak{M}_{n_0}) < \text{const} (1 + \vartheta/2)^{-n_0}$ .

Покажем, что функции  $f_n(x)$  равномерно сходятся на  $C_\xi$ . Концы элемента  $C_\xi$  есть точки  $T^{k_1}z_1^0$  и  $T^{k_2}z_2^0$ . Возьмем число  $m > \max(k_1, k_2)$ . Тогда при  $n \geq m$  выполняется неравенство

$$\left| \frac{f_n(x)}{f_m(x)} - 1 \right| < C(1 + \vartheta)^{-m}. \quad (4)$$

Действительно, рассмотрим образ нормированной меры, порожденной длиной на  $C_{\xi_n}(T^{-n}x)$  под действием  $T^{n-m}$ . Этот образ есть нормированная мера на  $C_{\xi_m}(T^{-m}x)$ . Аналогично предыдущему получаем, что отношение значений плотности этой меры в любых двух точках  $y_1, y_2 \in C_{\xi_m}(T^{-m}x)$  равно отношению произведений соответствующих якобианов  $\frac{J(T^{-1}y_2) \dots J(T^{-(n-m)}y_2)}{J(T^{-1}y_1) \dots J(T^{-(n-m)}y_1)}$ . Так как  $m$  вы-

брано бóльшим, чем  $\max(k_1, k_2)$ , то отображение  $T^{n-m} : C_{\xi_n}(T^{-n}x) \rightarrow C_{\xi_m}(T^{-m}x)$  является гладким. Поэтому в силу того, что под действием преобразования  $T^{-1}$  длина образа  $C_{\xi}$  уменьшается не менее чем в  $(1 + \vartheta)$  раз, имеем при  $k > m$

$$\left| \frac{J(T^{-k}y_1)}{J(T^{-k}y_2)} - 1 \right| < \bar{C} \rho(T^{-k}y_1, T^{-k}y_2) < \bar{C} \Lambda_p (1 + \vartheta)^{-k}, \quad (5)$$

где  $\bar{C}$  — константа, а  $\Lambda_p$  — максимальная длина регулярной компоненты  $C_{\xi}$ . Поэтому рассматриваемое отношение произведений якобианов отличается от единицы не более чем на  $\bar{C} \Lambda_p (1 + \vartheta)^{-m}$ , где  $\bar{C}$  — некоторая другая константа.

Если теперь взять такую точку  $y_2$ , что  $f_{C_{\xi_m}}(y_2) = 1$ , то мы получим следующее утверждение: плотность меры (по нормированной длине), возникающей под действием  $T^{n-m}$  на  $C_{\xi_m}(T^{-m}x)$ , отличается от единицы не более чем на  $\bar{C} \Lambda_p (1 + \vartheta)^{-m}$ . Мера, задаваемая на  $C_{\xi_m}(T^{-m}x)$  нормированной длиной, имеет плотность, тождественно равную единице. Под действием  $T^{-m}$  плотность построенной на  $C_{\xi_m}(T^{-m}x)$  меры и единица умножаются на одно и то же число, и поэтому их отношение не меняется. Тем самым неравенство (4) доказано. Следовательно, плотности  $f_n(x)$  равномерно сходятся. Обозначим соответствующий предел (при  $n \rightarrow \infty$ ) через  $\bar{f}_{C_{\xi}}(x)$ , а индуцированную им меру — через  $\bar{\mu}(\cdot | C_{\xi})$ .

Обозначим через  $\gamma_1^0$  и  $\gamma_2^0$  кривые из непрерывного семейства  $\eta$ , содержащие соответственно точки  $z_1^0$  и  $z_2^0$ . Горизонтальной полосой назовем множество, лежащее между двумя кривыми из  $\eta$  и принадлежащее целиком верхнему прямоугольнику  $\Pi_0^{(1)}$  или нижнему прямоугольнику  $\Pi_0^{(2)}$ . Горизонтальная полоса является граничной, если она содержит  $\gamma_1^0$  или  $\gamma_2^0$ .

Мы будем говорить, что преобразование  $T$  обладает свойством дробления, если существуют нижняя и верхняя горизонтальные полосы  $\tilde{\Pi}_1$  и  $\tilde{\Pi}_2$  и натуральное число  $m$  такие, что выполняется включение  $T^m(\tilde{\Pi}_1 \cup \tilde{\Pi}_2) \subset \tilde{\Pi}_1 \cup \tilde{\Pi}_2$ . В этом случае проекция множества всех ячеек ранга  $\geq m$  на вертикальный отрезок  $\{x = 0, |y| < 1\}$  состоит из конечного числа  $d$  ( $d \geq 5$ ) непересекающихся отрезков. В дальнейшем мы будем предполагать, что  $T$  не обладает свойством дробления. Достаточным (но не необходимым) условием для этого является справедливость неравенства  $\|(\partial g_1 / \partial y)^{-1}\| < 1/\sqrt[3]{2}$ . Если  $T$  обладает свойством дробления, то выполняется вторая возможность альтернативы, сформулированной в п. 3 теоремы 1. Доказательство существования инвариантной меры в этом случае значительно упрощается, так как при этом не бывает коротких (см. ниже) ячеек.

Действительно, вершины всех ячеек в этой ситуации лежат на граничных кривых конечного числа горизонтальных полос. Собст-

венной функцией, порождающей циклическую компоненту в спектре, является функция, равная  $e^{i2\pi/(d+1)}$  на граничных полосах,  $e^{i8\pi/(d+1)}$  — на следующей паре полос и т. д., ее значение на центральной (содержащей  $W$ ) паре полос равно 1. Отметим, что для того чтобы такая ситуация имела место, необходимо существование такого натурального числа  $e$  ( $e = (d + 3)/2$ ), что  $T^e z_1^0$  и  $T^e z_2^0$  попадают на сжимающиеся сепаратрисы периодических точек (периода  $(d + 1)/2$ ). Поэтому существование подобного режима невозможно установить при численных экспериментах на ЭВМ.

Согласно определению преобразования  $T$  число горизонтальных полос, содержащихся в верхнем прямоугольнике  $\Pi_0^{(1)}$ , должно совпадать с количеством горизонтальных полос, принадлежащих нижнему прямоугольнику  $\Pi_0^{(2)}$ . Поэтому общее число горизонтальных полос (включающее  $\tilde{\Pi}_1$ ,  $\tilde{\Pi}_2$  и все их образцы) обязано быть четным. При этом к сепаратрисе  $W$  обязательно примыкают две горизонтальные полосы, которые мы будем называть центральными. Далее, общее количество горизонтальных полос, очевидно, не может равняться двум и в силу второго и третьего из неравенств (2) не может равняться четырем. Действительно, если общее число горизонтальных полос равно четырем, то образ как  $\tilde{\Pi}_1$ , так и  $\tilde{\Pi}_2$  (под действием  $T$ ) принадлежит паре центральных горизонтальных полос. При этом образ верхней центральной полосы принадлежит  $\tilde{\Pi}_2$ , а нижней —  $\tilde{\Pi}_1$ . Дополнение к совокупности горизонтальных полос состоит из двух связанных множеств, переходящих друг в друга под действием  $T$ . В силу свойств симметрии  $T$   $y$ -длины этих множеств совпадают. Поэтому условие растяжения (2) вдоль направления оси  $y$  нарушается.

Пусть  $D_n = \{(x, y) : |y| < 1/(1 + \vartheta/4)^n\}$ . Мы исключаем из рассмотрения множество  $\tilde{D}_{n_0} = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} D_n$ , где  $n_0$  — достаточно большое натуральное число. Все выбираемые в дальнейшем большие числа ( $r$ ,  $n$  и т. д.) предполагаются превосходящими  $n_0$ . Легко видеть, что  $\nu(D_{n_0}) < \vartheta/2 (1 + \vartheta/4)^{n_0}$ , где  $\nu$  — лебегова мера на  $\Pi_0$ .

Перейдем теперь ко второму этапу доказательства теоремы 1.

Будем называть две регулярные компоненты  $C'_\xi$ ,  $C''_\xi \in \Omega$  канонически изоморфными, если для любой точки  $x \in C'_\xi$  найдется единственная точка  $y \in C''_\xi$  и единственная кривая  $\tilde{\Gamma}_x \in \eta$ , такие, что  $y \in \tilde{\Gamma}_x$ ; и обратно — для любой точки  $y \in C''_\xi$  однозначно определяются  $x \in C'_\xi$  и  $y \in \tilde{\Gamma}_y \in \eta$ , так что  $x \in \tilde{\Gamma}_y$ .

Пусть  $\Delta$  — ячейка  $n$ -го порядка;  $C'_\xi$  и  $C''_\xi$  — две регулярные компоненты множества  $\Omega$ , пересекающие  $\Delta$  по обоим ее вершинам. Тогда согласно доказанному выше  $C'_\xi$  и  $C''_\xi$  — канонически изоморфны. Обозначим соответствующий канонический изоморфизм через  $\pi : C'_\xi \rightarrow C''_\xi$ .

Покажем, что существуют такие постоянные  $\hat{C}$ ,  $\theta > 0$ , что

$$\left| \frac{\tilde{\mu}(A | C'_\xi)}{\tilde{\mu}(\pi(A) | C''_\xi)} - 1 \right| < \hat{C} \max(\Lambda_c, \Lambda_p) \{ \max[(1 + \theta), (1 + \gamma)] \}^{-[n/2]\theta}, \quad (6)$$

где  $\Lambda_c$  — максимальная длина элемента из  $\eta$ . Из доказанного выше утверждения вытекает, что при любом  $k > m$

$$\begin{aligned} \frac{\mu_k(A | C'_\xi) [1 - \tilde{C}\Lambda_p(1 + \theta)^{-k}]}{\mu_k(\pi(A) | C''_\xi) [1 + \tilde{C}\Lambda_p(1 + \theta)^{-k}]} &\leq \frac{\tilde{\mu}(A | C'_\xi)}{\tilde{\mu}(\pi(A) | C''_\xi)} \leq \\ &\leq \frac{\mu_k(A | C'_\xi) [1 + \tilde{C}\Lambda_p(1 + \theta)^{-k}]}{\mu_k(\pi(A) | C''_\xi) [1 - \tilde{C}\Lambda_p(1 + \theta)^{-k}]} \end{aligned}$$

Далее, рассмотрим  $T^{-[n/2]}C'_\xi$  и  $T^{-[n/2]}C''_\xi$ . Очевидно, что при любом  $k$   $T^{-k}C'_\xi$  и  $T^{-k}C''_\xi$  тоже канонически изоморфны. Поэтому, если  $\rho(T^{-k}C'_\xi)$  — образ длины  $C'_\xi$  на элементе  $T^{-k}C'_\xi$ , справедливо равенство  $\rho(T^{-k}C'_\xi) = \int_{T^{-k}C''_\xi} \Delta(x) d\rho_{C''_\xi}(x)$ , где

$$\Delta(x) = \frac{J(x)J(Tx) \dots J(T^{k-1}x)}{J(\pi(x))J(\pi(Tx)) \dots J(\pi(T^{k-1}x))}.$$

Из вида преобразования  $T$  вытекает, что если расстояние вдоль слоя сжимающегося расщепления между  $x$  и  $\pi(x)$  достаточно мало, то  $\Delta(x)$  мало отличается от единицы. Другими словами, существует малое число  $d > 0$ , такое, что если  $\text{dist}(x, \pi(x)) < d$ , то существует  $\theta > 0$ , такое, что  $|\Delta(x) - 1| < C[\text{dist}(x, \pi(x))]^\theta$ . Выбрав теперь  $n$  столь большим, чтобы  $\Lambda_c(1 + \gamma)^{-n/2}$  было меньше, чем  $d$ , мы получаем следующее неравенство:

$$\frac{\mu_{[n/2]}(A | C'_\xi)}{\mu_{[n/2]}(\pi(A) | C''_\xi)} < \frac{1 + C\Lambda_p(1 + \gamma)^{-[n/2]\theta}}{1 - C\Lambda_p(1 + \gamma)^{-[n/2]\theta}}.$$

Аналогично можно оценить отношение этих мер снизу. Таким образом, из доказанных выше неравенств вытекает справедливость неравенства (6).

Докажем теперь следующее основное

**Предложение 1.** Для любого целого  $r > 0$  существует такое  $N(r)$ , что для любой ячейки  $\Delta_1$  ранга, не превосходящего  $r$ , и любой основной ячейки  $\Delta_2$  ранга  $r$   $T^N\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset$  при  $N \geq N(r)$ , и это пересечение содержит ячейку, пересекающую  $\Delta_2$  по обеим ее вершинам.

**Доказательство.** Доказательство будем вести индукцией по  $r$ . При  $r = 1$  данное утверждение очевидно, так как существ-



вует всего две ячейки первого ранга и в силу условий (2) образ каждой такой ячейки должен пересекаться с  $W$ . Поэтому образ под действием  $T$  одной из получившихся частей есть ячейка, пересекающая основную ячейку первого порядка по обеим вершинам.

Пусть наше утверждение верно для всех  $r < r_0$ . Докажем, что оно справедливо для  $r = r_0$ . По доказанному выше из каждой ячейки  $\Delta$  под действием преобразования  $T$  получается либо одна (если эта ячейка  $\Delta$  не пересекала  $W$ ), либо две ячейки.

Рассмотрим ячейку  $\tilde{\Delta}^{(r_0)}$   $r_0$ -го порядка, имеющую ранг  $r_0$ . Заметим, что таких ячеек всего две ( $\tilde{\Delta}^{(r_0)}$  и  $\tilde{\tilde{\Delta}}^{(r_0)}$ ) и они симметричны относительно замены  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$ . Тогда, если прообраз этой ячейки не примыкал к линии разрыва  $W$ , требуемое утверждение следует непосредственно из предположения индукции.

Исследуем теперь, что происходит, если осуществляется вторая возможность. Тогда вершины ячейки  $\tilde{\Delta}^{(r_0)}$  есть  $z_1^0$  и  $T^{r_0} z_2^0$  (для  $\tilde{\tilde{\Delta}}^{(r_0)}$ :  $z_2^0$  и  $T^{r_0} z_1^0$ ). Рассмотрим образы  $T\tilde{\Delta}^{(r_0)}, \dots, T^{r_0-2}\tilde{\Delta}^{(r_0)}$ . Если хотя бы один из этих образов ячейки  $\tilde{\Delta}^{(r_0)}$  пересекается с  $W$ , то существует такое  $k \leq r_0 - 1$ , что под действием  $T^k$  из ячейки  $\tilde{\Delta}^{(r_0)}$  образуются хотя бы две ячейки, одна из которых имеет ранг, не превосходящий  $r_0 - 1$ , и в этом случае снова все следует из предположения индукции.

Пусть теперь за  $r_0 - 1$  преобразований ячейка  $\tilde{\Delta}^{(r_0)}$  не разбилась на две. Рассмотрим  $T^{r_0}\tilde{\Delta}^{(r_0)}$ . Этот образ имеет вершину  $T^{r_0} z_1^0$ , общую с ячейкой  $\tilde{\tilde{\Delta}}^{(r_0)}$ . Кроме того, преобразование  $T$  сохраняет ориентацию ячеек, т. е. у любой ячейки с вершинами  $T^i z_1^0, T^j z_2^0$  вершина  $T^i z_1^0$  имеет всегда меньшую координату  $y$ . Поэтому  $T^{r_0}\tilde{\Delta}^{(r_0)}$  либо целиком лежит внутри  $\tilde{\tilde{\Delta}}^{(r_0)}$ , чего быть не может в силу условия растяжения (2), либо состоит из двух ячеек, одна из которых пересекает ячейку  $\tilde{\tilde{\Delta}}^{(r_0)}$  по двум вершинам, а другая, имеющая вершины  $z_1^0$  и  $T^{2r_0} z_2^0$ , целиком содержится в ячейке  $\tilde{\Delta}^{(r_0)}$ . Однако в этом случае легко показать, что ячейку  $\tilde{\Delta}^{(r_0)}$  пересекают только такие прообразы  $W$ , которые имеют вид  $T^{-mr_0}$ , где  $m$  — натуральное число. Очевидно, что в силу условия (2) и при отсутствии свойства дробления это может быть лишь при  $r_0 = 1$ . А для случая  $r_0 = 1$ , как было показано выше, наше утверждение справедливо. Тем самым предложение 1 полностью доказано.

Заметим, что из доказательства вытекает оценка  $N(r) \leq C_3 r^2$ .

Будем называть ячейку  $n$ -го порядка длиной, если ее  $y$ -длина больше, чем  $C_4/(1 + \delta/2)^n$ , где  $C_4$  — некоторая положительная константа, не зависящая от  $n$ . Ячейку  $n$ -го порядка, не являющуюся длинной, назовем короткой.

**Предложение 2.** Существует такая константа  $C_5$ , что любая длинная ячейка  $n$ -го порядка за  $C_5 n$  итераций преобра-

зования  $T$  пересечет по двум вершинам какую-нибудь ячейку ранга  $r$ , если  $r$  достаточно (точная оценка снизу указывается в ходе доказательства) велико.

**Доказательство.** Рассмотрим какую-либо длинную ячейку  $\Delta$  ранга  $n$ . Тогда за  $pn$  преобразований длина образа  $\Delta$  станет порядка константы, если соответствующие образы не пересекались с  $W$ . Если же такое пересечение имело место, то возможны два случая:

1)  $y$ -длина бóльшей из образовавшихся после разбиения образа  $\Delta$  на две ячейки превосходит диаметр окрестностей  $U_1$  и  $U_2$ , который мы обозначим через  $D$ . Тогда в силу того, что  $y$ -длины всех ячеек ограничены сверху числом 2, не более чем за  $C_6 \log_{1+\delta/2} \frac{2}{D}$  итераций преобразования  $T$  должно произойти разбиение рассматриваемой ячейки на две, одна из которых имеет ранг  $C_6 \log_{1+\delta/2} \frac{2}{D}$ , и если  $r > C_6 \log_{1+\delta/2} \frac{2}{D}$ , то предложение 2 вытекает из предложения 1.

2)  $y$ -длина максимальной (по  $y$ -длине) из образовавшихся из  $\Delta$  ячеек меньше  $D$ . Тогда в силу определения окрестностей  $U_1$  и  $U_2$  не более чем за  $C_7 pn$  итераций из рассматриваемой ячейки получится ячейка  $y$ -длины, не меньшей, чем  $D$ . Дальнейшее рассуждение проводится аналогично случаю 1). Таким образом, предложение 2 доказано.

Из предложений 1 и 2 вытекает, что образ любой длинной ячейки  $n$ -го порядка под действием некоторой степени  $k$  преобразования  $T$  (где  $k \leq C_3 r^2 + C_6 \log_{1+\delta/2} \frac{2}{D} + C_7 pn$ ) пересечет по двум вершинам все основные ячейки ранга, не превосходящего  $r$ , т. е. все ячейки, порядок которых не превосходит  $r$ . Кроме того, для любого  $r$  существует  $r = \hat{r}(r)$ , такое, что  $T^{\hat{r}} \Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset$  для любых ячеек  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$   $r$ -го порядка.

Обозначим через  $\mathfrak{M}_n$  объединение коротких ячеек  $n$ -го порядка. Справедливо следующее

**Предложение 3.**  $\nu(T^{-n}\mathfrak{M}_n) < C_8 n^\beta / (1 + \vartheta)^n$ , где  $\beta > 0$ ,  $C_8$  — константа,  $n$  — достаточно большое натуральное число, а  $\nu$  — мера Лебега на прямоугольнике  $\Pi_0$ .

Для доказательства отметим, что из условий (2) вытекают следующие неравенства:  $|J_i(z_i)| < \kappa |dg_i/du_i|$ , где  $0 < \kappa < 1$ ,  $z_i = (x_i, y_i) \in \Pi_0^{(i)}$ ,  $J_i(\cdot)$  — якобиан ограничения преобразования  $T$  на  $\Pi_0^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ). Далее, как уже отмечалось, минимальный коэффициент растяжения в направлении  $y$  равен  $1 + \vartheta$ . Кроме того, существование окрестностей  $U_1$  и  $U_2$  обеспечивает доминирование процесса растяжения образов регулярных компонент множества  $\Omega$  под действием итераций преобразования  $T$  над процессом дробления, которое происходит при пересечении соответствующих образов с  $W$ .

Пусть  $\Delta$  — произвольная ячейка. Покажем, что для любой точки  $z \in \Omega$  существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(\Delta | C_{\xi_{-n}}(z))$ , не зависящий от  $z$ . Возьмем достаточно большое число  $r$  и рассмотрим совокупность ячеек  $r$ -го порядка. Для каждой ячейки  $\Delta^{(r)}$  рассмотрим число, равное  $\tilde{\mu}(\Delta^{(r)} | C_{\xi_{-n}}(z))$ . Совокупность этих чисел представляет собой распределение вероятностей  $\tilde{\mu}_n^{(r)}(z)$  на ячейках  $r$ -го порядка.

Справедлива следующая

**Лемма 1.** Для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся такие  $r_0(\varepsilon)$  и  $n_0(r, \varepsilon) = n_0$ , что при любых  $r > r_0$ ;  $n_1, n_2 > n_0$ ;  $z_1, z_2 \in \Omega \setminus \mathfrak{M}_{n_0}$

$$\text{Var} [\tilde{\mu}_{n_1}^{(r)}(z_1) - \tilde{\mu}_{n_2}^{(r)}(z_2)] < \varepsilon.$$

Доказательство этой леммы проводится следующим образом. Рассмотрим соотношение

$$\tilde{\mu}(\Delta^{(r)} | C_{\xi_{-n}}(z)) = \sum_{\tilde{\Delta}^{(r)}} \tilde{\mu}(T^{-\hat{r}}\tilde{\Delta}^{(r)} | C_{\xi_{-n}}(z)) \tilde{\mu}(\Delta^{(r)} | T^{-\hat{r}}\tilde{\Delta}^{(r)} \cap C_{\xi_{-n}}(z)), \quad (7)$$

где суммирование производится по всем ячейкам  $\tilde{\Delta}^{(r)}$  ранга  $r$ . Совокупность чисел  $\tilde{\mu}(T^{-\hat{r}}\tilde{\Delta}^{(r)} | C_{\xi_{-n}}(z)) = \tilde{\mu}(\tilde{\Delta}^{(r)} | C_{\xi_{-(n-\hat{r})}}(T^{-\hat{r}}z))$  представляет собой распределение вероятностей  $\tilde{\mu}_{n-\hat{r}}^{(r)}(T^{-\hat{r}}z)$ .

Рассмотрим теперь вторые сомножители в произведениях, стоящих в (7) под знаком суммирования. Имеем

$$\tilde{\mu}(\Delta^{(r)} | T^{-\hat{r}}\tilde{\Delta}^{(r)} \cap C_{\xi_{-n}}(z)) = \tilde{\mu}(T^{\hat{r}}\Delta^{(r)} | \tilde{\Delta}^{(r)} \cap C_{\xi_{-(n-\hat{r})}}(T^{-\hat{r}}z)).$$

Следовательно, этот набор чисел мы можем рассматривать как матричные элементы  $P_{n,z}(\Delta^{(r)} | \tilde{\Delta}^{(r)})$  некоторой стохастической матрицы  $P_{n,z}$ . Поэтому, используя (7), можно написать

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_n^{(r)}(z) &= \tilde{\mu}_{n-\hat{r}}^{(r)}(T^{-\hat{r}}z) P_{n,z} = \tilde{\mu}_{n-2\hat{r}}^{(r)}(T^{-2\hat{r}}z) P_{n-\hat{r}, T^{-\hat{r}}z} P_{n,z} = \\ &= \dots = \tilde{\mu}_{n-k\hat{r}}^{(r)}(T^{-k\hat{r}}z) P_{n-(k-1)\hat{r}, T^{-(k-1)\hat{r}}z} \dots P_{n,z}, \end{aligned}$$

где  $k > 0$  — целое число.

Оказывается, что матрицы  $P_{n,z}$  слабо зависят от  $n$  и от  $z$ . Для доказательства справедливости этого факта поступим следующим образом. Выберем в каждой ячейке  $\Delta^{(r)}$   $r$ -го порядка произвольную регулярную компоненту  $\omega(\Delta^{(r)})$  множества  $\Omega$ , пересекающую  $\Delta^{(r)}$  по обоим ее вершинам. Возьмем теперь в качестве вероятности перехода из ячейки  $\Delta^{(r)}$  в ячейку  $\tilde{\Delta}^{(r)}$  число  $\tilde{P}(\Delta^{(r)} | \tilde{\Delta}^{(r)}) = \tilde{\mu}(T^{\hat{r}}(\Delta^{(r)}) | \omega(\tilde{\Delta}^{(r)}))$ . Набор чисел  $\tilde{P}(\Delta^{(r)} | \tilde{\Delta}^{(r)})$  определяет стохастическую матрицу  $\tilde{P}$ . Из доказанного выше свойства (6) преобразования  $T$  вытекает, что существуют такие постоянные  $C' < \infty$

и  $0 < \lambda < 1$ , что

$$\left| \frac{P_{n,z}(\Delta^{(r)} | \tilde{\Delta}^{(r)})}{\tilde{P}(\Delta^{(r)} | \tilde{\Delta}^{(r)})} - 1 \right| < C' \lambda^{\hat{r}/2}.$$

Далее, из предложений 1 и 2 вытекает, что все элементы  $P_{n,z}(\Delta^{(r)} | \tilde{\Delta}^{(r)})$  положительны, если  $r$  достаточно велико, и, тем самым, положительны все матричные элементы  $\tilde{P}(\Delta^{(r)} | \tilde{\Delta}^{(r)})$ . Поэтому имеет место следующая

**Л е м м а 2.** *Рассмотрим совокупность всех распределений вероятностей  $\mu$  на ячейках  $r$ -го порядка, обладающих тем свойством, что для любой гладкой кривой  $\Gamma \in \Delta^{(r)}$  и пересекающей  $\Delta^{(r)}$  по обеим вершинам плотность условной меры  $\mu(x | \Gamma)$  стремится к нулю при приближении к вершине  $\Delta^{(r)}$  как  $(l(x))^\alpha$ , где  $l(x)$  — расстояние вдоль  $\Gamma$  от точки  $x \in \Gamma$  до ближайшей к  $x$  вершине ячейки  $\Delta^{(r)}$ . Тогда найдется такая константа  $0 < \check{C} < 1$ , не зависящая от  $r, \hat{r}$  и  $n$ , что для любых двух распределений вероятностей  $\mu'$  и  $\mu''$*

$$\text{Var}(\mu' P_{n,z} - \mu'' P_{n,z}) < (1 - \check{C}) \text{Var}(\mu' - \mu'');$$

$$\text{Var}(\mu' \tilde{P} - \mu'' \tilde{P}) < (1 - \check{C}) \text{Var}(\mu' - \mu'').$$

Так как все элементы матрицы  $\tilde{P}$  положительны, то у нее существует единственный собственный вектор  $\mu_0$  с собственным значением единица. Рассмотрим окрестность  $O_{\delta/3} = \{\mu : \text{Var}(\mu - \mu_0) < < \delta/3\}$ . Покажем, что эта окрестность инвариантна относительно всех матриц  $P_{n,z}$ , если  $r$  достаточно велико. Действительно, из (9) и леммы 2 имеем

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mu P_{n,z} - \mu_0) &\leq \text{Var}(\mu \tilde{P} - \mu_0) + C'' \lambda^{\hat{r}/2} \leq \\ &\leq (1 - \check{C}) \text{Var}(\mu - \mu_0) + C'' \lambda^{\hat{r}/2}. \end{aligned}$$

Поэтому если  $1/3 \check{C} \delta > C'' \lambda^{\hat{r}/2}$ , то  $\mu P_{n,z} \in O_{\delta/3}$ , если  $\mu \in O_{\delta/3}$ . Далее из (6) и леммы 2 вытекает, что существует такое  $n_0$ , не зависящее от  $z \in \Omega \setminus \mathfrak{M}_{n_0}$ , при котором  $\tilde{\mu}_n^{(r)}(z) \in O_{\delta/3}$ , если  $n > n_0$ . Тем самым доказательство леммы 1 окончено.

Из этой леммы следует, что для любой ячейки  $\Delta^{(r)}$  любого достаточно большого порядка  $r$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(\Delta^{(r)} | C_{\xi-n}(z)) = \tilde{\mu}_z(\Delta^{(r)}),$$

который не зависит от  $z$  и положителен для всех  $\Delta^{(r)}$ . Соответствующий предел обозначим через  $\tilde{\mu}(\Delta^{(r)})$ . Из (7) вытекает, что построенный предел  $\tilde{\mu}(\Delta^{(r)})$  инвариантен относительно преобразования  $T$ . Аналогично [12] показывается, что построенные пределы  $\tilde{\mu}(\Delta^{(r)})$  порождают бэровскую меру  $\tilde{\mu}$  на  $\Omega$ , которая почти на каждой регулярной компоненте индуцирует условную меру  $\tilde{\mu}$ .

Преобразование  $T$  с инвариантной мерой  $\bar{\mu}$  есть  $K$ -автоморфизм, так как для любого  $z \in \Omega$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu}(\cdot | C_{\varepsilon_{-n}}(z)) = \bar{\mu}(\cdot).$$

Далее можно показать, что разбиение множества  $\Omega$  на регулярные компоненты обладает свойством «очень слабой бернуллиевости» по отношению к преобразованию  $T$ , и тем самым динамическая система  $(T, \bar{\mu})$  на аттракторе Лоренца  $\Omega$  изоморфна сдвигу Бернулли.

Схема изложенного выше доказательства теоремы 1 такая же, как в [12].

Используя теорему 1 аналогично [13], можно показать, что имеет место

**Т е о р е м а 2.** Пусть  $f(z)$  — непрерывная функция на  $\Pi_0$ ,  $\hat{\nu}$  — мера на  $\Pi_0$ , абсолютно непрерывная относительно лебеговой. Тогда почти всюду по мере  $\hat{\nu}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(T^k z) = \int_{\Omega} f(z) d\bar{\mu}.$$

Из теоремы 1 легко выводится также

**Т е о р е м а 3.** Пусть  $\hat{\nu}$  такая же, как в условии теоремы 2. Тогда последовательность мер  $T^{n*}\hat{\nu}$  слабо сходится к построенной в теореме 1 мере  $\bar{\mu}$  на  $\Omega$ .

**З а м е ч а н и е.** Изученное нами отображение  $T$  имеет, разумеется, ряд специфических свойств. Наиболее важным из них является существование устойчивой сепаратрисы коразмерности 1, из-за которой, по сути дела, и возникает стохастичность. Было бы интересно обнаружить и другие механизмы возникновения стохастических аттракторов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Saltzman B.— J. Atmos. Sci., 1962, 19, p. 329.
2. Lorenz E. N.— J. Atmos. Sci., 1963, 20, p. 130.
3. Ruelle D. Rept Conf. on Quantum Dynamics Models and Mathematics, Bielefeld, 1975.
4. Williams R. The structure of Lorenz attractor. Preprint, Northwestern Univ., 1976.
5. Guckenheimer D.— Appl. Math. Sci., 1976, 19, p. 368.
6. Guckenheimer D. Structure of stability of Lorenz attractor. Preprint, Univ. California, 1977.
7. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П.— Докл. АН СССР, 1977, 234, № 2, с. 336.
8. McLaughlin B., Martin P. C.— Phys. Rev., 1975, A 12, p. 186.
9. Вышкинд С. Я., Рабинович М. И.— ЖЭТФ, 1976, 71, № 2, с. 557.
10. Пиковский А. С., Рабинович М. И.— Наст. сб., с. 176.
11. Шильников Л. П.— Мат. сб., 1968, 77, № 3, с. 461.
12. Синай Я. Г.— Функц. анализ и его прил., 1968, 2, № 1, с. 64.
13. Bowen R., Ruelle D.— Invent. Math., 1975, 29, p. 181.

# ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ГИДРОДИНАМИКЕ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ СРЫВНЫХ ВЯЗКИХ ПОТОКОВ МЕТОДОМ «КРУПНЫХ ЧАСТИЦ»

Ю. М. ДАВЫДОВ

В настоящее время наблюдается повышенный интерес к изучению потоков вязкого теплопроводного газа. Однако здесь исследователи наталкиваются на значительные трудности. Многочисленные попытки решить численно уравнения Навье — Стокса для больших чисел Рейнольдса оканчиваются неудачей. При превышении некоторого критического (порядка  $10^2 - 10^3$ ) числа  $Re$  разностная схема либо становится неустойчивой, либо, хотя вычислительный алгоритм позволяет проводить устойчивый счет сквозным образом практически для всех  $Re$ , полученные результаты не соответствуют уравнениям Навье — Стокса.

Такая альтернатива имеет, по-видимому, глубокий смысл. Уравнения Навье — Стокса, выводимые в предположении прямой пропорциональности тензора напряжений тензору скоростей деформаций, справедливы для тонких пограничных слоев или для потоков газа со значительной вязкостью, где все течение определяется молекулярными эффектами, т. е. для малых чисел Рейнольдса. Значительная величина молекулярной вязкости делает эти течения гидродинамически (и численно) устойчивыми. Ламинарные течения при больших числах  $Re$  гидродинамически неустойчивы. Малой величины молекулярной вязкости недостаточно для стабилизации ламинарного течения: оно становится турбулентным и в возникающей при турбулентном обмене эффективной «турбулентной вязкости» доля молекулярной вязкости весьма незначительна [1] (обычно  $\mu_{\text{мол}}/\mu_{\text{турб}} \approx 10^{-5} \div 10^{-6}$ ). Механизм переноса становится иным: вместо молекулярного — турбулентный.

Поэтому разностные схемы (обычно высокого порядка точности), достаточно адекватно описывающие уравнения Навье — Стокса (см., например, [2]), при больших числах  $Re$ , где молекулярный диссипативный механизм становится недостаточным для поддержания устойчивого течения (а другого механизма переноса в алгоритм не заложено), не позволяют получить устойчивого решения.

В разностных схемах иного плана (сквозного счета) постоянно присутствует значительная аппроксимационная вязкость, обеспечивающая устойчивость счета [3, 4]. При малых числах Рейнольдса величина этой аппроксимационной вязкости мала по сравнению с членами, учитывающими молекулярные эффекты, поэтому получаемое решение отвечает уравнениям Навье — Стокса. При больших числах Рейнольдса молекулярные эффекты становятся малыми по сравнению со схемными, и получаемое решение, несмотря на устойчивость, не отвечает уравнениям Навье — Стокса.

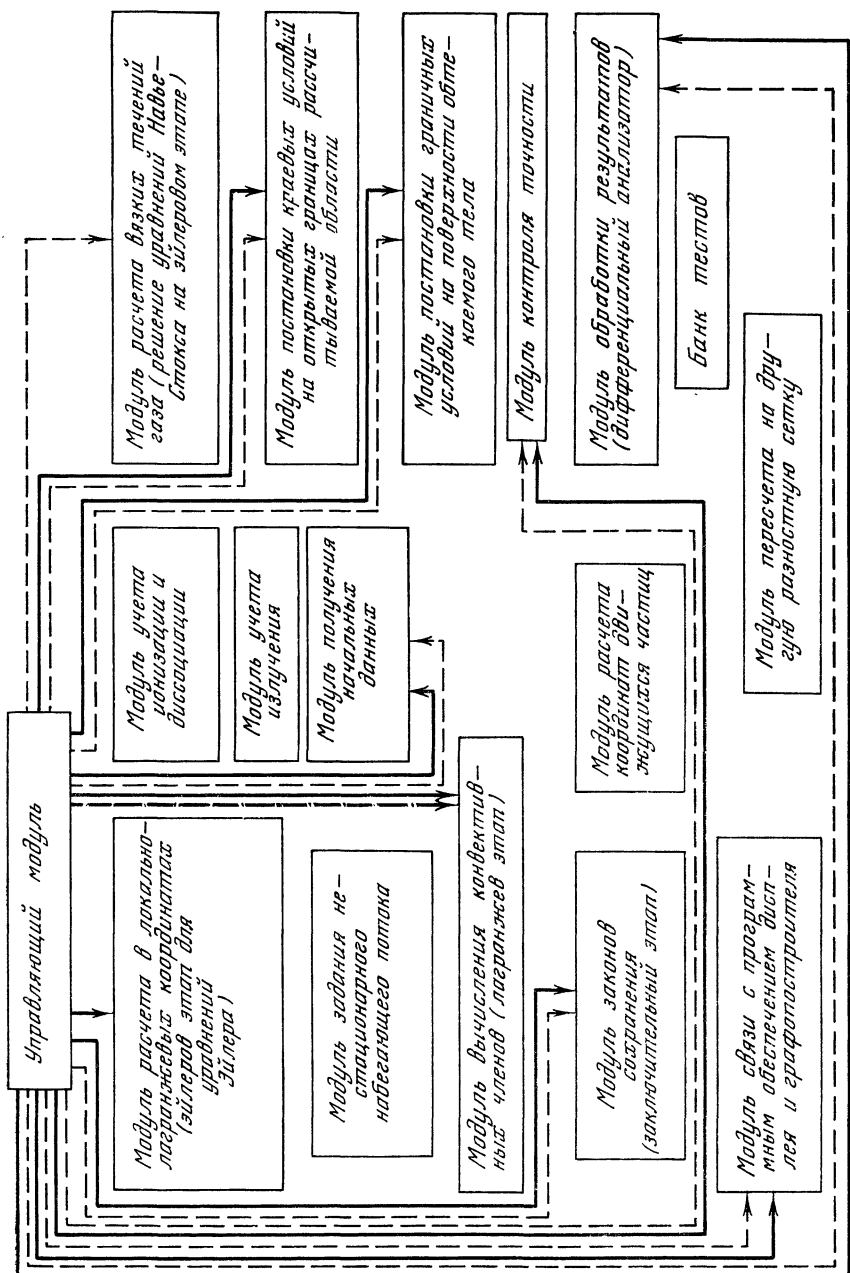
Следует отметить, что наличие в разностной схеме членов с молекулярной вязкостью делает решение зависимым от ее величины не только при малых числах Рейнольдса, где ею определяется течение, но и при умеренных  $Re_{\text{мол}}$ , где значения схемной и молекулярной вязкостей становятся сравнимыми. Даже в том случае, когда аппроксимационная вязкость значительно превышает молекулярную, эта зависимость может иметь место (что и наблюдается в расчетах некоторых авторов), хотя течение определяется схемными эффектами.

Подобная ситуация наблюдается, по-видимому, и в динамике разреженных газов при решении задач с малым числом Кнудсена  $Kn$  [5]. Переход от свободномолекулярного режима к режиму сплошной среды при уменьшении числа  $Kn$  с вычислительной точки зрения встречает трудности, аналогичные тем, которые возникают при увеличении числа  $Re$  (уменьшении коэффициента молекулярной вязкости) в уравнениях Навье — Стокса. Наличие малых параметров ( $\mu$ ,  $Kn$  и т. д.) в уравнениях обуславливает существование их критических величин в разностных схемах, когда влияние соответствующих членов на решение становится сравнимым с влиянием аппроксимационной вязкости.

Повышение порядка аппроксимации разностных схем не дает принципиального решения проблемы. Так, согласно Самарскому [6], может оказаться, что схема первого порядка точности на реальных сетках точнее схемы второго порядка точности. Это происходит потому, что сравнивать разностные схемы по порядку точности можно лишь асимптотически, при малых значениях сеточных параметров. Используемые же на практике сетки довольно крупны, и на них асимптотические оценки могут не работать [6].

В настоящей работе предлагается разностная схема, позволяющая проводить расчет при умеренных числах Рейнольдса. С помощью анализа дифференциальных приближений ниже будет показано, что члены аппроксимационной вязкости здесь достаточно малы и не «забывают» молекулярные эффекты при умеренных числах Рейнольдса. В то же время их величина достаточно велика, чтобы обеспечить устойчивый счет.

При проведении численного эксперимента целесообразно использовать модульную структуру программ [7, 8]. Напомним, что под модулем мы понимаем самостоятельную программную единицу, обладающую определенным физическим и математическим смыслом. На рис. 1 приведена принципиальная схема действующего пакета модулей расчета задач газовой динамики методом «крупных частиц» (сплошные линии — первая, пунктир — вторая компоновки программы). Расчетные модули на рис. 1 указаны обобщенно: каждый из них реализован в различных вариантах как в смысле разностных схем, так и в смысле физики явления. Так, например, модуль эйлерова этапа расчета невязкого течения может быть основан на разностной схеме с центральными разностями [9] или





с использованием метода интегральных соотношений [10]. Введение в метод «крупных частиц» элементов метода интегральных соотношений Дородницына — Белоцерковского [11, 12] правомочно, так как общий метод интегральных соотношений, предложенный Дородницыным [11], позволяет получать консервативные дифференциально-разностные схемы [6] и таким образом не нарушает консервативность метода «крупных частиц».

Возможны также различные разностные представления конвективных членов на лагранжевом этапе [13, 14]; для учета эффектов ионизации и диссоциации используются два модуля, реализованные по итеративной и явной схемам и т. д. Из всего этого многообразия расчетных модулей, составляющих данный пакет, управляющий модуль, пользуясь определенными критериями, дифференциальными анализаторами и т. п., «выбирает» модули, необходимые для решения конкретной задачи, комплексирует из них расчетную программу, формирует банк данных и т. д.

В данном случае при учетывании эффектов молекулярной вязкости будет видоизменяться только эйлеров этап, т. е. для решения уравнений Навье — Стокса достаточно составить модуль «вязкого» эйлерова этапа, взяв остальные модули без изменения.

Рассмотрим плоскую двумерную задачу. Уравнения Навье — Стокса в декартовых координатах в форме, как это принято в методе «крупных частиц» [9, 13], запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu A \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]; \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu A \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]; \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u E}{\partial x} + \frac{\partial \rho v E}{\partial y} + \frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu A \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) u + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) v + \mu \frac{\partial}{\partial x} (BJ + u^2) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu A \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) v + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) u + \mu \frac{\partial}{\partial y} (BJ + v^2) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mu$  — первый коэффициент вязкости,  $\lambda$  — второй коэффициент вязкости,  $\lambda = A\mu$  (здесь  $A = \text{const}$ ),  $B = \gamma/\text{Pr}$ ,  $\text{Pr}$  — число Прандтля,  $E = J + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ . В данной работе полагалось  $A = -2/3 \cong -0,67$ .

На эйлеровом этапе метода «крупных частиц» не учитываются конвективные члены вида  $\text{div}(\psi W)$ , где  $\psi = \{1, u, v, E\}$  [13]. Из уравнения неразрывности следует, что при этом  $\partial \rho / \partial t = 0$  и в

последующих уравнениях системы (1) плотность  $\rho$  можно вынести из-под знака дифференцирования по времени аналогично тому, как это осуществлялось в методе «крупных частиц» без учета молекулярной вязкости [9, 13]. После некоторых преобразований дифференциальные уравнения эйлера этапа можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[ (A+2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A+1) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right]; \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[ (A+2) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A+1) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right]; \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} &= -\frac{\partial p u}{\partial x} - \frac{\partial p v}{\partial y} + \mu \left\{ (A+2) \left( \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^2}{\partial y^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} + A \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B \left( \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial y^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что при этом вид уравнений импульса (и их разностной аппроксимации) будет аналогичен выражениям работы [15].

Разностная схема уравнений Навье — Стокса на эйлеровом этапе (2) запишется в виде

$$\begin{aligned} {}^0 u_{i,j}^n &= u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n \Delta x} \left\{ (p_{i-1/2,j}^n - p_{i+1/2,j}^n) + \right. \\ &\quad \left. + \mu \Delta x \left[ \frac{(A+2)}{\Delta x^2} (u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) / \Delta y^2 + \frac{(A+1)}{4\Delta x \Delta y} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (v_{i+1,j+1}^n + v_{i-1,j-1}^n - v_{i-1,j+1}^n - v_{i+1,j-1}^n) \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^0 v_{i,j}^n &= v_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n \Delta y} \left\{ (p_{i,j-1/2}^n - p_{i,j+1/2}^n) + \right. \\ &\quad \left. + \mu \Delta y \left[ \frac{(A+2)}{\Delta y^2} (v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n) / \Delta x^2 + \frac{(A+1)}{4\Delta x \Delta y} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (u_{i+1,j+1}^n + u_{i-1,j-1}^n - u_{i-1,j+1}^n - u_{i+1,j-1}^n) \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^0 E_{i,j}^n &= E_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n} \left\{ \frac{1}{2\Delta x} [{}^0 u_{i,j}^n (p_{i-1,j}^n - p_{i+1,j}^n) + p_{i,j}^n ({}^0 u_{i-1,j}^n - \right. \\ &\quad \left. - {}^0 u_{i+1,j}^n)] + \frac{1}{2\Delta y} [{}^0 v_{i,j}^n (p_{i,j-1}^n - p_{i,j+1}^n) + p_{i,j}^n ({}^0 v_{i,j-1}^n - \right. \\ &\quad \left. - {}^0 v_{i,j+1}^n)] + \frac{\mu (A+2)}{2\Delta x^2} [({}^0 u_{i+1,j}^n)^2 + ({}^0 u_{i-1,j}^n)^2 - 2({}^0 u_{i,j}^n)^2] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{2\Delta x^2} [({}^0 v_{i+1,j}^n)^2 + ({}^0 v_{i-1,j}^n)^2 - 2({}^0 v_{i,j}^n)^2] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A\mu}{4\Delta x\Delta y} [{}^0u_{i+1,j}^n ({}^0v_{i+1,j+1}^n - {}^0v_{i+1,j-1}^n) - {}^0u_{i-1,j}^n ({}^0v_{i-1,j+1}^n - \\
& - {}^0v_{i-1,j-1}^n)] + \frac{\mu}{4\Delta x\Delta y} [{}^0v_{i+1,j}^n ({}^0u_{i+1,j+1}^n - {}^0u_{i+1,j-1}^n) - \\
& - {}^0v_{i-1,j}^n ({}^0u_{i-1,j+1}^n - {}^0u_{i-1,j-1}^n)] + \frac{B\mu}{\Delta x^2} [J_{i+1,j}^n + J_{i-1,j}^n - 2J_{i,j}^n] + \\
& + \frac{\mu(A+2)}{2\Delta y^2} [({}^0v_{i,j+1}^n)^2 + ({}^0v_{i,j-1}^n)^2 - 2({}^0v_{i,j}^n)^2] + \\
& + \frac{\mu}{2\Delta y^2} [({}^0u_{i,j+1}^n)^2 + ({}^0u_{i,j-1}^n)^2 - 2({}^0u_{i,j}^n)^2] + \\
& + \frac{A\mu}{4\Delta x\Delta y} [{}^0v_{i,j+1}^n ({}^0u_{i+1,j+1}^n - {}^0u_{i-1,j+1}^n) - {}^0v_{i,j-1}^n ({}^0u_{i+1,j-1}^n - \\
& - {}^0u_{i-1,j-1}^n)] + \frac{\mu}{4\Delta x\Delta y} [{}^0u_{i,j+1}^n ({}^0v_{i+1,j+1}^n - {}^0v_{i-1,j+1}^n) - {}^0u_{i,j-1}^n \times \\
& \times ({}^0v_{i+1,j-1}^n - {}^0v_{i-1,j-1}^n)] + \frac{B\mu}{\Delta y^2} [J_{i,j+1}^n - 2J_{i,j}^n + J_{i,j-1}^n] \}. \quad (3)
\end{aligned}$$

Исследуем вязкостные эффекты полученной разностной схемы. Для этой цели используем аппарат дифференциальных приближений, разработанный Яненко и его учениками [16, 17].

Вязкостные аппроксимационные члены, неявным образом присутствующие в разностной схеме, оказывают существенное влияние на поведение решения. В работах Жукова [18] и Шокина [19] доказывается в пространстве обобщенных функций сходимость решений ряда разностных схем к решениям их первых дифференциальных приближений. В частности, в [19] доказывается теорема о стремлении решений достаточно широкого класса эволюционных разностных задач при  $t = n\Delta t \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta t = \text{const}$ ) к решениям задачи Коши для первых дифференциальных приближений.

Элементы анализа навье — стоксовых разностных схем с помощью дифференциальных приближений приводятся в работе [20]. Отметим, что эвристические подходы, близкие к анализу дифференциальных приближений, все шире применяются в настоящее время. Как правило, они используются для исследования устойчивости разностных схем [21]. Здесь следует отметить работы Хирта [22], Женри, Мартина и Дали [23], где исследуется разностная схема, близкая к методу «крупных частиц», а также работы [24—27] и др. Анализ дифференциальных приближений использовался и для исследования вязкостных свойств «невязких» разностных схем метода «крупных частиц», аппроксимирующих уравнения Эйлера [28].

Выпишем для простоты в одномерном случае дифференциальное приближение уравнения импульса. При этом в качестве формул эйлера этапа мы будем использовать выражения (3), на лагранжевом этапе — формулы для  $\Delta M^n$  первого порядка точности с учетом направления потока [9 13], на заключительном — разност-

ный аналог законов сохранения [29]. Опуская промежуточные выкладки, получим

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} = \left[ \mu(A + 2) + \rho |u| \frac{\Delta x}{2} + \rho u^2 \frac{\Delta t}{2} - \frac{3}{4} u \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x^2 - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x^2 - 2\mu(A + 2) \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t^2, \Delta x^3). \quad (4)$$

Отсюда видно, что диффузионный коэффициент может в значительной степени зависеть от аппроксимационной вязкости. Поэтому в реальных расчетах

$$Re_{эфф} = Re(Re_{мол}, Re_{аппр}). \quad (5)$$

Величина схемной вязкости зависит от параметров потока в данной точке течения. На рис. 2 приведена картина обтекания конеч-

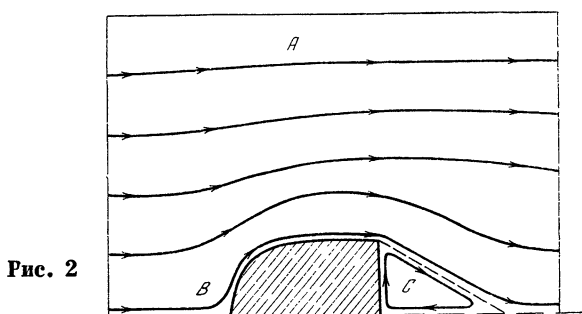


Рис. 2

ного цилиндра со сферическим затуплением методом «крупных частиц». В нашем случае параметры невозмущенного потока

$$\rho_{\infty} = 1,0, \quad u_{\infty} = 1,0. \quad (6)$$

Кроме того, в реальных расчетах, где возникают ударные волны, контактные разрывы и волны разрежения,

$$|\partial u / \partial x| \Delta x < 0,3, \quad |\partial \rho / \partial x| \Delta x < 2,0.$$

К тому же из соображений устойчивости  $\Delta t < \Delta x$ . Отсюда ясно, что основной вклад в аппроксимационную вязкость в (4) дает первый член  $\rho |u| \Delta x / 2$ , поэтому в первом приближении его и будем учитывать для оценок вязкостных свойств схемы. При этом из выражения (4) будем иметь

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} = \left[ \mu(A + 2) + \rho |u| \frac{\Delta x}{2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t, \Delta x^2). \quad (7)$$

Раскроем содержание величин, входящих в (5). Здесь  $Re_{аппр} = \rho_{\infty} u_{\infty} R / \mu_{аппр}$ , где  $R$  — радиус цилиндра,  $\mu_{аппр} = \rho |u| \Delta x / 2$  — величина аппроксимационной вязкости (см. (7)). Поскольку в нашем случае выполняется условие (6) и толщина (характерный размер) тела  $R = 1,0$ , то  $Re_{аппр} = 1 / \mu_{аппр}$ ,  $Re_{мол} = 1 / \mu$ .

Итак, рассмотрим диссипативный коэффициент эффективной вязкости

$$\mu (A + 2) + \rho |u| \Delta x / 2. \quad (8)$$

Оценим степень влияния аппроксимационной вязкости на решение. Выделим во внешнем потоке газа (рис. 2) три области:

1) зона *A* «слабовозмущенного» потока газа, где велики скорость  $W$  и плотность  $\rho$  и выполнено соотношение

$$\rho |W| \approx 1; \quad (9)$$

2) зона *B* торможения перед телом, в которой  $1 \leq \rho \leq 6$ ,  $|W| < 0,2$ , откуда

$$\rho |W| \approx 0,5; \quad (10)$$

3) зона *C* — разреженная область возвратно-циркуляционного течения с малыми скоростями, где  $|W| \approx 0,1$ ,  $\rho \approx 0,2$  и, следовательно,

$$\rho |W| \approx 0,02. \quad (11)$$

Оценим во всех этих областях относительную долю схемной вязкости при разных числах Рейнольдса  $Re_{\text{мол}}$ . Если нам требуется обеспечить точность  $\delta$  (%), т. е. доля аппроксимационной вязкости в (7) не превосходит  $\delta$  (%), то согласно (8) необходимо

$$\frac{\rho u (\Delta x / 2)}{\mu (A + 2) + \rho |u| (\Delta x / 2)} \leq \delta, \text{ т. е. } \mu \geq \frac{1 - \delta}{\delta (A + 2)} \rho |u| \frac{\Delta x}{2} \text{ или согласно (6)}$$

$$Re_{\text{мол}} \leq \frac{\delta}{1 - \delta} \frac{2(A + 2)}{\rho |u|} \frac{1}{\Delta x}.$$

Таким образом, в зоне *A* «слабовозмущенного» потока газа (см. рис. 2), где выполнено (9), будем иметь

$$Re_{\text{мол}} \leq \frac{\delta}{1 - \delta} \frac{2(A + 2)}{\Delta x} = \frac{\delta}{1 - \delta} \frac{2,65}{\Delta x}.$$

Аналогичное выражение вида  $Re_{\text{мол}} \leq K / \Delta x$  можно получить для зон *B* и *C*, используя (10) и (11). Значения  $K$  при разных  $\delta$  приведены ниже.

|               | $\delta = 0,1\%$ | $\delta = 1\%$ | $\delta = 5,0\%$ | $\delta = 10,0\%$ |
|---------------|------------------|----------------|------------------|-------------------|
| Зона <i>A</i> | 0,00265          | 0,0268         | 0,139            | 0,294             |
| Зона <i>B</i> | 0,00527          | 0,0535         | 0,278            | 0,587             |
| Зона <i>C</i> | 0,132            | 1,34           | 6,95             | 14,71             |

Эти области показаны на рис. 3 между осями координат и соответствующими гиперболами, изображенными сплошной ( $\delta = 0,1\%$ ), штрихпунктирной ( $\delta = 1,0\%$ ), пунктирной ( $\delta = 5,0\%$ ) и штриховой ( $\delta = 10,0\%$ ) линиями.

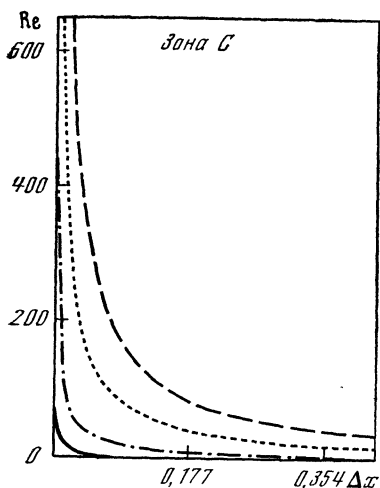
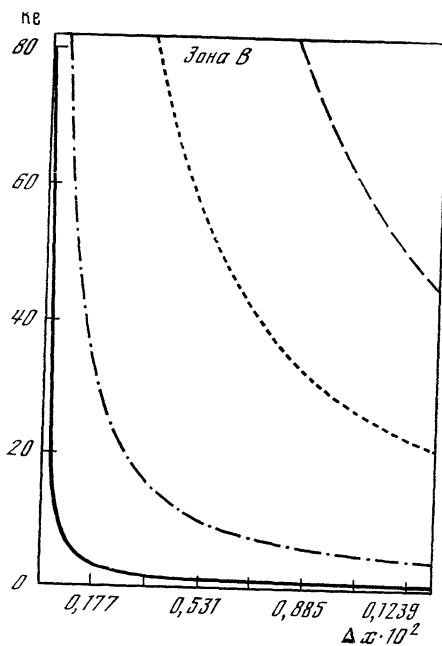
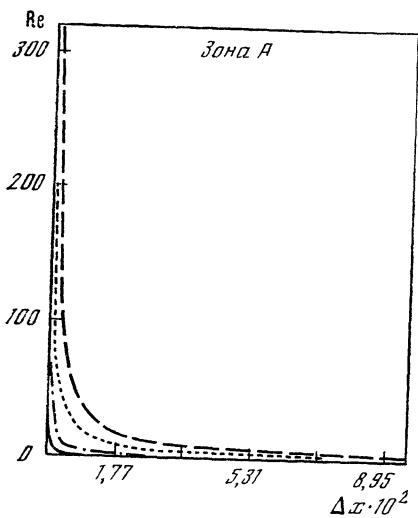
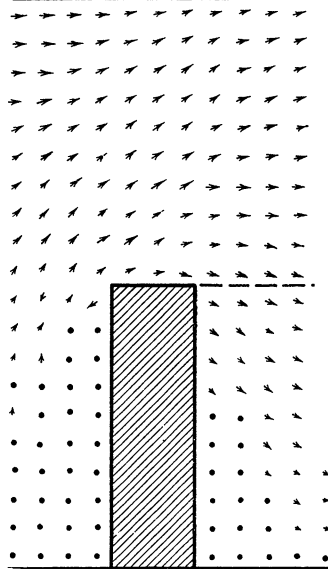


Рис. 3

Обсуждая проблему больших чисел Рейнольдса в обзоре методов для решения уравнений Навье — Стокса [30], А. А. Дородницын говорит, что «...приближение к реальному решению может быть достигнуто, когда  $Re h < \varepsilon \ll 1$ , иначе математическая вязкость превысит реальную, и мы не сможем узнать, чему отвечает полученное численное решение».

В качестве примера приведем некоторые результаты расчетов по описанной выше разностной схеме.

Был осуществлен следующий численный эксперимент. В невозмущенный плоскопараллельный сверхзвуковой поток ( $M_\infty = 2,0$ ) в первоначальный момент времени помещено тело. Вид области ин-



...а обтекаемого тела приведена по разностной схеме метода конечных разностей [9, 13] (т. е. с учетом вязкости). При этом управляющий модуль вызывает модуль расчета в локальной системе координат. Структурная компоновка программы для этого расчета показана на рис. 1 штриховыми линиями, связывающими модуль расчета с модулем управления. Поскольку сквозной счет осциллограммы не производится, параметры газа (например, на ударной волне) не соответствуют условиям на границах этих поверхностей. Это связано с тем, что в программе используется условие Гюгонио на ударной волне.

...жения установления управляющий модуль осуществляет поиск нового решения. Для этого использован описанный выше модуль решения уравнений. Модуль управления модифицировал новую, модифицированную версию программы, участвующие в ней, связаны с модулем управления (рис. 1 штриховыми линиями) и возмущениями. Полученное решение будет состоять из параметров вязкого теплопроводного газа. Следует ожидать, что параметры невязкого течения газа останутся постоянными на ударных волнах и на других поверхностях разрывов.

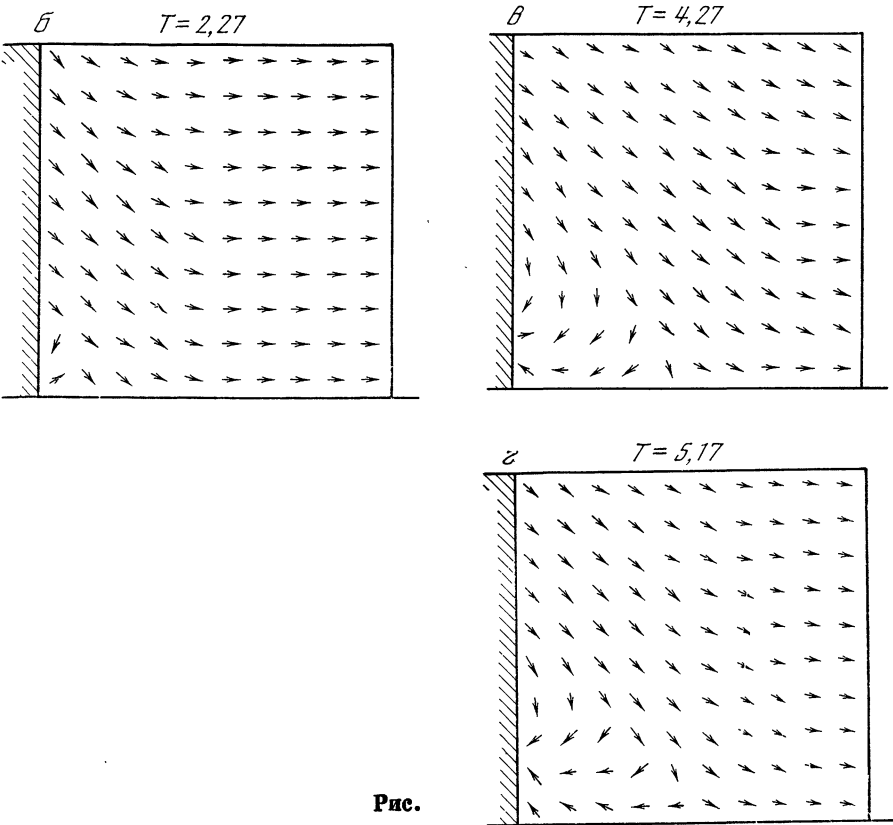


Рис.

гидродинамических параметров видоизменятся и станут соответствовать течению газа, обладающего молекулярной вязкостью и теплопроводностью с определенным числом Рейнольдса. Проведенные расчеты показали, что полученное решение в основном ведет себя указанным образом.

Так как предлагаемая явная разностная схема условно устойчива, то при решении задач с малыми и умеренными числами Рейнольдса  $\Delta t \sim (\Delta x)^2$ . Отметим, что некоторые разностные схемы налагают менее жесткие ограничения на шаг по времени [31—33]. Описанный в данной статье алгоритм целесообразно применять при постановке численного эксперимента для исследования нестационарных задач. В качестве примера рассмотрим формирование срывной зоны за крутой кормой.

На рис. 4 показаны векторы скорости в последовательные моменты времени при обтекании тела конечных размеров. При  $T = 0,45$  дана вся исследуемая область, а при  $T$ , равных 2,27, 4,27 и 5,17,— часть расчетной области (зона С, см. рис. 2), отмеченная



при  $T = 0,45$  штриховой линией. Векторы скорости в последних случаях нормированы. Параметры вязкого газа брались следующими:  $M_\infty = 2,0$ ;  $\mu = 0,01$ ;  $A = -0,67$ ;  $B = 2,15$ . В данном случае расчеты проводились при неизменном во всем поле течения коэффициенте молекулярной вязкости. Однако введение в описанную разностную схему надлежащего закона изменения  $\mu$  не представляет затруднений.

Данная работа была выполнена в 1973 г. О ее результатах были сделаны доклады на ряде семинаров и конференций, в том числе в 1974 г. в Новосибирске на семинарах, руководимых академиком Н. Н. Яненко, в ВЦ СО АН СССР и НГУ.

Автор приносит глубокую благодарность члену-корреспонденту АН СССР О. М. Белоцерковскому и академику С. А. Христиановичу за плодотворные обсуждения данной работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Миллионщиков М. Д.* Турбулентные течения в пограничном слое и в трубах. М., «Наука», 1969.
2. *Голстык А. И.* — ЖВМиМФ, 1966, 6, № 1, с. 113.
3. *Deiwert G. S.* — AIAA Paper, 1974, N 74, p. 603.
4. *Белоцерковский О. М., Северинов Л. И.* — ЖВМиМФ, 1973, 13, № 2, с. 385.
5. *Шахов Е. М.* Метод исследования движений разреженного газа. М., «Наука», 1974.
6. *Самарский А. А.* — В кн.: Проблемы прикладной математики и механики. М., «Наука», 1971, с. 129.
7. *Коновалов А. Н., Яненко Н. Н.* — В кн.: Комплексы программ математической физики. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1972, с. 48.
8. *Давыдова И. М., Давыдов Ю. М.* Организация больших программ. М., МФТИ, 1973.
9. *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.* — ЖВМиМФ, 1971, 11, № 1, с. 182.
10. *Давыдов Ю. М.* — Труды Казанского авиационного ин-та. Казань, КАИ, 1971, с. 115.
11. *Дородницын А. А.* — Труды III Всесоюзного математического съезда, т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 447.
12. *Белоцерковский О. М.* Расчет обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной (расчетные формулы и таблицы полей течений). М., ВЦ АН СССР, 1961.
13. *Давыдов Ю. М.* Канд. дис. М., МФТИ, 1970.
14. *Давыдов Ю. М.* — В кн.: Распространение упругих и упругопластических волн. Алма-Ата, «Наука», 1973, с. 140.
15. *Amsden A. A.* The particle-in-cell method for the calculation of the dynamics of compressible fluids. Los Alamos Scient. Lab., Rept N LA-3466, 1966.
16. *Яненко Н. Н., Шокин Ю. И.* — Докл. АН СССР, 1968, 182, № 2, с. 280.
17. *Яненко Н. Н., Шокин Ю. И.* — Докл. АН СССР, 1968, 182, № 4, с. 776.
18. *Жуков А. И.* — УМН, 1959, 14, № 3 (8), с. 129.
19. *Шокин Ю. И.* — Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1969, № 3, вып. 1.
20. *Петренко В. Е., Сапожников Г. А.* — Числ. методы мех. сплош. среды, 1976, 7, № 4, с. 130.
21. *Давыдов Ю. М.* — Труды МФТИ. Сер. аэрофиз., прикл. мат. М., МФТИ, 1971, с. 79.
22. *Hirt C. W.* — J. Comp. Phys., 1968, 2, N 4, p. 339.
23. *Gentry R. A., Martin R. E., Daly B. J.* — J. Comput. Phys., 1966, 1, N 1.

24. *Harlow F. H., Young E. L., Walch J. E.* Stability of Difference equations. Selected Topics. Los Alamos Scient. Lab., Rept N LAMS-2652, 1960.
25. *Daly B. J.*— *Math. Comput.*, 1963, 17, N 84, p. 346.
26. *Roache P. J.*— *J. Comput. Phys.*, 1972, 7, N 10, p. 169.
27. *Roache P. J.* Computational fluid dynamics. Aerodynamics Res. Dept. Sandia Lab. Albuquerque, New Mexico 87115, Hermosa Publishers, 1973.
28. *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.*— В кн.: Проблемы прикладной математики и механики. М., «Наука», 1974, с. 145.
29. *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.* Нестационарный метод «крупных частиц» для решения задач внешней аэродинамики. М., ВЦ АН СССР, 1970.
30. *Dorodnicyn A. A.*— *Lecture Notes in Phys.*, 1973, 18, N 1, p. 1.
31. *Berezin Yu. A., Kovenja V. M., Yanenko N. N.*— *Computers and Fluids*, 1975, 3, N 2/3, p. 271.
32. *Толстых А. И.*— Докл. АН СССР, 1973, 210, № 1, с. 48.
33. *Бабаков А. В., Белоцерковский О. М., Северинов Л. И.*— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 3, с. 112.

## УСИЛЕНИЕ ВОСПРОИЗВОДЯЩЕЙ НАКАЧКУ СТОКСОВОЙ ВОЛНЫ ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ РАССЕЯНИИ МНОГОМОДОВЫХ ПУЧКОВ

В. И. БЕСПАЛОВ, А. А. БЕТИН, В. Г. МАНИШИН,  
Г. А. ПАСМАНИК

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время при анализе параметрического преобразования сильнонеоднородных волновых пакетов наряду с изучением энергетических характеристик все большее внимание уделяется исследованию пространственной и временной структуры взаимодействующих полей [1—7]. Особенности, связанные с формированием пространственной структуры в таких процессах, достаточно наглядно проявляются при комбинационном преобразовании многомодового пучка накачки в стоксову компоненту, когда для всех участвующих во взаимодействии пространственных гармоник выполняются условия синхронизма.

Наращение каждой пространственной гармоники слабой стоксовой компоненты может происходить как в результате ее прямого усиления за счет взаимодействия с совокупностью гармоник более сильной накачки, так и вследствие перерасеяния в нее других слабых гармоник. Если процесс перерасеяния одних гармоник в другие не очень существен, то при достаточно широком пучке накачки стоксов сигнал может нарастать с сохранением своей пространственной когерентности [4, 8—10]. В ряде случаев, однако, процессы взаимного перерасеяния гармоник играют определяющую роль, приводя к преимущественному усилению совокупности

гармоник с определенными фазовыми соотношениями. При малой частотной расстройке между накачкой и стоксовой компонентой и достаточно большом коэффициенте усиления эти процессы могут явиться причиной формирования такой структуры в стоксовом излучении, которая повторяет распределение поля в пучке накачки. Наиболее характерным примером, в котором проявляются указанные особенности, является эффект воспроизведения волнового фронта падающего пучка в излучении вынужденного рассеяния (ВР).

Это явление впервые было экспериментально обнаружено при ВР в световоде [11] и для такой же геометрии изучалось теоретически в [12—14]. Последующие исследования показали, что частичное воспроизведение волнового фронта наблюдается и в сфокусированных пучках [15—18], причем в этом случае проявляются такие существенные отличия, как отсутствие воспроизведения при небольших значениях инкремента, ухудшение качества воспроизведения при достаточно большой расходимости световых пучков, уменьшение (по сравнению со световодом) дискриминации между инкрементами у структуры, воспроизводящей накачку, и остальными слабоскоррелированными с ней структурами. Эти эффекты ограничивают возможности воспроизведения волнового фронта многомодовой накачки, однако благодаря им в сфокусированных пучках проще, чем в световоде, реализуются условия усиления стоксовой волны с сохранением ее пространственной когерентности.

Трудности расчета процесса воспроизведения ограниченных (в частности, сфокусированных) пучков связаны с необходимостью учета дифракционных потерь воспроизводящей накачку стоксовой волны, которые в отличие от ВР в световоде оказываются весьма существенными и проявляются на длинах, сравнимых с полной длиной усиления. Дифракционные потери могут приводить к заметному уменьшению инкремента и в конечном счете к ограничению возможностей воспроизведения.

В настоящей работе теоретически исследуется эффект воспроизведения при ВР ограниченных пучков. Основная идея используемого для решения задачи подхода заключается в выделении в поляризации, наведенной при рассеянии стоксовой волны на профиле усиления, структуры, повторяющей в данной плоскости мелкомасштабное распределение поля накачки. Выделенная часть поляризации ответственна за возбуждение наиболее нарастающих компонент в рассеянном излучении, преимущественное усиление которых приводит к воспроизведению волнового фронта накачки.

В рамках указанного подхода получена система линейных интегральных уравнений для коэффициентов разложения поляризации по ортогональным модам, мелкомасштабное распределение поля в которых повторяет соответствующее распределение в пучке накачки. Дальнейшее исследование этой системы, проведенное с использованием численного интегрирования, позволило определить

инкремент, мощность и поперечную структуру стоксовой волны. Показано, что независимо от радиуса входного стоксова луча, повторяющего по внутреннему заполнению накачку, на достаточно большой трассе формируется усиленная волна, повторяющая в любой плоскости мелкомасштабное распределение поля возбуждающего пучка и локализованная вблизи его оси. Полученная таким образом стоксова волна имеет оптимальную огибающую; ее радиус меньше радиуса пучка накачки, однако он изменяется по тому же самому закону, а значение полного инкремента у стоксова пучка с этой огибающей является наибольшим. В работе для пучка накачки с гауссовой огибающей аналитически отыскивается явный вид оптимальной структуры и максимальный инкремент стоксовой волны.

В последнем разделе обсуждаются особенности комбинационного преобразования воспроизводящей накачку стоксовой волны при учете ее взаимодействия с антистоксовой компонентой. Показано, что с уменьшением расстройки  $\delta k = 2k_l - k_s - k_a$  ( $k_{l,s,a}$  — волновые векторы накачки, стоксовой и антистоксовой компонент) преимущественное усиление моды, повторяющей по мелкомасштабному распределению поле накачки, уменьшается.

## 2. ФОРМИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ ВОСПРОИЗВОДЯЩЕЙ ВОЛНЫ

Усиление стоксовой волны с комплексной амплитудой  $\mathcal{E}_s$  в квазиоптическом приближении описывается уравнениями

$$\hat{L}_s \mathcal{E}_s - g_s |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_s = 0; \quad (1)$$

$$\hat{L}_l \mathcal{E}_l + g_l |\mathcal{E}_s|^2 \mathcal{E}_l = 0, \quad (2)$$

где  $\hat{L}_{s,l} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k_{s,l}} \Delta_{\perp}$ . При обратном ВР  $\hat{L}_l \rightarrow -\hat{L}_l^*$ .

Допустим, что на входе в среду задан коллимированный пучок накачки с нормальным законом распределения поля и функцией корреляции<sup>1</sup>

$$\overline{\mathcal{E}_l(\mathbf{r}_{\perp} - \rho/2, 0) \mathcal{E}_l^*(\mathbf{r}_{\perp} - \rho/2, 0)} = I_l \exp(-\mathbf{r}_{\perp}^2/r_l^2 - \rho^2/4\rho_l^2), \quad (3)$$

где  $r_l$  и  $\rho_l$  — соответственно радиус огибающей и радиус поперечной корреляции входного пучка ( $\rho_l \ll r_l$ ).

При достаточно малой расстройке волновых векторов  $k_l$  и  $k_s$  с наибольшим коэффициентом усиления нарастают такие компоненты стоксовой волны, мелкомасштабное распределение поля в которых повторяет соответствующее распределение поля в пучке накачки [11]. Выясним, каким образом происходит усиление таких компонент, и определим соответствующее им значение инк-

<sup>1</sup> Полученные для коллимированного на входе пучка накачки результаты переносятся также на ВР сфокусированных пучков, если начало координат  $z = 0$  отсчитывать из центра фокальной перетяжки.

ременты. Для этого предположим, что на входе задана стоксова волна вида  $\mathcal{E}_s(0, \mathbf{r}_\perp) = \sigma f(0, \mathbf{r}_\perp) \mathcal{E}_l(0, \mathbf{r}_\perp)$ , где  $f(0, \mathbf{r}_\perp)$  — медленная в масштабе  $\rho_l$  функция поперечных координат,  $\sigma$  — безразмерная амплитуда стоксовой волны.

Рассмотрим усиление такой волны в приближении заданного поля накачки (член  $g_l |\mathcal{E}_s|^2 \mathcal{E}_l$  в правой части (2) полагаем равным нулю). В уравнении (1) для стоксова пучка эффект взаимодействия с накачкой учитывается наведенной поляризацией  $g_s |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_s$ . Эта поляризация возбуждает, вообще говоря, стоксово излучение сложной пространственной структуры, которое продолжает усиливаться в поле многомодовой накачки. Однако эффективно усиливается лишь та часть излучения, которая возбуждается составляющей поляризации, повторяющей по мелкомасштабному распределению поле накачки. Для выделения этой составляющей в явном виде полную поляризацию  $g_s |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_s$  разложим по системе ортогональных мод, каждая из которых в любой плоскости повторяет по мелкому масштабу поле накачки. Искомую систему мод будем строить таким образом, чтобы в произвольной плоскости каждая последующая мода  $\mathcal{E}_{j+1}$  совпала с частью поляризации, оставшейся после выделения из полной поляризации  $g_s |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_j$  проекций на все предыдущие моды. При этом нулевая мода не определена, что позволяет ее выбрать в каждом конкретном случае так, чтобы упростить последующие расчеты. В рассматриваемом случае в качестве нулевой моды возьмем функцию  $\mathcal{E}_0 = f_0(z, \mathbf{r}_\perp) \mathcal{E}_l(z, \mathbf{r}_\perp)$ , где  $f_0(z, \mathbf{r}_\perp) = \exp[-\mu^2 r_\perp^2 / 2r_l^2(z)]$  — медленная в масштабе  $\rho_l$  огибающая;  $r_l^2(z) = r_l^2(1 + z^2/z_l^2)$ ,  $z_l = k_l \rho_l r_l$  — радиус и длина дифракционного уширения пучка накачки;  $\mu$  — произвольный параметр, значение которого подбирается исходя из удобства аппроксимации модами  $\mathcal{E}_j$  поляризации  $g_s |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_s$ . Для того чтобы по модам  $\mathcal{E}_j$  было удобно раскладывать функции с плавной огибающей и тем же мелкомасштабным заполнением, что и у поля накачки, они должны иметь плавную огибающую, а по внутреннему заполнению повторять поле накачки. Введенные моды будут обладать этой особенностью, если при их построении по указанному выше рецепту в поляризации  $g_s |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_j$  пренебрегать компонентой  $g_s (|\mathcal{E}_l|^2 - 2|\mathcal{E}_l|^2) \mathcal{E}_j$ , эквивалентной шумовому (нерезонансному) источнику, вклад от которого в возбуждаемое им поле пропорционален параметру  $M_K = g_s I z_K (M_K - \text{полный инкремент на длине продольной корреляции поля } z_K = k_l \rho_l^2)$ . Полагая  $M_K \ll 1$ , получаем следующее рекуррентное соотношение для мод  $\mathcal{E}_j$ <sup>2</sup>:

$$\mathcal{E}_{j+1} = \frac{2g_s |\mathcal{E}_l|^2}{g_s |\mathcal{E}_l(z, 0)|^2} \mathcal{E}_j - \sum_{k=0}^j A_{j,k} \mathcal{E}_k; \quad (4)$$

<sup>2</sup> Для удобства расчета поляризация нормирована на значение  $g_s |\mathcal{E}_l(z, 0)|^2$ . В этом случае все моды  $\mathcal{E}_j$  имеют ту же размерность, что и  $\mathcal{E}_l$ .

$$A_{j,k} = \frac{2g_s}{P_j} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{r}_{\perp} |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_j^* \mathcal{E}_k,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_j \mathcal{E}_k^* d^2\mathbf{r}_{\perp} = P_j \delta_{j,k}.$$

При введении мод с помощью соотношения (4) матрица  $A_{j,k}$  имеет ленточный вид

$$A_{j,k} = A_{j,j-1} \delta_{j,k+1} + A_{j,j} \delta_{j,k} + A_{j,j+1} \delta_{j,k-1}, \quad (5)$$

т. е. моды  $\mathcal{E}_j$  согласованы между собой таким образом, что при «рассеянии» любой из них на профиле усиления поляризация  $2g_s |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_j$  представляется всего тремя слагаемыми:

$$2g_s |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_j = g_s \overline{|\mathcal{E}_l(z, 0)|^2} (A_{j+1,j} \mathcal{E}_{j+1} + A_{j,j} \mathcal{E}_j + A_{j-1,j} \mathcal{E}_{j-1}).$$

Представим моды в виде, удобном для дальнейших расчетов,  $\mathcal{E}_j = \sum_{k=0}^j b_{j,k} 2^k \exp[-kr_{\perp}^2/r_l^2(z)] \mathcal{E}_0$ . Подставляя это разложение в (4), находим рекуррентную формулу для коэффициентов  $b_{j,k}$ :

$$b_{j,k} = b_{j-1,k-1} - A_{j-1,j-1} b_{j-1,k} - A_{j-2,j-1} b_{j-2,k} \quad (b_{00} = 1, \quad b_{j,k} = 0 \text{ при } j < k, \quad k < 0). \quad (6)$$

Выражая  $\mathcal{E}_j$  через коэффициенты  $b_{j,k}$ , находим соотношение, связывающее коэффициенты  $A_{j,k}$  и  $b_{j,k}$ :

$$A_{j,k} = \frac{2P_l}{P_j} \sum_{n=0}^j \sum_{m=0}^k b_{j,n} b_{k,m} \frac{2^{m+n}}{2+n+m+\mu^2}; \quad (7)$$

$$P_j = P_l \sum_{n=0}^j \sum_{m=0}^j b_{j,n} b_{j,m} \frac{2^{m+n}}{1+n+m+\mu^2}, \quad P_l = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{E}_l|^2 d^2\mathbf{r}_{\perp}. \quad (8)$$

Нетрудно показать, что  $A_{j,j-1} = 1$ ,  $A_{j,j+1} = P_{j+1}/P_j$ . Таким образом, при заданном значении  $\mu$  по  $b_{00} = 1$  находятся  $P_0 = 1/(1+\mu^2)$  и  $A_{00} = 2(1+\mu^2)/(2+\mu^2)$ , затем определяются  $b_{11} = 1$ ,  $P_1 = 1/(1+\mu^2) - 4A_{00}/(2+\mu^2) + 4/(3+\mu^2)$ ,  $A_{01} = P_1/P_0$  и т. д.

Перейдем теперь непосредственно к решению задачи. Выделим в поляризации  $g_s |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_s$  проекции на  $N$  выделенных мод  $\mathcal{E}_j$

$$g_s |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_s = \sum_{j=0}^N C_j(z) \mathcal{E}_j + \tilde{\mathcal{F}}, \quad (9)$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{F}} \mathcal{E}_j^* d^2\mathbf{r}_{\perp} = 0 \text{ и } C_j(z) = \frac{g_s}{P_j} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_s \mathcal{E}_j^* d^2\mathbf{r}_{\perp}. \quad (10)$$

Рассеянное поле  $\mathcal{E}_s$  представим в виде суммы двух слагаемых  $\mathcal{E}_s = \mathcal{E} + \tilde{\mathcal{E}}$ , где по определению (см. (1))

$$\mathcal{E} = \sum_{j=0}^N \int_0^z dz' C_j(z') \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}'_{\perp} G_s(z - z', \mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp}) \mathcal{E}_j(z', \mathbf{r}'_{\perp}) + \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}'_{\perp} G_s(z, \mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp}) \mathcal{E}_s(0, \mathbf{r}'_{\perp}). \quad (11)$$

Здесь  $G_s(z, \mathbf{r}_{\perp}) = \frac{ik_s}{2\pi z} \exp\left[-\frac{ik_s}{2z} \mathbf{r}_{\perp}^2\right]$  — функция Грина. Поле  $\tilde{\mathcal{E}}$  удовлетворяет уравнению  $\hat{L}_s \tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{F}}$ , или

$$\hat{L}_s \tilde{\mathcal{E}} - g_s |\mathcal{E}_l|^2 \tilde{\mathcal{E}} + g_s \sum_{j=0}^N \frac{\mathcal{E}_j}{P_j} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}_{\perp} |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_j^* \tilde{\mathcal{E}} = g_s |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E} - g_s \sum_{j=0}^N \frac{\mathcal{E}_j}{P_j} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}_{\perp} |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_j^* \mathcal{E} \quad (12)$$

при граничных условиях  $\tilde{\mathcal{E}}(0, \mathbf{r}_{\perp}) = 0$ . Подставляя (11) в (10), получаем систему уравнений для коэффициентов  $C_j$ :

$$C_j(z) = \sum_{k=0}^N \int_0^z dz' C_k(z') B_{j,k}(z, z') + \frac{g_s}{P_j} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}_{\perp} |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_j^* \tilde{\mathcal{E}} + C_j^0(z), \quad (13)$$

где

$$C_j^{(0)}(z) = \frac{g_s}{P_j} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}_{\perp} d^2 \mathbf{r}'_{\perp} |\mathcal{E}_l(z, \mathbf{r}_{\perp})|^2 \mathcal{E}_j^*(z, \mathbf{r}_{\perp}) G_s(z, \mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp}) \times \times \mathcal{E}_s(0, \mathbf{r}'_{\perp});$$

$$B_{j,k} = \frac{g_s}{P_j} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}_{\perp} d^2 \mathbf{r}'_{\perp} G_s(z - z', \mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp}) |\mathcal{E}_l(z, \mathbf{r}_{\perp})|^2 \times \times \mathcal{E}_j^*(z, \mathbf{r}_{\perp}) \mathcal{E}_k(z', \mathbf{r}'_{\perp}). \quad (14)$$

Система уравнений (12) и (13) эквивалентна исходному уравнению (1). В уравнении (12) для  $\tilde{\mathcal{E}}$  в любой плоскости отсутствует возбуждение или усиление структуры поля, разлагаемой по  $N$  модам  $\mathcal{E}_j(z, \mathbf{r}_{\perp})$ , т. е. в этом уравнении исключено усиление или возбуждение существенной части наиболее нарастающих компонент.

Покажем, что при достаточно больших инкрементах вклад  $\tilde{\mathcal{E}}$  в полное поле  $\mathcal{E}_s$  усиливаемой волны относительно мал. Если поле

$\mathcal{E}$  разложить по модам

$$\mathcal{E} = \sum_{j=0}^N \sigma_j(z) \mathcal{E}_j + \mathcal{E}', \quad \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{r}_{\perp} \mathcal{E}' \mathcal{E}_j^* = 0, \quad (15)$$

то можно заметить, что источник в правой части (12), связанный с вкладом слагаемого  $\sum_{j=0}^N \sigma_j(z) \mathcal{E}_j$ , равен

$$\sigma_N [(2g_s |\overline{\mathcal{E}_l}|^2 - A_{N,N}) \mathcal{E}_N - A_{N-1,N} \mathcal{E}_{N-1}] + \sum_{j=0}^N (g_s |\mathcal{E}_l|^2 - 2g_s |\overline{\mathcal{E}_l}|^2) \sigma_j \mathcal{E}_j. \quad (16)$$

Второе слагаемое в (16), как уже отмечалось, эквивалентно шумовому нерезонансному источнику, возбуждающему в каждой плоскости  $z$  компоненты, некоррелированные с полем  $\tilde{\mathcal{E}}$ , пришедшим в эту плоскость из предыдущих областей, отстоящих от  $z$  на расстояние, большее  $z_K$ . Если усиление на длине корреляции  $z_K$  мало ( $M_K \ll 1$ ), то вклад этого источника в поле  $\tilde{\mathcal{E}}$  несуществен. Первое слагаемое в (16) зависит от значения  $\sigma_N$ , и им можно пренебречь, если вклад  $N$ -й моды в разложение поля  $\mathcal{E}$  относительно невелик. Приводимые ниже расчеты подтверждают, что при выборе достаточно большого числа мод мощность, сосредоточенная в  $N$ -й моде, быстро убывает с ростом  $N$ .

Таким образом, вкладом первого слагаемого в (16) в возбуждение поля  $\tilde{\mathcal{E}}$  можно пренебречь. Вклад составляющей  $\mathcal{E}'$  в правую часть (12)

будет мал только в том случае, если мощность  $P' = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{r}_{\perp} |\mathcal{E}'|^2$

мала по сравнению с мощностью  $P = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{r}_{\perp} |\mathcal{E}|^2$  всего поля  $\mathcal{E}$ .

В дальнейшем из результатов численного расчета мы получим, что для значения полного инкремента, большего или порядка единицы, величина  $P' = P - P_{\sigma}$ ,  $P_{\sigma} = \sum_{j=0}^N \sigma_j^2 P_j$  действительно мала по сравнению с  $P$ , а пока лишь заметим, что если характерный масштаб усиления  $z - z' \simeq 1/g_s |\overline{\mathcal{E}_l}|^2$  существенно меньше длины дифракционного распыления в свободном пространстве каждой из выделенных  $N$  мод, т. е.  $1/g_s |\overline{\mathcal{E}_l}|^2 \ll r_j/\theta_l$  ( $r_j$  — характерный масштаб изменения огибающей  $j$ -й моды,  $\theta_l = 1/k_l \rho_l$  — расходимость на-

качки), то в (11)  $\int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{r}'_{\perp} G(z - z', \mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp}) \mathcal{E}_j(z', \mathbf{r}'_{\perp})$  можно при-

ближенно заменить на  $\mathcal{E}_j(z, \mathbf{r}_{\perp})$ . Это означает, что при  $1/g_s |\overline{\mathcal{E}_l}|^2 \ll \ll r_j/\theta_l$  поле  $\mathcal{E}$  достаточно хорошо аппроксимируется первым слагаемым в (15), т. е.  $P' \ll P$  или  $P_{\sigma} \simeq P$ .



Итак, при указанных условиях полный источник в правой части (12) может быть относительно невелик. Поскольку, кроме того, в операторе, характеризующем усиление поля  $\tilde{\mathcal{E}}$  (см. левую часть (12)), исключено усиление наиболее нарастающих компонент, то мощность  $\tilde{P} = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{r}_{\perp} |\tilde{\mathcal{E}}|^2$  также будет мала по сравнению

с  $P$ , и вкладом  $\tilde{\mathcal{E}}$  в уравнение для  $C_j$  можно пренебречь<sup>3</sup>.

Подынтегральную матрицу  $B_{j,k}$  и вектор  $C_j^0(z)$  уравнения (14) удается рассчитать в явном виде для функции корреляции поля  $\mathcal{E}_l$ , определяемой формулой (3). Если ввести новые переменные  $U_j = C_j (1 + z^2/z_l^2)^{-1}$  и координату  $\zeta = \text{arctg } z/z_l$ , то при  $f(0, \mathbf{r}_{\perp}) = \exp(-\alpha^2 \mathbf{r}_{\perp}^2 / 2r_l^2)$  уравнение для  $U_j$  принимает вид

$$U_j(\zeta) - \sum_{k=0}^N \int_0^{\zeta} d\zeta' U_k(\zeta') B_{j,k}(\zeta, \zeta') = U_j^0(\zeta), \quad (17)$$

где

$$B_{j,k}(\zeta, \zeta') = \frac{k_s}{k_l} 2M_l \frac{P_l}{P_j} \sum_{n=0}^j \sum_{m=0}^k b_{j,n} b_{k,m} 2^{m+n} f_{n,m};$$

$$f_{n,m} = \left\{ \left( 2 + n + m + \mu^2 - \frac{\Delta k}{k_l} \right) + \left( n + 1 + \frac{1}{2} \mu^2 \right) \left( m + \frac{1}{2} \mu^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \sin^2(\zeta - \zeta') - \frac{i}{2} \delta \sin(\zeta - \zeta') \left[ \frac{1}{\cos \zeta \cos \zeta'} + \left( n + 1 + \frac{1}{2} \mu^2 \right) \frac{\cos \zeta}{\cos \zeta'} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( m + \frac{1}{2} \mu^2 \right) \frac{\cos \zeta'}{\cos \zeta} \right] \right\}^{-1}; \quad (18)$$

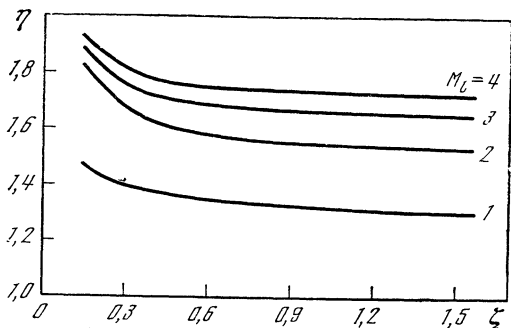
$$U_j^0(\zeta) = \frac{k_s}{k_l} \frac{P_l}{P_j} 2M_l \sigma \sum_{m=0}^j b_{j,m} 2^m \left\{ \left( 2 + m + \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{2} \mu^2 - \frac{\Delta k}{k_l} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \alpha^2 \left( m + 1 + \frac{1}{2} \mu^2 \right) \sin^2 \zeta - \frac{i}{2} \delta \text{tg } \zeta \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 + \left( 1 + m + \frac{1}{2} \mu^2 \right) \cos^2 \zeta \right] \right\}^{-1}; \quad (19)$$

$$M_l = g_s I_l z_l, \quad \delta = \frac{\Delta k}{k_l} \frac{\theta_l}{\theta_d}, \quad \Delta k = k_l - k_s, \quad \theta_d = \frac{1}{k_l r_l}.$$

Система (17) интегрировалась численно методом итераций [19] на ЭВМ БЭСМ-6 при  $\delta = 0$  и различных значениях  $M_l$  и  $\alpha$ . Пос-

<sup>3</sup> Влияние  $\tilde{\mathcal{E}}$  на коэффициенты  $C_j$  может быть относительно малым даже при  $P'$ , сравнимом с  $P$ , поскольку при достаточно большом значении  $N$  в  $\tilde{\mathcal{E}}$  входят в основном некоординированные с накачкой компоненты, так что вклад свертки  $g_s P_j^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{r}_{\perp} |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_j^* \tilde{\mathcal{E}}$  в правой части (13) несуществен.

кольку заранее не известно, какая структура поля сформируется при  $\zeta \rightarrow \pi/2$ , то вначале в качестве базисной бралась система шести мод с  $\mu = 0$ . Расчеты показывали, что независимо от радиуса огибающей на входе в среду на трассе  $\zeta \rightarrow \pi/2$  в стоксовом излучении формируется структура с определенным соотношением между коэффициентами  $\sigma_j$ . Если подобрать  $\alpha$  таким образом, чтобы при  $z = 0$  соотношение коэффициентов  $\sigma_j$  было близко к тому, которое формируется при  $\zeta \rightarrow \pi/2$ , то это соотношение практически не изменится в процессе усиления вдоль всей трассы  $0 \leq \zeta \leq$



$\leq \pi/2$ , причем в этом случае достигается наибольшее значение полного инкремента  $M = \ln [P_\sigma(\zeta)/P(0)]$ . Соответствующее значение  $\alpha = \alpha_0$  примерно определяет радиус огибающей стокова пучка, сформированного на трассах  $z \gg z_0$ .

Зависимость  $\alpha_0$  от  $M_l$  приведена ниже.

| $M_l$                 | 0,5  | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|
| $\alpha_0$            | 1    | 1,3  | 2,2  | 2,8  | 3,2  | 3,4  |
| $\alpha_{\text{опт}}$ | 1,19 | 1,68 | 2,37 | 2,91 | 3,36 | 3,76 |

Зависимость отношения  $\eta = M/2M_l\zeta$  ( $2M_l\zeta$  — полный инкремент для усредненного профиля интенсивности) от  $\zeta$  при различных  $M_l$  показана на рисунке, а предельные значения  $\eta$  ( $\zeta \simeq \pi/2$ ) в зависимости от  $M_l$  даны ниже.

| $M_l$                | 0,5  | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|----------------------|------|------|------|------|------|------|
| $\eta_{\text{числ}}$ | 1,15 | 1,31 | 1,52 | 1,64 | 1,70 | 1,71 |
| $\eta_{\text{анал}}$ | —    | 0,59 | 1,3  | 1,53 | 1,65 | 1,72 |

Видно, что параметр  $\eta(\pi/2)$  возрастает с увеличением  $M_l$ , приближаясь, как можно заключить из аналитических расчетов, изложенных в следующем разделе, к значению, равному 2.

В табл. 1 приведено отношение мощности  $P_\sigma = \sum_{j=0}^N \sigma_j^2 P_j$  к полной мощности  $P$  ( $\varepsilon = P_\sigma/P$ ), а также величина вклада отдельных ком-

понтент в значение  $P_\sigma$ . Видно, что параметр  $\varepsilon$  близок к единице. Это указывает на допустимость предположения о малости значения  $P'$  по сравнению с  $P^4$ . Численные счета показывают, что аппроксимация поля шестью модами с  $\mu = 0$  вполне оправдана вплоть до значений параметра  $M_l \simeq 4$ , поскольку мощность поля, приходящаяся на первые несколько мод, существенно превосходит мощность высших мод (табл. 1). Были проведены также расчеты  $M(\xi)$ ,  $P_\sigma(\xi)$ ,  $P(\xi)$ ,  $\sigma_j^2 P_j$ ,  $\eta(\xi)$  при выборе в качестве базисной системы мод с  $\mu \simeq \alpha_0$ . Результаты расчетов показали, что значения  $M(\xi)$ ,  $P_\sigma(\xi)$ ,  $\eta(\xi)$  для  $M_l = 3,4$  практически остаются неизменными, а основная доля мощности стоксовой волны оказывается сосредоточенной в первой моде (табл. 2).

Таблица 1

| $M_l$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon_0$ | $\varepsilon_1$ | $\varepsilon_2$     | $\varepsilon_3$     | $\varepsilon_4$     | $\varepsilon_5$     |
|-------|---------------|-----------------|-----------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 0,5   | 0,873         | 0,947           | 0,05            | $2,8 \cdot 10^{-4}$ | $6,2 \cdot 10^{-7}$ | 0                   | 0                   |
| 1     | 0,858         | 0,817           | 0,18            | $5,1 \cdot 10^{-3}$ | $7,5 \cdot 10^{-5}$ | $3,9 \cdot 10^{-7}$ | 0                   |
| 2     | 0,855         | 0,537           | 0,40            | 0,055               | $3,9 \cdot 10^{-3}$ | $1,1 \cdot 10^{-4}$ | $2,6 \cdot 10^{-6}$ |
| 3     | 0,872         | 0,388           | 0,46            | 0,13                | $1,9 \cdot 10^{-2}$ | $1,3 \cdot 10^{-3}$ | $6,7 \cdot 10^{-5}$ |
| 4     | 0,878         | 0,313           | 0,46            | 0,19                | $3,8 \cdot 10^{-2}$ | $4,1 \cdot 10^{-3}$ | $2,9 \cdot 10^{-4}$ |

Примечание.  $\varepsilon_n = \sigma_n^2 P_n / P_\sigma$

Таблица 2

|  | $\varepsilon$ | $\varepsilon_0$ | $\varepsilon_1$     | $\varepsilon_2$     | $\varepsilon_3$     | $\varepsilon_4$ | $\varepsilon_5$ |
|--|---------------|-----------------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------------|-----------------|
| $M_l = 3$<br>$\alpha = \mu = 2,8$      | 0,864         | 0,998           | $1,5 \cdot 10^{-4}$ | $7 \cdot 10^{-3}$   | $3,9 \cdot 10^{-7}$ | 0               | 0               |
| $M_l = 4$<br>$\alpha = \mu = 3,2$      | 0,872         | 0,999           | $5,5 \cdot 10^{-4}$ | $1,8 \cdot 10^{-1}$ | $8,4 \cdot 10^{-7}$ | 0               | 0               |
| $M_l = 5$<br>$\alpha = 3,4, \mu = 3,2$ | 0,881         | 0,995           | $4,3 \cdot 10^{-3}$ | $6 \cdot 10^{-4}$   | $4,8 \cdot 10^{-7}$ | 0               | 0               |

<sup>4</sup> Малое отличие  $P_\sigma$  от  $P$  связано с тем, что поле  $\mathcal{E}$  возбуждается источником, характерная длина нарастания которого меньше длины дифракционного расплывания генерируемого им поля. Поэтому основной вклад в поле  $\mathcal{E}$  вносят компоненты, повторяющие накачку в данной плоскости.

### 3. ОПТИМАЛЬНАЯ СТРУКТУРА И МАКСИМАЛЬНЫЙ ИНКРЕМЕНТ ВОСПРОИЗВОДЯЩЕЙ ВОЛНЫ

Из численного исследования, проведенного в предыдущем разделе, видно, что существует оптимальная структура поляризации, возбуждающая локализованную вблизи оси пучка накачки стоксову волну, нарастающую с наибольшим инкрементом. Существование более узкой, чем накачка, оптимальной структуры характерно для ВР ограниченных пучков. Стоксова волна, возбуждаемая источником поляризации с радиусом, большим оптимального, усиливается слабее из-за уменьшения интенсивности накачки к периферии пучка; если же радиус меньше оптимального, усиление падает из-за увеличения дифракционных потерь. Отсюда следует, что среди всех компонент, возникающих при распространении стоксовой волны  $\mathcal{E}_s$  в среде с профилем усиления  $g_s |\mathcal{E}_l|^2$ , с наибольшим инкрементом будут нарастать такие, которые возбуждаются оптимальной для данной плоскости составляющей поляризации. Найдем аналитический вид этой составляющей и определим соответствующий ей инкремент стоксовой волны.

Выделяя в поляризации  $g_s |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_s$  в явном виде проекцию на некоторую (пока неизвестную) оптимальную структуру  $C(z) \times f_0(z, \mathbf{r}_\perp)$ ,  $\mathcal{E}_l(z, \mathbf{r}_\perp)$  ( $f_0(z, \mathbf{r}_\perp)$  — медленная в масштабе  $\rho_l$  функция координат) и выполняя процедуру, аналогичную той, которая была проведена в предыдущем разделе, получим эквивалентную (1) систему уравнений

$$\begin{aligned} C(z) - \int_0^z dz' C(z') \mathcal{L}(z, z') - \frac{g_s}{P_f} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}_\perp |\mathcal{E}_l|^2 f_0^* \mathcal{E}_l^* \tilde{\mathcal{E}} = \\ = \frac{g_s}{P_f} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}_\perp d^2 \mathbf{r}'_\perp G_s(z, \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) \overline{|\mathcal{E}_l(z, \mathbf{r}_\perp)|^2 \mathcal{E}_l^*(z, \mathbf{r}_\perp) \mathcal{E}_l(0, \mathbf{r}_\perp)} \times \\ \times f_0^*(z, \mathbf{r}_\perp) f(0, \mathbf{r}'_\perp); \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \hat{L}_s \tilde{\mathcal{E}} - g_s |\mathcal{E}_l|^2 \tilde{\mathcal{E}} + g_s \frac{f_0 \mathcal{E}_l}{P_f} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}_\perp |\mathcal{E}_l|^2 f_0^* \mathcal{E}_l^* \tilde{\mathcal{E}} = g_s |\mathcal{E}_l|^2 \int_0^z dz' C(z') \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}'_\perp G_s(z - z', \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) f_0(z', \mathbf{r}'_\perp) \mathcal{E}_l(z', \mathbf{r}'_\perp) - \\ - g_s \frac{f_0 \mathcal{E}_l}{P_f} \int_0^z dz' C(z') \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}_\perp d^2 \mathbf{r}'_\perp G_s(z - z', \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) \times \\ \times f_0^*(z, \mathbf{r}_\perp) f_0(z', \mathbf{r}'_\perp) \overline{|\mathcal{E}_l(z, \mathbf{r}_\perp)|^2 \mathcal{E}_l^*(z, \mathbf{r}_\perp) \mathcal{E}_l(z', \mathbf{r}'_\perp)} + \\ + g_s |\mathcal{E}_l|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}'_\perp G_s(z, \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) f(0, \mathbf{r}'_\perp) \mathcal{E}_l(0, \mathbf{r}'_\perp) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g_s \frac{f_0 \mathcal{E}_l}{P_f} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}_{\perp} d^2 \mathbf{r}'_{\perp} G_s(z, \mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp}) f_0^*(z, \mathbf{r}_{\perp}) f(0, \mathbf{r}'_{\perp}) \times \\
& \times \overline{|\mathcal{E}_l(z, \mathbf{r}_{\perp})|^2 \mathcal{E}_l^*(z, \mathbf{r}_{\perp}) \mathcal{E}_l(0, \mathbf{r}'_{\perp})}; \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(z, z') &= \frac{g_s}{P_f} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}_{\perp} d^2 \mathbf{r}'_{\perp} G_s(z - z', \mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp}) f_0^*(z, \mathbf{r}_{\perp}) f_0(z', \mathbf{r}'_{\perp}) \times \\
& \times \overline{|\mathcal{E}_l(z, \mathbf{r}_{\perp})|^2 \mathcal{E}_l^*(z, \mathbf{r}_{\perp}) \mathcal{E}_l(z', \mathbf{r}'_{\perp})}; \quad (22)
\end{aligned}$$

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}_{\perp} |f_0|^2 |\mathcal{E}_l|^2.$$

В уравнении (21) для  $\tilde{\mathcal{E}}$  отсутствует усиление структуры  $f_0 \mathcal{E}_l$ . Поэтому если функцию  $f_0(z, \mathbf{r}_{\perp})$  выбрать таким образом, чтобы она была оптимальной и обеспечивала наиболее быстрое нарастание коэффициента  $C(z)$  и поля  $\mathcal{E}$ , то собственное усиление волны  $\tilde{\mathcal{E}}$ , характеризуемое оператором в левой части уравнения (21), будет меньше по сравнению с усилением поля  $\mathcal{E}$ . Если, кроме того, длина дифракционного расплывания  $z_f = r_f / \theta_l$  ( $r_f$  — радиус огибающей  $f_0(z, \mathbf{r}_{\perp})$ ) структуры  $f_0 \mathcal{E}_l$  в свободном пространстве больше характерной длины нарастания коэффициента  $C(z)$ , то член, пропорциональный  $C(z')$  в правой части (21), примерно равен <sup>5</sup>

$$(2g_s \overline{|\mathcal{E}_l|^2} - A) f_0 \mathcal{E}_l \int_0^z C(z') dz', \quad (23)$$

$$A = \frac{2g_s}{P_f} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}'_{\perp} \overline{|\mathcal{E}_l|^2} |f_0|^2.$$

В том случае, когда радиус  $r_f(z)$  мал по сравнению с  $r_l(z)$ , поляризация (23) для поля  $\tilde{\mathcal{E}}$  и само поле  $\tilde{\mathcal{E}}$  будут относительно малы и в первом приближении полем  $\tilde{\mathcal{E}}$  и вкладом его в уравнение для  $C(z)$  можно пренебречь. Далее мы уточним, при каких условиях это приближение действительно оправданно, а сейчас рассмотрим оставшееся интегральное уравнение для  $C(z)$  (см. (20) при  $\tilde{\mathcal{E}} = 0$ ).

<sup>5</sup> Шумовой составляющей в поляризации, равной

$$g_s (|\mathcal{E}_l|^2 - 2 \overline{|\mathcal{E}_l|^2}) f_0 \mathcal{E}_l \int_0^z C(z') dz',$$

здесь пренебрегается, поскольку вклад от нее в мощность поля  $\tilde{\mathcal{E}}$  пропорционален малому параметру  $M_R$ .

Решение этого уравнения надо оптимизировать таким образом, чтобы функция  $f_0(z, \mathbf{r}_\perp)$  давала наибольшее нарастание коэффициента  $C(z)$ . Предположим, что на входе в среду  $f(0, \mathbf{r}_\perp) = \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha^2(0)\frac{r_\perp^2}{r_l^2}\right]$ . Так как  $f_0(z, \mathbf{r}_\perp)$  — осесимметричная плавно спадающая функция поперечных координат, то при  $z > 0$  ее также удобно искать в виде гауссовой кривой  $\exp\left[-\frac{1}{2}\alpha^2(z)\frac{r_\perp^2}{r_l^2(z)}\right]$  с переменным радиусом, причем считаем, что  $\alpha(0)$  определяется радиусом функции  $f$  в плоскости  $z = 0$ . Это допущение вполне оправдано, если  $\alpha(0) \gg 1$ . Закон изменения радиуса найдем исходя из условия максимального нарастания поля  $\mathcal{E}$ . После взятия интегралов и замены переменных  $\zeta = \arctg(z/z_l)$ ,  $U = \frac{C}{1+z^2/z_l^2}$  получаем

$$U(\zeta) - \int_0^\zeta d\zeta' U(\zeta') \mathcal{L}(\zeta, \zeta') = \sigma \mathcal{L}(\zeta, 0);$$

$$\mathcal{L}(\zeta, \zeta') = 2g_s I_l [1 + \alpha^2(\zeta)] \left\{ 2 + \frac{1}{2} [\alpha^2(\zeta) + \alpha^2(\zeta')] + \right. \quad (24)$$

$$+ \frac{1}{2} \alpha^2(\zeta') \left[ 1 + \frac{1}{2} \alpha^2(\zeta) \right] \sin^2(\zeta - \zeta') -$$

$$- \frac{i}{2} \delta \sin(\zeta - \zeta') \left[ \frac{1}{\cos \zeta \cos \zeta'} + \left[ 1 + \frac{1}{2} \alpha^2(\zeta) \right] \frac{\cos \zeta}{\cos \zeta'} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \alpha^2(\zeta') \frac{\cos \zeta'}{\cos \zeta} \right] \left. \right\}^{-1}.$$

Решение (24), являющееся функционалом от  $\alpha(\zeta)$ , следует оптимизировать таким образом, чтобы функция  $C(z)$  достигала максимума на выходе слоя при заданном входном значении  $\alpha(0)$ . Ограничимся, однако, более простой задачей. А именно, найдем, как усиливается поле  $\mathcal{E}$  с оптимальным на входе параметром  $\alpha$ . Полагая  $\alpha = \text{const}(\zeta)$ , получим решение  $U(\alpha, \zeta)$ , оптимизируя которое, определим значение  $\alpha_{\text{опт}}$ , соответствующее наиболее нарастающему полю. Подобный прием оправдан, если полученная величина  $\alpha_{\text{опт}}$  действительно окажется не зависящей от  $\zeta$ .

При  $\text{tg } \zeta \ll \max(\alpha, \alpha^2/\delta)$  решение (24) можно найти, используя преобразование Лапласа. В результате получаем, что при  $1 \ll \alpha \ll 4M_l$  и  $\delta \ll 4M_l$

$$U = 2M_l \sigma \exp \left[ 2M_l \zeta \left( 1 - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\alpha^2 + \delta^2}{8M_l^2} - \frac{i\delta}{4M_l} \right) \right]. \quad (25)$$

Отыскивая максимум  $U(\zeta)$ , находим, что  $\alpha_{\text{опт}} = 8^{1/4} M_l^{1/2}$ , т. е. условие  $1 \ll \alpha \ll 4M_l$  действительно выполняется для  $M_l \gg 1$ . Тот факт, что  $\alpha_{\text{опт}}$  не зависит от  $\zeta$ , указывает на обоснован-

ность предположения о независимости  $\alpha$  от  $\zeta$ . Значение реальной части полного амплитудного инкремента  $M_a(\zeta)$  при  $\alpha = \alpha_{\text{опт}}$  равно  $M_a(\zeta) = 2M_l \zeta \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}M_l} - \frac{\delta^2}{8M_l^2}\right)$ . Таким образом, для поля стоксовой волны, задаваемого на входе в среду функцией  $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_l(0, \mathbf{r}_\perp) \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha_{\text{опт}}^2 \frac{r_\perp^2}{r_l^2}\right)$ , решение первого приближения записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & 2M_l \int_0^z dz' e^{M_a(z')} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{r}'_\perp G_s(z - z', \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) \times \\ & \times \exp\left[-\frac{1}{2} \alpha_{\text{опт}}^2 \frac{r'_\perp{}^2}{r_l^2(z')}\right] \mathcal{E}_l(z', \mathbf{r}'_\perp) + \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{r}'_\perp G_s(z, \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) \times \\ & \times \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha_{\text{опт}}^2 \frac{r'_\perp{}^2}{r_l^2}\right) \mathcal{E}_l(0, \mathbf{r}'_\perp). \end{aligned} \quad (26)$$

Найдем относительный вес структуры  $f_{\text{опт}} \mathcal{E}_l$  ( $f_{\text{опт}} = \exp\left[-\frac{1}{2} \alpha_{\text{опт}}^2 \frac{r_\perp^2}{r_l^2(z)}\right]$ ) в решении (26), т. е. определим величину

$$\varepsilon = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{r}_\perp \mathcal{E} f_{\text{опт}}^* \mathcal{E}_l^* \right|^2}{P_f P}, \quad P = \int |\mathcal{E}|^2 d^2\mathbf{r}_\perp. \quad (27)$$

Подставляя (26) в (27), находим, что при  $M_l \gg 1$  значение  $\varepsilon \simeq 1 - O(1/\sqrt{M_l})$ , т. е. с точностью до членов  $\sim 1/\sqrt{M_l}$  поперечная структура поля совпадает с  $f_{\text{опт}} \mathcal{E}_l$ .

Поле  $\mathcal{E}_s$  равно полю  $\mathcal{E}$ , если  $\tilde{P} \ll P$ . Как указывалось выше, поле  $\tilde{\mathcal{E}}$  будет относительно мало, если радиус  $r_f \ll r_l$  и длина дифракционного расплывания  $z_f \gg 1/2g_s |\mathcal{E}_l(z, 0)|^2$ . При  $1 \ll \alpha_{\text{опт}} \ll 4M_l$  оба эти условия выполняются, и поэтому действительно  $\tilde{P} \ll P$ . Добавки в инкремент для  $C(z)$ , связанные с вкладом поля  $\tilde{\mathcal{E}}$ , также малы при  $M_k \ll 1$  и  $M_l \gg 1$  (их абсолютная величина пропорциональна соответственно  $M_k$  и  $1/M_l^2$ ). Полный инкремент интенсивности

$$M(z) = 4M_l \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}M_l} - \frac{\delta^2}{8M_l^2}\right) \text{arctg} \frac{z}{z_l}. \quad (28)$$

Предельное значение полного инкремента для коллимированного на входе пучка  $M_{\text{кол}} = 2\pi M_l (1 - 1/\sqrt{2}M_l - \delta^2/8M_l^2)$ ,

а для сфокусированного пучка  $M_{сф} = 2M_{кол} = 4\pi M_l \times \times (1 - 1/\sqrt{2}M_l - \delta^2/8M_l^2)$ . Последние формулы при  $\delta \neq 0$  пригодны лишь в том случае, если  $\{\arctg [\max(\alpha, \alpha^2/\delta)] - \pi/2\} \ll \pi/2$ .

Полученные аналитические значения  $M(z)$  и  $M_{кол}$  при оптимальных граничных условиях хорошо согласуются с приведенными выше данными численных расчетов, выполненных при  $\delta = 0$ . В численных расчетах при выборе параметра  $\mu$ , близкого к  $\alpha_{опт}$ , подавляющая доля мощности усиливаемой волны оказывалась сосредоточенной в основной моде. Это подтверждает, что найденная структура функции  $f_0(z, \mathbf{r}_\perp)$  действительно соответствует стоксовой волне, нарастающей с наибольшим коэффициентом усиления.

#### 4. ВЛИЯНИЕ АНТИСТОКСОВЫХ КОМПОНЕНТ НА ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА

Из формулы (28) следует, что при  $M_R \ll 1$  с увеличением интенсивности возбуждающего пучка параметр  $\delta^2/M_l^2$  уменьшается, т. е. полный инкремент ВКР стремится к двойному значению по сравнению с полным инкрементом, рассчитанным по усредненному профилю  $g_s |\overline{\mathcal{E}_l}|^2$ .

В то же время при попутном ВКР с увеличением интенсивности накачки процесс усиления стоксовой компоненты начинает зависеть от ее взаимодействия с антистоксовой волной. Система уравнений, описывающая в квазиоптическом приближении взаимодействие стоксовых и антистоксовых компонент, имеет вид

$$\hat{L}_s \mathcal{E}_s = g_s |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_s + g_s \mathcal{E}_l^2 \mathcal{E}_a^* e^{i\delta k z}; \quad (29)$$

$$\hat{L}_a \mathcal{E}_a = -g_a |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_a - g_a \mathcal{E}_l^2 \mathcal{E}_s^* e^{i\delta k z}, \quad (30)$$

где  $\hat{L}_a = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k_a} \Delta_\perp$ ;  $\delta k = 2k_l - k_a - k_s$ ;  $k_{a,s,l} = \omega_{a,s,l}/v_{a,s,l}$ ;  $v_l$ ,  $v_s$ ,  $v_a$  и  $\omega_l$ ,  $\omega_s$ ,  $\omega_a$  — групповые скорости и частоты соответственно накачки, стоксовой и антистоксовой компонент.

Так же, как и ранее, рассмотрим возможность преимущественного усиления структуры, связанной с волной накачки. Представим правые части уравнений (29) и (30) в виде суммы двух ортогональных составляющих

$$g_s |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_s + g_s \mathcal{E}_l^2 \mathcal{E}_a^* e^{i\delta k z} = C_s(z) f_s(z, \mathbf{r}_\perp) \mathcal{E}_l(z, \mathbf{r}_\perp) e^{i\mathbf{x}r_\perp} + \tilde{\mathcal{P}}_s; \quad (31)$$

$$g_a |\mathcal{E}_l|^2 \mathcal{E}_a + g_a \mathcal{E}_l^2 \mathcal{E}_s^* e^{i\delta k z} = C_a(z) f_a(z, \mathbf{r}_\perp) \mathcal{E}_l(z, \mathbf{r}_\perp) e^{-i\mathbf{x}r_\perp} + \tilde{\mathcal{P}}_a. \quad (32)$$

Множитель  $e^{i\mathbf{x}r_\perp}$  в правых частях (31) и (32) выделен в явном виде, поскольку заранее не известно, какая именно связанная с накачкой



компонента поляризации будет возбуждать наиболее усилимые волны <sup>6</sup>.

Для пучка накачки с гауссовой огибающей исследование задачи достаточно громоздко. Поэтому ограничимся более простым случаем многомодовой накачки с плоской огибающей.

Предположим, что на входе в среду  $\mathcal{E}_{s,a} = \sigma_{s,a} e^{\pm i\kappa r_{\perp}} \times \times \mathcal{E}_l(0, \mathbf{r}_{\perp})$ ,  $\sigma_{s,a} = \text{const}(\mathbf{r}_{\perp})$ . Для пучков с плоской огибающей при  $M_{\kappa} \ll 1$  вкладом поляризации  $\tilde{\mathcal{P}}_s$  и  $\tilde{\mathcal{P}}_a$  в возбуждении полей  $\mathcal{E}_s$  и  $\mathcal{E}_a$  можно пренебречь. Выполняя процедуру, аналогичную той, которая была проведена для одной стоксовой компоненты, получим систему уравнений для  $C_s$  и  $C_a$ :

$$C_s(z) = 2g_s I_l \int_0^z dz' \frac{C_s(z')}{1 - \frac{k_l}{k_s} \frac{i}{2} \frac{z-z'}{z_p}} \exp \left[ i \frac{\kappa^2 (z-z')}{2k_l} - \frac{\kappa^2 (z-z')^2}{4k_l^2 \rho_l^2} \right] +$$

$$+ 2g_s I_l e^{i\delta k z} \int_0^z dz' \frac{C_a^*(z')}{1 - \frac{k_l}{k_a} \frac{i}{2} \frac{z-z'}{z_p}} \exp \left[ -i \frac{\kappa^2 (z-z')}{2k_l} - \frac{\kappa^2 (z-z')^2}{4k_l^2 \rho_l^2} \right] + C_s^0(z); \quad (33)$$

$$C_a(z) = -2g_a I_l \int_0^z dz' \frac{C_a(z')}{1 + \frac{k_l}{k_a} \frac{i}{2} \frac{z-z'}{z_p}} \exp \left[ i \frac{\kappa^2 (z-z')}{2k_l} - \frac{\kappa^2 (z-z')^2}{4k_l^2 \rho_l^2} \right] -$$

$$- 2g_a I_l e^{i\delta k z} \int_0^z dz' \frac{C_s^*(z')}{1 + \frac{k_l}{k_s} \frac{i}{2} \frac{z-z'}{z_p}} \times$$

$$\times \exp \left[ i \frac{\kappa^2 (z-z')}{2k_l} - \frac{\kappa^2 (z-z')^2}{4k_l^2 \rho_l^2} \right] - C_a^0(z). \quad (34)$$

Здесь  $z_p = \rho_l^2 (1/k_s - 1/k_l)^{-1} = \rho_l^2 (1/k_l - 1/k_a)^{-1}$  — длина рас- согласования накачки со стоксовой или антистоксовой компонентами ( $\delta k \ll \Delta k \ll k_l$ ).

Прежде всего из уравнений (33) и (34) видно, что при  $\kappa = \delta k = 0$  экспоненциального нарастания коэффициентов  $C_s$  и  $C_a$  не происходит. Для того чтобы избавиться от полного согласования стоксовой и антистоксовой волн, требуется выбрать такое  $\kappa$ , чтобы  $\kappa^2/k_l \gg p$ , где  $p$  — инкремент для компонент  $C_s$  и  $C_a$ . При этом,

<sup>6</sup> Например, при четырехфотонном взаимодействии плоских волн выбором соответствующих направлений распространения можно избавиться от полного согласования стоксовых и антистоксовых компонент, приводящего к подавлению усиления.

однако, фактор  $\exp[-\kappa^2(z-z')^2/4k_i^2\rho_l^2]$  не будет приводить к ограничению усиления, если только  $\kappa^2/4k_i^2\rho_l^2p^2 \ll 1$ . Последние два условия при  $M_K \ll 1$  противоречивы. Поэтому, хотя для  $\kappa \gg \sqrt{pk_l}$  и можно избавиться от полного согласования подобных накачке стоксовой и антистоксовой компонент, соответствующий инкремент при  $M_K \ll 1$  все же остается малым по сравнению с  $2g_s I_l$ , т. е. в условиях  $\delta k = 0$  говорить о преимущественном усилении в пучках накачки с плоской огибающей не имеет смысла.

Рассмотрим теперь возможность преимущественного усиления при  $\delta k \neq 0$ . Полагая  $\kappa = 0$  и вводя новую функцию  $C = C_a^* e^{i\delta k z}$ , получим

$$C_s(z) = \int_0^z dz' \frac{2g_s I_l}{1 - \frac{i}{2} \frac{z-z'}{z_p}} \{C_s + C \exp[i\delta k(z-z')]\} + C_s^0(z); \quad (35)$$

$$C(z) = - \int_0^z dz' \frac{2g_a I_l}{1 - \frac{i}{2} \frac{z-z'}{z_p}} \{C \exp[i\delta k(z-z')] + C_s\} - C^0(z). \quad (36)$$

Для нахождения инкрементов, характеризующих нарастание вдоль трассы коэффициентов  $C_s$  и  $C$ , возьмем от системы (35) и (36) преобразование Лапласа. Полюса, при которых образы от  $C_s$  и  $C$  по Лапласу обращаются в нуль, дают искомые значения инкрементов  $p$ . Соответствующее уравнение для отыскания инкрементов  $p$  имеет вид (для простоты считаем  $g_s = g_a = g$ )

$$1 - 2gI_l [K(p) - K(p - i\delta k)] = 0, \quad (37)$$

где

$$K(p) = \int_0^\infty dz e^{-pz} \left(1 - \frac{iz}{2z_p}\right)^{-1}.$$

Если  $\sqrt{8} g I_l \ll \delta k$ , то

$$\operatorname{Re} p = 2gI_l \left[1 - \frac{1}{2\delta k z_p} - 2 \left(\frac{2gI_l}{\delta k}\right)^2 - \frac{1}{8M_p^2}\right]; \quad (38)$$

$$M_p = gI_l z_p \gg 1.$$

Последний член в формуле (38) уменьшается с увеличением интенсивности (см. также [14]), в то время как предпоследний член, наоборот, увеличивается с ростом  $I_l$ . Отсюда следует, что существует оптимальное значение интенсивности  $gI_l = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\delta k}{z_p}}$ , при котором преимущественное усиление моды, подобной накачке,

будет наибольшим по сравнению с усилением стоксовой волны в усредненном профиле локального инкремента  $g|\mathcal{E}_l|^2$ . Для этого значения интенсивности  $\text{Re } p = 2gI_l (1 - 5/2\delta k z_p)$ .

При  $\delta k \lesssim 8^{1/4} gI_l$  значение инкремента моды, подобной накачке, становится меньше или порядка  $gI_l$ . В связи с этим представляет интерес оценка инкремента некоррелированных с накачкой мод.

Рассмотрим, например, усиление плоской стоксовой волны. Для расчета инкремента воспользуемся изложенной выше методикой. Выделим в правых частях (29) и (30) в явном виде проекции на задаваемые входными сигналами плоские волны и, так же как в предыдущем случае, получим уравнения для  $C_s$  и  $C_a$ . Оказывается, что при  $M_k \ll 1$  пренебрежимо мал не только вклад от ортогональных плоским волнам составляющих поляризации, но также вклад антистоксовой компоненты в усиление стоксовой волны. Рассогласование стоксовых и антистоксовых компонент обеспечивает усиление стоксова сигнала с амплитудным инкрементом, равным  $gI_l$  (при  $MM_k \ll 1$ ). При  $\delta k \lesssim 8^{1/4} gI_l$  это значение превышает инкремент для волн, подобных  $\mathcal{E}_l$ . Полученный результат означает, что при достаточно малом  $\delta k$  воспроизведение волнового фронта накачки в усиленном излучении отсутствует.

Для сравнений полученных результатов с данными экспериментов, в которых роль затравочной стоксовой волны играет либо шумовой источник, либо не зависящий от накачки сигнал, требуется оценить относительный вес оптимальной для усиления компоненты. Простейший расчет показывает, что для пучка с гауссовой огибающей при шумовом затравочном сигнале мощность воспроизводящей волны превысит мощность некоррелированных с накачкой компонент, если  $\frac{\theta_l}{\theta_g} < \frac{M_l \zeta^2}{\sqrt{3}} \exp [M_l (\eta - 1) \zeta]$ . Если же угловой спектр  $\theta_s$  входного стоксова сигнала уже, чем  $\theta_s \lesssim \sqrt{3} \theta_l / \zeta M_l \zeta$ , то условие воспроизведения принимает вид  $\theta_l / \theta_g < \sqrt{M_l \zeta / 2} \exp [M_l (\eta - 1) \zeta]$ . При ВР сфокусированных пучков  $\theta_l / \theta_g < \sqrt{2} M_l \exp [\pi M_l (\eta - 1)]$ . Для значений  $M_l \simeq 3$ , соответствующих полному инкременту  $2\pi M_l \simeq 19$ , параметр  $\eta \simeq 1,6$  (при  $\delta = 0, \delta k \gg g_s I_l$ ) и условие воспроизведения при шумовом входном сигнале дает  $\theta_l / \theta_g < 1,7 \cdot 10^3$ , что находится в соответствии с экспериментальными данными [16]. При  $M_l = 2$ ,  $2\pi M_l \simeq 12,5$   $\eta \simeq 1,5$  для плоской затравочной волны получаем  $\theta_l / \theta_g < 35$ , что также согласуется с экспериментом [15].

1. *Ахманов С. А.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, 17, № 4, с. 541.
2. *Беспалов В. И., Пасманик Г. А.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, № 5—6, с. 634.
3. *Грасюк А. З.*— Труды ФИАН СССР. М., «Наука», 1974, 76, с. 75.
4. *Грасюк А. З.*— Квант. электроника, 1974, 1, с. 485.
5. *Рагульский В. В.*— Труды ФИАН СССР. М., «Наука», 1976, 85, с. 3.
5. *Пасманик Г. А., Фрейдман Г. И.*— Квант. электроника, 1974, 1, с. 547.
6. *Бабин А. А., Беляева Н. Н., Беляев Ю. Н., Фрейдман Г. И.*— ЖЭТФ, 1976, 71, с. 97.
7. *Зубарев И. Г., Миронов А. Б., Михайлов С. И.*— Квант. электроника, 1977, 4, с. 1155.
8. *Грасюк А. З., Зубарев И. Г., Мишин В. И., Смирнов В. Г.*— Квант. электроника, 1973, № 5, с. 27.
9. *Ковалев В. И., Поповичев В. И., Рагульский В. В., Файзуллоев Ф. С.*— ЖЭТФ, 1973, 64, с. 2028.
10. *Бетин А. А., Пасманик Г. А.*— Письма в ЖЭТФ, 1977, 23, с. 577.
11. *Зельдович Б. Я., Поповичев В. И., Рагульский В. В., Файзуллоев Ф. С.*— Письма в ЖЭТФ, 1972, 15, с. 160.
12. *Сидорович В. Г.*— ЖТФ, 1976, 46, с. 2168.
13. *Бельдюгин И. М., Галушкин М. Г., Земсков Е. М., Мандросов В. И.*— Квант. электроника, 1976, 3, с. 2467.
14. *Зельдович Б. Я., Шкунов В. В.*— Квант. электроника, 1977, 4, 1090.
15. *Беспалов В. И., Бетин А. А., Пасманик Г. А.*— Письма в ЖТФ, 1977, 3, с. 215.
16. *Беспалов В. И., Бетин А. А., Пасманик Г. А.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1977, 20, № 5, с. 791.
17. *Блашук В. Н., Зельдович Б. Я., Мельников Н. А.* и др.— Письма в ЖЭТФ, 1977, 3, с. 211.
18. *Соколовская А. И., Бреховских Г. Л., Кудрявцева А. Д.*— Докл. АН СССР, 1977, 233, с. 356.
19. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., Физматгиз, 1959.

## СИНОПТИЧЕСКИЕ ВИХРИ, ИЛИ ВОЛНЫ РОССБИ, В ОКЕАНЕ. ЭКСПЕРИМЕНТ И ОСНОВЫ ТЕОРИИ

А. С. МОНИН, М. Н. КОШЛЯКОВ

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Синоптические океанские вихри определяются как нестационарные вихреобразные возмущения океанской циркуляции, имеющие горизонтальный масштаб порядка внутреннего масштаба Россби  $R = \bar{N}hf^{-1}$ , где  $f$  — параметр Кориолиса,  $h$  — толщина бароклинного слоя в океане и  $\bar{N}$  — средняя по бароклинному слою частота Вайсяля; во внутренних частях антициклонических субтропических круговоротов  $R$  имеет порядок 50 км. Использование термина «синоптические» подчеркивает физическую аналогию между рассматриваемым явлением и синоптическими вихрями в атмосфере (перемещающимися циклонами и антициклонами). Эта аналогия усматривается в их одинаковой физической природе (волны Россби, для которых определяющую роль играет широтное изменение параметра Кориолиса), в предполагаемом преобладающем механизме генерации (бароклинная неустойчивость крупномасштабных течений), соответствующих горизонтальных масштабах (атмосферный и океанский масштабы Россби) и квази-геострофичности движения.

Накопленные экспериментальные данные позволяют разделить синоптические океанские вихри на два класса:

а) фронтальные вихри, образующиеся за счет отсечения меандрирующих струй таких фронтальных течений, как Гольфстрим или Куроисио;

б) вихри открытого океана, являющиеся скорее, как это представляется в настоящее время, двумерными квазигоризонтальными и квазигеострофическими волнами синоптического масштаба.

В настоящем обзоре наиболее подробно будут описаны вихри открытого океана, обнаруженные и экспериментально исследованные за последние десять лет. Фронтальные вихри будут рассмотрены в основном для того, чтобы выяснить общие черты и различия между ними и вихрями открытого океана. Теоретическая часть обзора носит подчиненный характер и касается в основном результатов, имеющих непосредственный выход на эксперимент.

### Первые наблюдения

Наиболее фундаментальный вклад в исследование синоптических вихрей открытого океана внесла советская экспедиция «Полигон-70» [1] и американо-английская экспедиция МОДЕ-1 [2]. Они были организованы, однако, не «на пустом месте», а явились логическим продолжением исследований нестационарных океанских течений, выполненных океанологами различных стран ранее. Так, «Полигон-70» был очередным из серии советских экспериментов, которые были специально направлены на изучение изменчивости морских и океанских течений и основу которых составляли долговременные измерения течений на заякоренных буйковых станциях, снабженных соответствующей аппаратурой. Эти «полигонные» исследования проводились в СССР по инициативе В. Б. Штокмана, еще в 1935 г. выполнившего серию долговременных измерений течений в Каспийском море [3]. Затем последовали экспедиции в Черном море в 1956 г. [4], в Северной Атлантике в 1958 г. [5] и в Аравийском море в 1967 г. [6].

Из перечисленных экспедиций полигон в Аравийском море («Полигон-67») был первым, на котором были обнаружены, правда, преимущественно косвенным методом синоптические океанские вихри (рис. 1). Повторная съемка того же района показала резкую нестационарность течений синоптического масштаба. Программа измерений течений на буйковых станциях на «Полигоне-67» не была достаточно обширной для того, чтобы прямым образом выявить пространственную структуру и временную эволюцию поля течений. Однако неплохое локальное совпадение измеренных и рассчитанных течений было получено [7].

Теперь можно с уверенностью сказать, что колебания плотности, показанные на рис. 2, были обусловлены прохождением через место наблюдений бароклинных синоптических вихрей. Преобладающий период колебаний оказался равным 95 сут [8]. Весьма интересна очевидная из рис. 2 перемежаемость колебаний — вихри явно распространялись отдельными «пакетами», причем период изменчивости амплитуды колебаний составлял примерно полтора года.

Большой резонанс среди океанографов имели результаты измерений глубинных течений поплавокми нейтральной плавучести Сваллоу, выполненных в 1958 г. в районе к западу от Португалии [9] и в 1959—1960 гг. вблизи Бермудских островов [10, 11]. Последние измерения, результаты которых оказались особенно интересными, были проведены на глубинах 2 и 4 км. Вопреки предположению об очень слабом квазистационарном переносе вод в меридиональном направлении, были обнаружены сильные нестационарные течения со скоростью до  $40 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$  (!) на глубине 4 км. Измерения не были столь интенсивными, чтобы вскрыть истинную

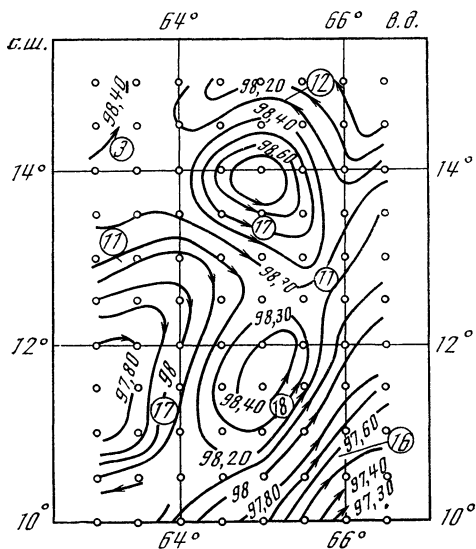


Рис. 1. Геострофические течения на глубине 150 м по данным съемки района «Полигона-67» 20 марта — 6 апреля 1967 г. [86]

Числа у линий тока — значения

$$Q = - \int_{z_0}^z \tilde{\rho}(x, y, z) dz$$

в единицах, соответствующих

исчислению плотности в ( $\sigma_t - 20$ ), а глубины — в сотнях метров;  $z_0 = 1500$  м — глубина нулевой поверхности;  $\tilde{\rho}(x, y, z)$  — распределение плотности, сглаженное в горизонтальной плоскости для удаления случайного «шума». Числа в кружках — скорость в см·с<sup>-1</sup>. Точки — положения батометрических станций

структуру течения; все же удалось грубо оценить горизонтальный и временной масштабы поля скорости, оказавшиеся равными 100 км и 50 сут.

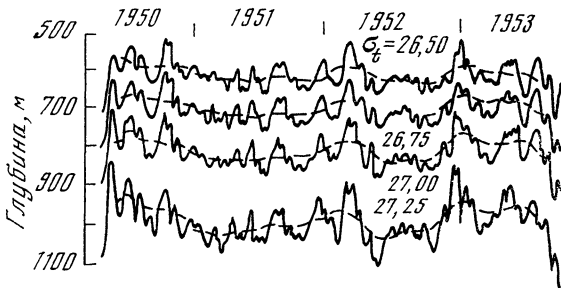
Наиболее интересная низкочастотная часть спектра на рис. 3 рассчитана по данным гидрологических наблюдений, проводившихся по инициативе Г. Стоммела каждые полмесяца с 1954 по 1969 г. в точке в 25 км к востоку — юго-востоку от Бермудских островов. Великолепно выраженный пик спектра на периоде 100 сут, очевидно, связан (опять-таки, как это мы теперь понимаем) с бароклинными синоптическими вихрями.

Описанные выше наблюдения не были единственными (но, на наш взгляд, они были наиболее важными), к концу 60-х — началу 70-х годов показавшими существование в глубинах океана сильных нестационарных долгопериодных движений вод. Оставался, однако, без ответов целый ряд кардинальных вопросов, из которых можно упомянуть следующие.

1) Типичны ли эти течения для океана? Существуют ли они в истинно «открытом» океане, на большом удалении от фронтальных течений типа Гольфстрима или Кurocио?

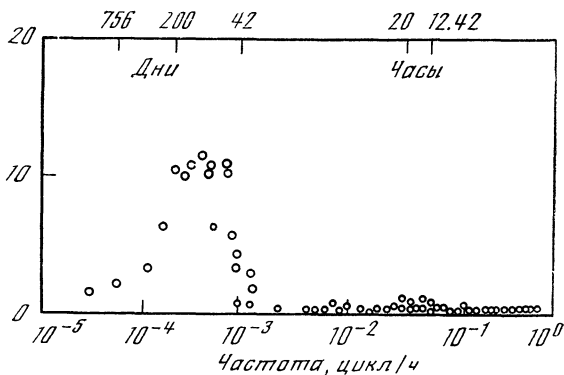
2) Какова природа течений? Это турбулентность или волны, а если волны, то какие — плоские или двумерные? Заполняют ли они пространство сплошным образом или представляют собой одиночные возмущения?

3) Каковы масштабы поля течений? Как связаны между собой пространственные и временные масштабы? Укладывается ли эта связь в известные теоретические модели нестационарных океанских движений?



**Рис. 2.** Низкочастотные колебания глубины залегания изопикнических поверхностей по данным наблюдений на станции «Танго» ( $24^\circ$  с. ш.,  $135^\circ$  в. д.) в 1950 — 1953 гг. [8]

Штриховые кривые — результат скользящего сглаживания с периодом 100 сут.



**Рис. 3.** Спектр колебаний температуры на глубине 500—600 м в районе Бермудских островов [117]

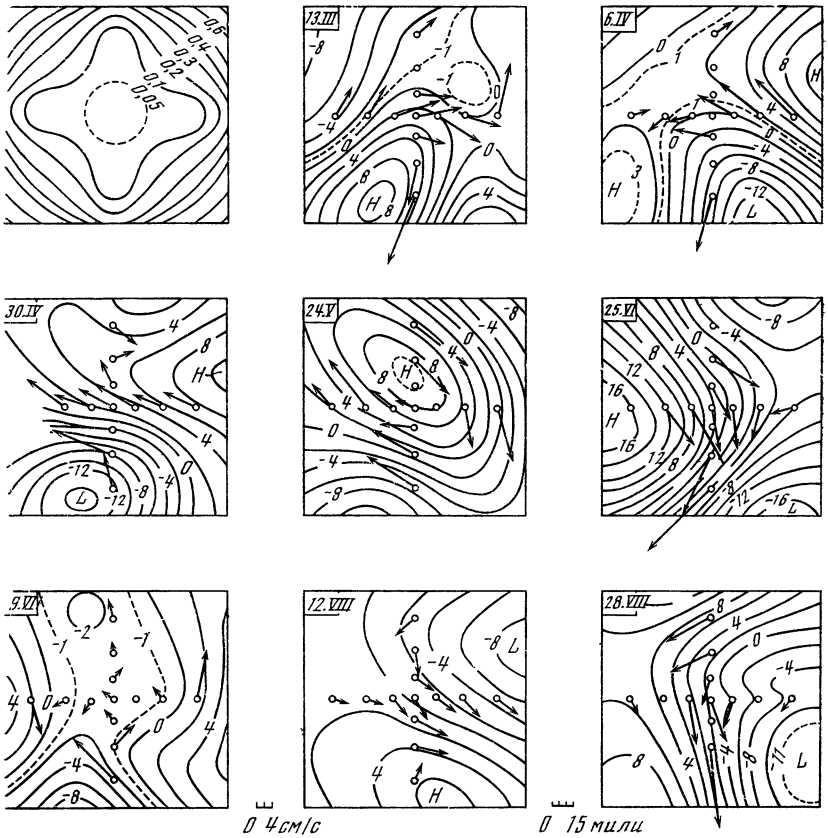
4) Какова энергия этих течений по сравнению с энергией других компонент спектра движений океанских вод? Каков механизм их генерации?

Стала очевидной необходимость экспедиции, в которой путем *прямых измерений течений* были бы, хотя бы частично и в предварительном плане, получены ответы на сформулированные вопросы. Такой стала экспедиция «Полигон-70».

### «Полигон-70»

Эксперимент «Полигон-70» был выполнен весной—летом 1970 г. в тропической зоне Северной Атлантики, в восточной части Северного пассатного течения [1]. Главный пикноклин здесь выражен очень резко, его центр находится на глубине 100—150 м. Согласно результатам расчетов течений по заданному полю плотности [12] крупномасштабное геострофическое течение в районе «Полиго-





**Рис. 4.** Эволюция течений синоптического масштаба на горизонтах 300 (а), 00 (б) и 1000 м (в) по данным «Полигона-70» [118]

Стрелки — низкочастотные компоненты векторов скорости в точках наблюдений; пунктирные стрелки получены интерполяцией по глубине или времени. Отсутствие стрелки в точке наблюдений означает отсутствие данных измерений. Кривые — линии тока, рассчитанные с помощью объективного анализа; числа у кривых показывают значения функции тока в  $10^7 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $H$  — высокое,  $L$  — низкое давление. Центр квадрата в точке  $16^\circ 30'$  с. ш.,  $3^\circ 30'$  з. д., сторона квадрата 280 км. Вверху слева — распределение меры ошибки интерполяции функции тока при наличии исходных данных для всех тринадцати использованных точек измерений

за-70» направлено в верхнем слое океана на запад—юго-запад и имеет скорость около  $3 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ ; на глубинах ниже 300 м оно сменяется глубинным противотечением, скорость которого не превышает  $1 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Основными наблюдениями на «Полигоне-70» были измерения течений на 17 буйковых заякоренных станциях, располагавшихся вдоль лучей прямоугольного креста с центром  $16^\circ 30'$  с. ш.,

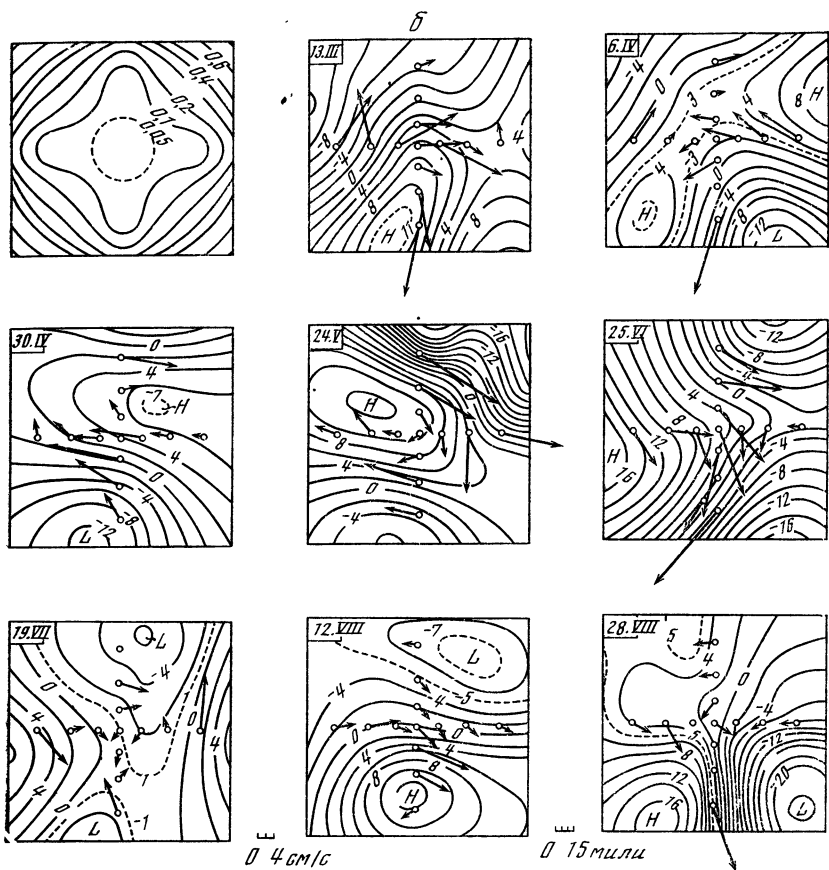
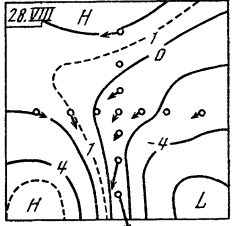
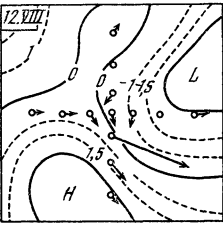
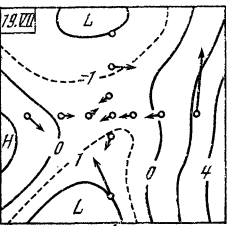
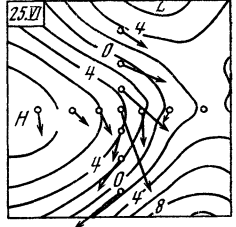
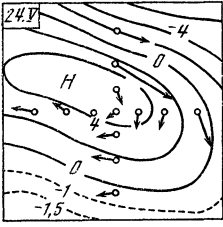
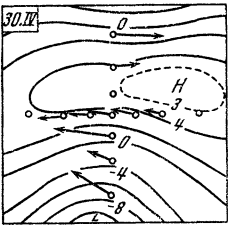
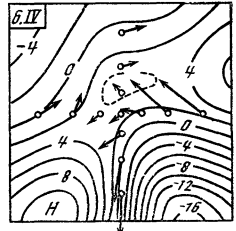
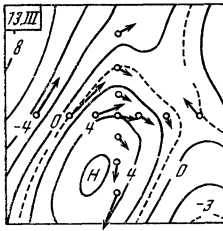
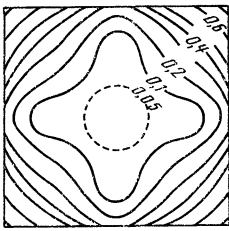


Рис. 4 (продолжение)

33°30' з.д. (рис. 4); длина каждого луча составляла 100 км. Измерения течений проводились на 10 горизонтах от 25 до 1500 м. Эта система станций поддерживалась непрерывно с конца февраля до начала сентября 1970 г.

Спектральный анализ временных рядов компонент скорости, полученных в результате измерений на станциях «Полигона-70», выявил глубокий минимум плотности энергии колебаний скорости на периоде 3—4 сут [13]. Это может служить основанием для низкочастотной фильтрации указанных временных рядов, которая и была выполнена с эффективным периодом 3,5 сут для всех точек и горизонтов наблюдений. Некоторые из полученных таким образом распределений течений синоптического масштаба показаны на рис. 4. Объективный анализ выполнялся методом оптимальной интерполяции однородного и изотропного случайного векторного поля [14]. В основу анализа были положены результаты расчетов



0 4  
cm/s

0 15 мили

Рис. 4 (окончание)

пространственных корреляционных функций синоптической компоненты поля скорости и относительного уровня «шума» в этом поле, выполненных по данным «Полигона-70»; эти результаты уверенно подтвердили предположения об изотропности и квазибездивергентности поля горизонтальной скорости [15]. Анализ синоптических картин для различных горизонтов и дат, включая показанные на рис. 4, приводит к следующим основным выводам.

1) На «Полигоне-70» было зафиксировано несколько циклонических и антициклонических вихреобразных возмущений скорости, причем один антициклонический вихрь, центр которого проходил вблизи центра полигона во второй половине мая, был промерен особенно хорошо.

2) «Плотная упаковка» вихрей явно преобладала. Периоды слабых течений в центре полигона интерпретируются как периоды

прохождения через полигон седлообразных областей между четырьмя вихрями.

3) Поперечный масштаб вихрей (расстояние от центра вихря до точки с максимальной скоростью) был очень устойчив, уменьшаясь от 110—120 км на глубине 300 м до 100 км на 1000 м.

4) Вихри перемещались на запад (с небольшой компонентой к югу) со средней скоростью 5—6 см·с<sup>-1</sup>. Эта величина была особенно устойчива для главного антициклона.

5) Надежно был зафиксирован наклон оси главного антициклона в сторону, примерно обратную его перемещению. Этот наклон приводил к сдвигу в 60 км между положениями центра вихря на глубинах 300 и 600 м во второй половине мая (рис. 4, а, б), что при «длине волны» возмущения в 440 км соответствует сдвигу фаз колебаний скорости в 50°.

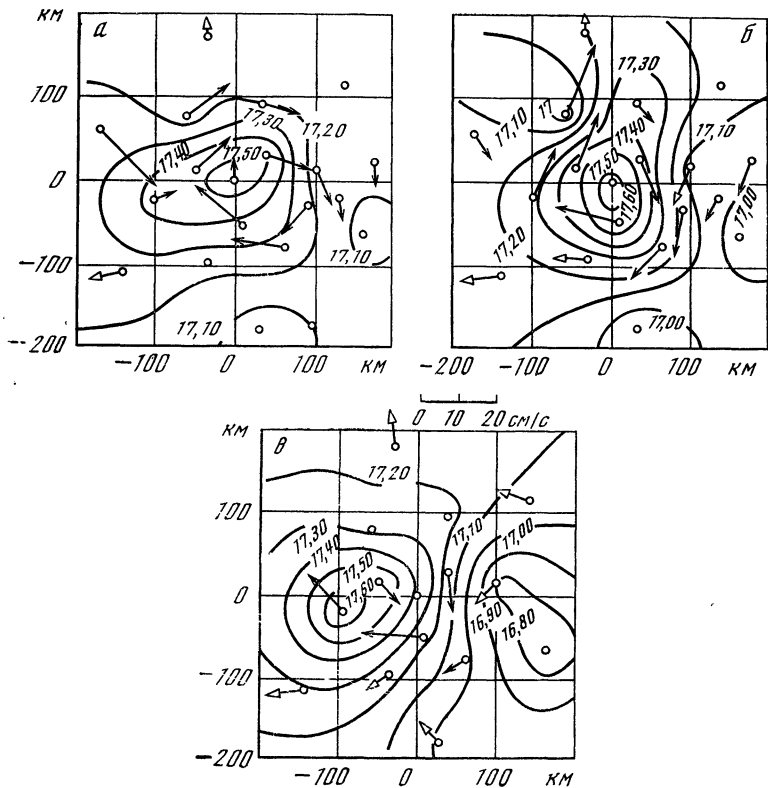
6) Составляя в среднем величину порядка 10 см·с<sup>-1</sup> на глубинах 200—1000 м, скорость течения в поле вихрей в отдельные моменты и в отдельных точках достигала 25 см·с<sup>-1</sup> на 200—300 м, 35 см·с<sup>-1</sup> на 400—600 м, 20 см·с<sup>-1</sup> на 1000 м и 10 см·с<sup>-1</sup> на 1500 м. Достаточно уверенно получено возрастание скорости в тыловой части главного антициклона в течение мая—июня: с 10 примерно до 17 см·с<sup>-1</sup> на горизонте 300 м и даже в большей степени на горизонте 600 м.

Физическая трактовка результатов «Полигона-70» в свете теории волн Россби (см. раздел 5) была развита в ряде работ [16—20]. Результаты этой трактовки позволяют сказать, что во время «Полигона-70» впервые в открытом океане были измерены бароклинные волны Россби. В разделе 5 также будет показано, что свойства главного вихря «Полигона-70» указывают на развитие этого вихря за счет бароклинной неустойчивости крупномасштабного течения.

Вертикальная структура синоптических течений на «Полигоне-70» изучалась в [21] путем разложения данных измерений течений по системе вертикальных естественных ортогональных функций [22]. Было установлено, что первые три моды этого разложения практически исчерпывают вертикальную изменчивость течений.

## МОДЕ-1

МОДЕ-1 (Mid ocean dynamical experiment) был вторым после «Полигона-70» экспериментом, специально направленным на изучение океанских течений синоптического масштаба. Его интенсивная фаза была проведена океанологами США и Великобритании в марте—июне 1973 г. в районе Саргассова моря с центром 28° с.ш., 69°40' з.д. и радиусом примерно 200 км. В МОДЕ-1 был применен широкий комплекс методов и средств океанографических наблюдений, из которых главными были: измерения течений и температуры на более чем 20 буйковых станциях в слое



**Рис. 5.** Эволюция синоптических компонент полей течений и температуры на глубине 420 м по данным МОДЕ-1 [2] 15—18 апреля (а), 9—12 мая (б) и 2—5 июня 1973 г. (в)

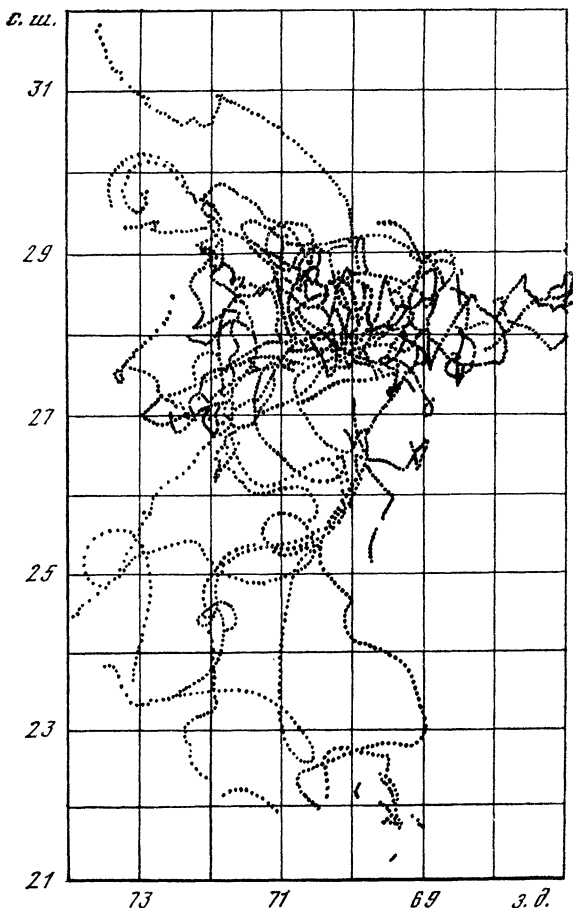
Центр квадрата в точке  $28^{\circ}$  с. ш.,  $69^{\circ}40'$  з. д. Кружки — положения буйковых станций. Стрелки — векторы скорости, полученные в результате низкочастотной фильтрации временных рядов скорости с периодом 4 сут; незачерненные стрелки не вполне надежны. Кривые — изолинии температуры в  $^{\circ}\text{C}$ , построенные методом оптимальной интерполяции по Гандину по данным буйковых станций

от 500 м до дна океана при четырех в среднем горизонтах измерений течений и семи горизонтах измерений температуры на каждой станции; измерения течений поплавками SOFAR на глубине 1500 м — всего около 25 запусков поплавков продолжительностью от одного до четырех месяцев во время интенсивной фазы; восемь плотностных съемок района преимущественно до дна. Результатом было получение карт синоптических вихрей для различных горизонтов и дат (например, [2, 23]), примеры которых даны на рис. 5.

Основным результатом МОДЕ-1, как и «Полигона-70», следует считать обнаружение нескольких, преимущественно «плотно упакованных», синоптических вихрей; особенно хорошо был промерен один антициклонический вихрь (рис. 5), по ряду параметров очень

**Рис. 6.** Траектории поплавок SOFAR на глубине 1500 м в районе МОДЕ-1 сентября 1972 г, по декабрь 1974 г. [119]

Почти все поправки были запущены в круге радиусом 100 км и центром  $28^{\circ}$  с. ш.,  $69^{\circ}40'$  з. д. Продолжительность работы поплавок колебалась преимущественно от месяца до двух лет. Точки показывают положения поплавок через каждые сутки



напоминавший главный антициклон «Полигона-70». Поперечный масштаб вихрей МОДЕ-1 был 90—95 км—несколько меньше, чем на «Полигоне-70», что вполне объясняется меньшим локальным значением внутреннего масштаба Россби. Главный вихрь МОДЕ-1 дрейфовал на запад со средней скоростью  $2 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$ —значительно медленнее скорости дрейфа вихрей «Полигона-70», что обусловлено практическим отсутствием в районе МОДЕ-1 средних крупномасштабных течений в слое над главным термоклином. Скорость течений в поле вихрей МОДЕ-1 оказалась несколько выше, чем на «Полигоне-70». Измерения температуры на центральном буе МОДЕ-1 показали, что главный антициклон МОДЕ-1 распространялся в глубь океана вплоть до его дна [2]. Интерпретация основных данных МОДЕ-1 в свете теории волн Россби показала, что вертикальное строение и дрейф на запад вихрей МОДЕ-1 неплохо моделируются суммой двух баротропных

и двух бароклининых (первой моды) волн Россби в модели океана с непрерывной стратификацией плотности [24].

Измерения поплавками SOFAR (рис. 6) проводились на глубине преобладания баротропной компоненты течений синоптического масштаба (см., например, [24]). Помимо орбитальных движений поплавков в поле вихрей, на рис. 6 обращает на себя внимание преобладание переноса поплавков на запад (т. е. в направлении вектора «фазовой скорости» вихрей) по сравнению с переносом на восток и дисперсия поплавков преимущественно в меридиональном направлении. Все это свидетельствует о заметной доле переносной («турбулентной») формы движения в поле вихрей; соответствующее эффективное значение коэффициента горизонтальной турбулентной диффузии, параметрически описывающего вклад вихрей в баланс тепла или массы для крупномасштабного движения, оказывается равным  $8 \cdot 10^6 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$  [25].

### Другие наблюдения

К настоящему времени накоплено большое количество экспериментальных данных, демонстрирующих присутствие синоптических вихрей в различных районах Мирового океана. Любопытно, что во многих случаях следы вихрей уверенно обнаруживаются в старых данных (преимущественно в результатах плотностных съемок), накопленных до семидесятых годов, но не привлекавших к себе внимания до экспедиций «Полигон-70» и МОДЕ-1. Рассмотрим несколько таких примеров.

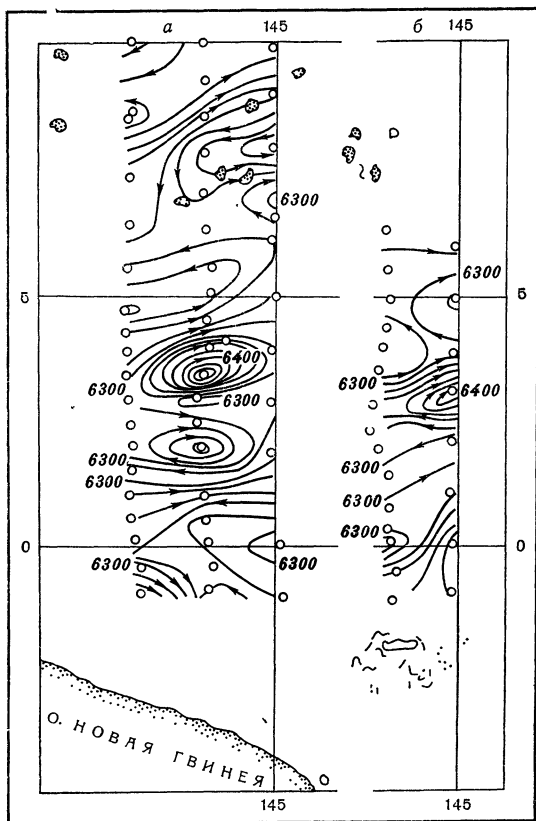
Картина течений на рис. 7 была подкреплена прямыми измерениями с дрейфующего корабля. Скорость течения в поле основного антициклонального вихря на  $3-4^\circ$  с. ш. по этим измерениям достигала  $75 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$  на глубине  $100-200 \text{ м}$ . Согласно рис. 7, вихрь, находившийся в южной части Межпассатного противотечения, перемещался на восток со скоростью около  $15 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Динамические расчеты и измерения течений электромагнитным датчиком показали, что скорость течения в поле антициклонального вихря на  $35^\circ$  ю.ш. (рис. 8) составляла на поверхности океана  $1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ! Последующие наблюдения [26] подтвердили квазипостоянное присутствие антициклональных вихрей в рассматриваемой части Восточно-Австралийского течения.

Следы бароклининых синоптических вихрей были уверенно получены на системе меридиональных и зональных разрезов через Северное пассатное течение в районе Гавайских островов, повторенных 16 раз с интервалом в месяц в 1964—1965 гг. [27, 28]. Согласно этим данным, можно полагать, что вихри дрейфовали на запад со средней скоростью около  $4,5 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$  — примерно втрое быстрее направленного на запад крупномасштабного геострофического течения в верхнем слое океана. Имеются указания на то, что амплитуда вихрей увеличивалась в периоды усиления упомянутого зонального течения [29].

Рис. 7. Динамические карты для горизонта 200 м по данным первой (а) и второй (б) плотностных съемок района Межпассатного противотечения к северу от Новой Гвинеи в апреле 1958 г. [120]

Интервал времени между съемками — 6 сут. В обеих съемках порядок выполнения разрезов — с запада на восток. Динамические высоты — в дин-мм. Нулевая поверхность на глубине 2000 м. Кружки — положения батометрических станций



Отчетливо выраженные синоптические вихри усматриваются на картах скорости звука на глубине 800 м в юго-западной части Саргассова моря, построенных по материалам съемок 1966 и 1969 гг. [30]. Связанные с синоптическими вихрями возмущения океанологических полей обнаруживались в восточной части приэкваториальной зоны Тихого океана [31], в районе к юго-западу от южной оконечности Африки [32], в центральной части южной половины Тихого океана [33]. В спектрах колебаний температуры на глубине 250 м, построенных по данным измерений 1966—1969 гг. на кораблях погоды к югу и непосредственно к северу от центральной части Северо-Атлантического течения, уверенно обнаруживаются пики на периодах около 100 сут, что естественно связать с бароклинными синоптическими вихрями [34]. Отметим, однако, отсутствие подобных пиков в аналогичных спектрах, построенных по данным кораблей погоды в районах Лабрадорского, Восточно-Гренландского, Норвежского течений и течения Ирмингера [34].



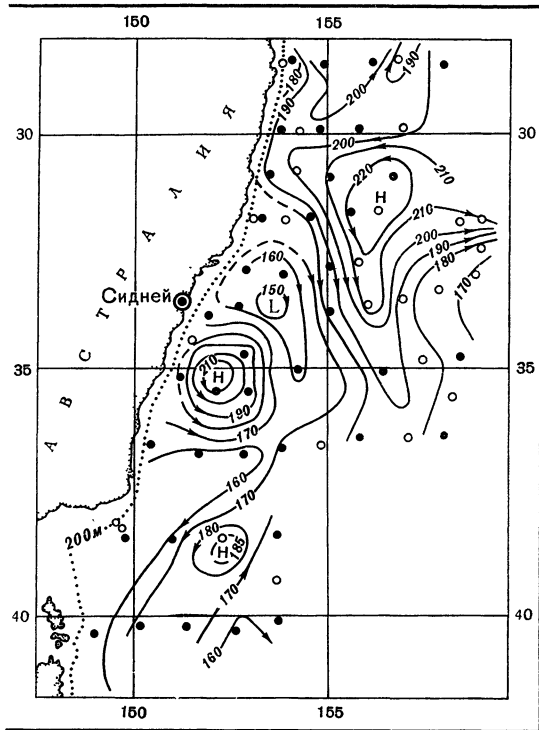


Рис. 8. Динамическая карта поверхности океана по данным наблюдений 13 января — 6 февраля 1964 г. в районе Восточно-Австралийского течения [121].

Нулевая поверхность на 1300 м. Зачерненные кружки — положения батометрических станций (измерения до 1300 м), светлые — батитермографных станций (измерения до 285 м)

Выше обсуждались только вихри *собственно синоптического масштаба*, развивающиеся по всей глубине океана и преобладающие в слое главного термоклина, непосредственно над ним и в глубинах океана. Наблюдения, однако, ясно указывают на присутствие в *верхнем* слое океана («сезонном» термокline и приповерхностном однородном слое) также вихрей существенно меньших размеров — с поперечным масштабом от 5 до 50 км. Присутствие таких вихрей было отчетливо зафиксировано экспедициями «Полигон-70» (например, [35]) и МОДЕ-1 (например, [36]), они наблюдались в Калифорнийском течении [37, 38] в северной [11] и юго-западной [39] частях Саргассова моря, подо льдом в Арктическом бассейне [40] и во многих других частях Мирового океана.

Даже приведенный выше неполный обзор убеждает в типичности явления синоптического вихреобразования для Мирового океана. Общая тенденция такова, что это явление особенно развито в областях наиболее отчетливо выраженных средних (крупномасштабных) течений. Ясно, что этот вывод имеет непосредственное отношение к проблеме генезиса синоптических вихрей; мы вернемся к этому вопросу после краткого рассмотрения фронтальных вихрей.

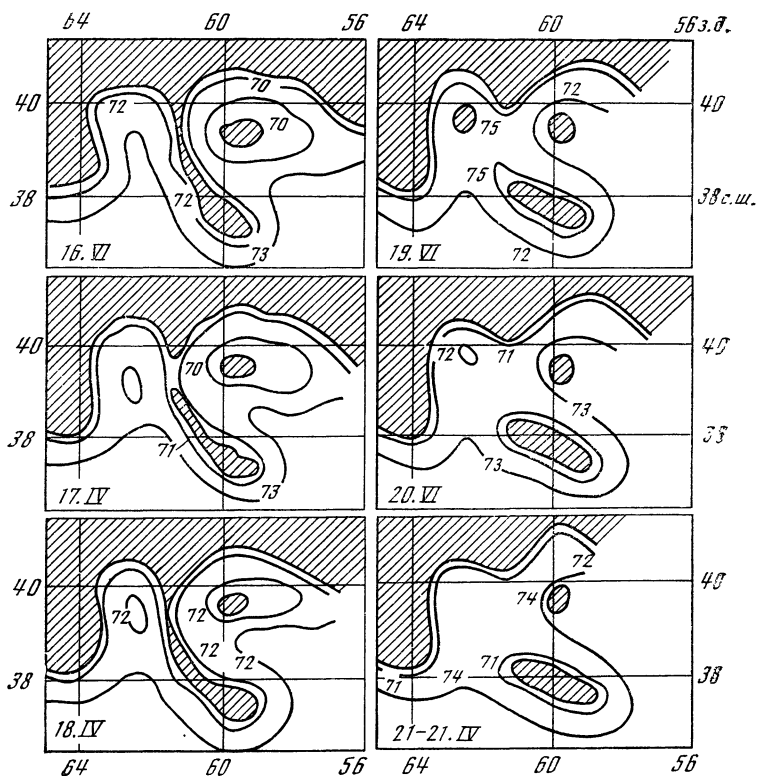
### 3. ФРОНТАЛЬНЫЕ СИНОПТИЧЕСКИЕ ВИХРИ

Как показывают многочисленные наблюдения, Гольфстрим на протяжении от мыса Гаттерас по крайней мере до Ньюфаундлендской банки представляет собой неустойчивое струйное течение, характеризующееся развитием горизонтальных волн с длиной 300—400 км, переходом этих волн в так называемые «меандры» и дальнейшим «отсечением» меандров и их трансформацией в холодные циклонические вихри справа и теплые антициклонические вихри слева от основной струи Гольфстрима. Классический и остающийся и сейчас лучшим в океанографической литературе пример отсечения циклонического меандра Гольфстрима и превращения его в холодный вихрь показан на рис. 9. Рисунок построен по данным нескольких последовательных температурных съемок с шести океанографических судов. Необходимо иметь в виду, что процесс отсечения происходит по всей толще океана и что течения являются квазигеострофическими; последнее означает, что изотермы на рис. 9 дают неплохое представление о положениях линий тока на всех глубинах, и, таким образом, отсеченное холодное «пятно» на рис. 9 формирует внутреннюю часть интенсивного циклонического вихря. Скорость вращательного движения воды в поле вихря у поверхности океана в рассматриваемом случае достигала  $3 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ; с глубиной она уменьшалась за счет геострофического эффекта.

Примерно аналогично происходит процесс образования теплых *антициклонических* вихрей к северу от основной струи Гольфстрима [41]. Согласно Фьюглистеру [42], на протяжении от м. Гаттерас до Ньюфаундлендской банки в год образуется пять или чуть больше пар циклонов и антициклонов Гольфстрима.

Как можно судить из сравнения океанографических и метеорологических данных, процесс образования циклонов и антициклонов Гольфстрима качественно подобен процессу отсечения меандров и превращения их в циклонические и антициклонические вихри в поле западного струйного течения в верхних слоях атмосферы (например, [43]). Можно полагать, что это свидетельствует о единстве механизма образования атмосферных и океанских вихрей, заключающегося, по-видимому, в бароклинной неустойчивости атмосферных и океанских зональных течений.

Процесс образования холодных циклонических (например, [44]) и теплых антициклонических (например, [45]) вихрей в результате отсечения меандров Куроиси в районе непосредственно к востоку от Японии в основном аналогичен описанному выше процессу вихреобразования в поле Гольфстрима. На рис. 10 поражают размер, амплитуда и длительность жизни антициклонического вихря. Скорость поверхностного течения в поле вихря сразу после его образования достигала  $2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ . Следует, однако, подчеркнуть, что в отличие от фронтальных вихрей Гольфстрима и циклонов Куроиси *антициклоны* Куроиси после своего возникновения не



**Рис. 9.** Эволюция распределения температуры (в °F) на глубине 200 м в районе Гольфстрима с 16 по 22 июня 1950 г.

Заштрихованы области с температурой ниже 65° F (18° C)

носят характера квазиодиночных вихревых образований, дрейфующих среди окружающего относительно спокойного океана. Напротив, обширная часть Тихого океана к востоку от Японии примерно до 180° долготы представляет собой уникально сложную в гидрологическом и гидродинамическом отношении область, сплошь заполненную пульсирующими струями и ответвлениями Кюросио, Оясио и Северо-Тихоокеанского течения, перемещающимися и непрерывно деформирующимися вихрями обоих знаков, которые образуются преимущественно в результате отсечения меандров названных выше течений, но частично и за счет простого рециркуляционного эффекта на внутренних сторонах волнообразных изгибов струй. Результаты экспериментальных исследований структуры и динамики упомянутой области океана описываются в работах [45—56] и др. Возможно, есть определенная динамическая аналогия между рассматриваемой частью Тихого

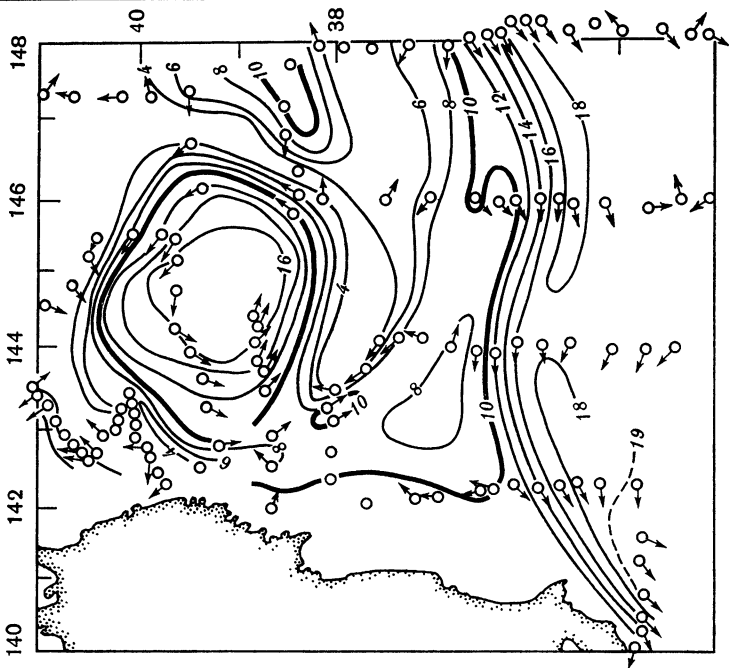
океана и область встречи Северо-Атлантического и Лабрадорского течений к востоку от Ньюфаундленда.

Рассмотрим коротко свойства фронтальных (преимущественно циклонических) вихрей Гольфстрима. Радиальное сечение типичного циклона («ринга») Гольфстрима усматривается в западной (на  $60^\circ$  з. д.) части разреза на рис. 11. Хорошо виден одиночный характер образования. Молодые ринги Гольфстрима характеризуются следующими параметрами [42, 57—61]. «Диаметр» ринга, определяемый как средний поперечник области холодной аномалии, равен примерно 200 км. Горизонтальный перепад температуры в слое главного термоклина может достигать  $10\text{—}12^\circ\text{C}$ , что соответствует перепаду высот изотермических поверхностей в 600—700 м! Скорость вращательного движения воды в верхней части ринга нередко достигает  $2\text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$  и даже более. Ринги проникают в глубину океана по крайней мере до глубины 3000 м, а возможно и до дна [57]. Молодые ринги «расписываются» на поверхности океана пятном пониженной температуры, что позволяет обнаруживать их со спутников [62]. По мере старения ринга, происходящего в основном в процессе послойного турбулентного смешивания его вод с окружающими водами Саргассова моря [63], происходит медленное уменьшение диаметра ринга, горизонтального перепада температуры и скорости вращения воды в его поле [42, 64]. Через несколько месяцев после образования ринга исчезает (как правило, в результате прямого атмосферного воздействия) и температурный сигнал на поверхности океана.

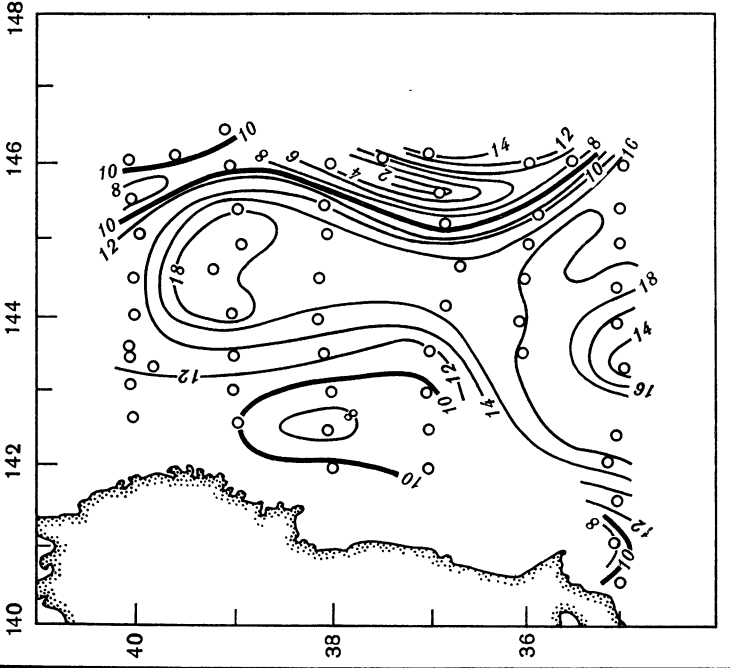
После образования ринги Гольфстрима дрейфуют, как правило, на запад и юго-запад в Саргассовом море со средней скоростью около  $3\text{ км}\cdot\text{сут}^{-1}$  [59, 65]. Можно полагать, что этот дрейф обусловлен как собственной динамикой рингов [66], так и воздействием крупномасштабного течения, направленного, по-видимому, во всей толще океана на запад — юго-запад в области Саргассова моря непосредственно к востоку и югу от Гольфстрима [67—69]. Кардинальный вопрос заключается в том, носит ли «дрейф» рингов преимущественно адвективный или волновой характер. Наблюдения над гидрофизическими и гидрохимическими свойствами рингов [63] и измерения поплавками нейтральной плавучести [61] уверенно показали, что верхняя часть рингов примерно до глубины 700—1000 м занята преимущественно водой, перемещающейся вместе с рингом; это в основном «склоновая» вода, происходящая из района Атлантики к северу от Гольфстрима. Напротив, в глубинах, по-видимому, преобладает «волновая» форма движения, при которой траектории частиц пересекают область ринга [61].

Ринги Гольфстрима заканчивают свое существование или поглощаясь Флоридским течением, или окончательно угасая в Саргассовом море [59, 65]. Среднее время жизни ринга оценивается в два-три года [65]. Комбинируя эту оценку с оценкой числа рингов, образующихся в течение года (5 или немного больше [42]),

$\sigma$



$a$



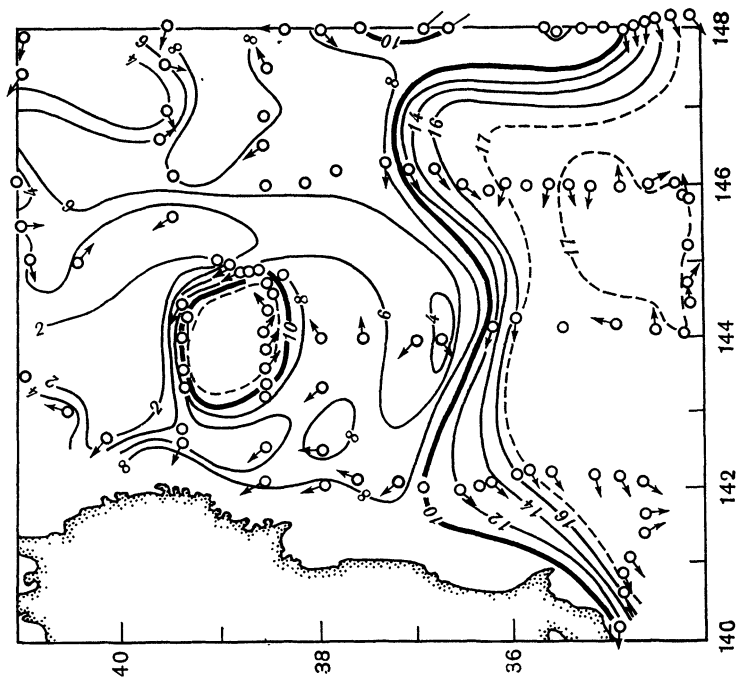
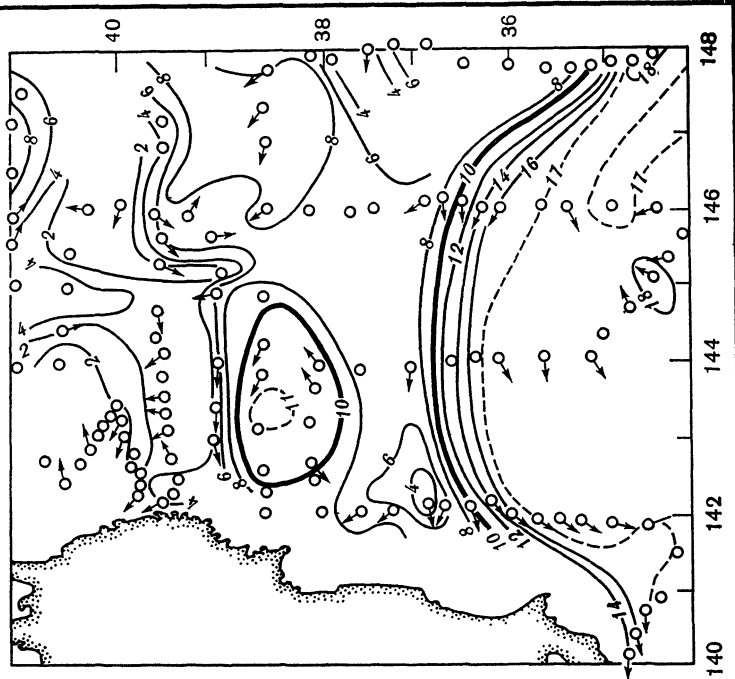
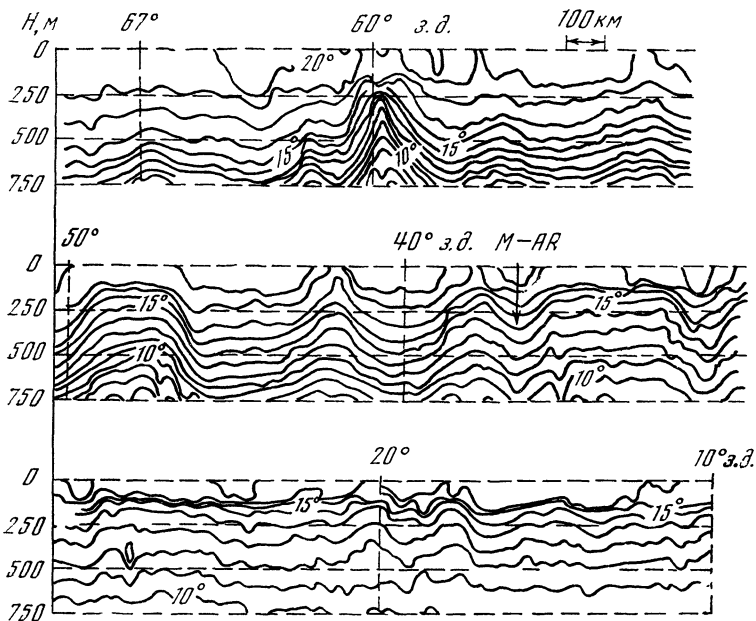


Рис. 10. Распределение температуры ( $^{\circ}\text{C}$ ) на глубине 200 м и направления течений на поверхности океана в районе к востоку от о-ва Хонсю [45] 1—21 июля 1960 г. (а), 12—21 августа 1960 г. (б), 15 февраля — 14 марта 1961 г. (в) и 3—27 августа 1961 г. (г)

Кружки — положения багетрических станций; направление течений измерялось электромагнитным датчиком



**Рис. 11.** Распределение температуры ( $^{\circ}\text{C}$ ) на разрезе по  $34^{\circ}30'$  с. ш. в Атлантике 22 января — 2 февраля 1975 г. [2]

Расстояние между батитермографными станциями 20 км. М—АР — положение оси Северо-Атлантического хребта

получаем, что в Саргассовом море одновременно должны наблюдаться около 15 рингов. Последний вывод неплохо согласуется с экспериментальным результатом, представленным на рис. 12; всего одновременно было обнаружено 11 рингов; не исключено, однако, что один-два ринга в восточной или южной частях района были пропущены. Замечательно, что в области своего наибольшего распространения (рис. 12) ринги занимают около трети площади соответствующей части океана! Очевидно, что вкупе с теплыми антициклонами Гольфстрима они должны играть весьма существенную роль в теплообмене между субтропической и субполярной зонами океана.

Теплые антициклоны Гольфстрима в отличие от его холодных циклонов характеризуются заметно меньшими горизонтальными и вертикальными масштабами и меньшей амплитудой (энергией) [41]. После своего образования они дрейфуют со скоростью порядка  $5 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$  на запад и юго-запад в области к северу от Гольфстрима и заканчивают свое существование слиянием с Гольфстримом в районе м. Гаттерас [65]. Среднее время их жизни примерно полгода, так что одновременно в области склоновой воды наблюдается около трех антициклонов Гольфстрима.

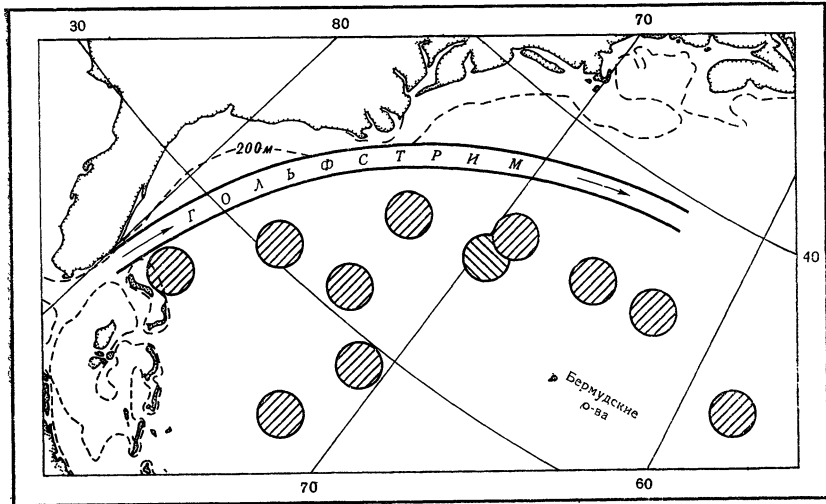


Рис. 12. Распределение холодных циклонов (рингов) Гольфстрима в Саргасовом море в ноябре 1971 г. [65]

Положения рингов определены батитермографными измерениями

Общие свойства фронтальных океанских вихрей и рассмотренных выше вихрей открытого океана, позволяющие объединить их в единый тип океанских синоптических вихрей, очевидны — они те же, что и перечисленные во вступительном разделе общие свойства атмосферных и океанских вихрей вообще. Из сказанного выше, однако, ясны и следующие специфические особенности фронтальных вихрей, резко отличающие их, скажем, от вихрей «Полигона-70» или МОДЕ-1.

1) Фронтальные вихри образуются в областях фронтальных струйных океанских течений в результате отсечения меандров этих течений. Вследствие этого фронтальные вихри сразу после своего образования содержат внутри себя воду иного по сравнению с окружающей водой происхождения.

2) Фронтальные вихри — квазиодиночные образования (этот вывод не касается, строго говоря, антициклонов Курошио). Слева от фронтального течения образуются только антициклоны, справа — только циклоны.

3) Адвективная форма движения играет существенную роль в перемещении фронтальных вихрей; во всяком случае, она преобладает в верхних частях фронтальных вихрей.

4) Фронтальные вихри — необычайно концентрированные образования. Их удельная кинетическая энергия на два порядка превышает удельную кинетическую энергию типичных вихрей открытого океана.



Однако было бы наивно полагать, что приведенное выше разделение океанских вихрей на два типа исчерпывает проблему и в океане не существует образований, промежуточных по своим свойствам между, скажем, рингами Гольфстрима и вихрями типа вихрей «Полигон-70». Уже из сказанного выше следует, что вихри фронтальной области Куроисио-Ойясио являются в определенном смысле именно такими промежуточными образованиями. Другой пример подобного типа образований представляет центральная часть разреза на рис. 11. Если в западной части разреза виден типичный ринг Гольфстрима, а в восточной части (например, в районе  $20^\circ$  з.д.) — сплошное симметричное поле волновых возмущений, подобных наблюдавшимся во время экспедиций «Полигон-70» и МОДЕ-1, то всю среднюю часть разреза занимают возмущения промежуточного типа — это уже не одиночные образования типа рингов, но еще и не симметричное поле подъемов и опусканий изотермических поверхностей; области подъема, соответствующие циклоническому знаку завихренности поля скорости, здесь более локализованы и ярче выражены, чем области опускания изотерм. Обратим внимание на то, что увеличение степени «одиночности» возмущений с востока на запад на рис. 11 следует за увеличением их энергии; как будет видно из раздела 5, это находит объяснение в теории океанских синоптических волн.

Размытые по сравнению с рингами Гольфстрима циклонические вихри в области Атлантики к югу от Северо-Атлантического течения и к востоку от  $55^\circ$  з. д. (с которыми связаны, в частности, области подъема изотерм в средней части разреза на рис. 11) получили среди американских океанографов название *big babies* [70]. Наиболее подробное экспериментальное исследование одного такого вихря было выполнено советским судном «Академик Вернадский» осенью 1976 г.

Не исключено, что эти вихри образуются в результате отсечения меандров отдельных струй, на которые разбивается Гольфстрим после прохождения траверса Ньюфаундлендской банки.

#### 4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

Прежде чем упомянуть о некоторых результатах, касающихся распределения в океане средней энергии синоптических вихрей и ее соотношения с энергией крупномасштабных течений, отметим два важных факта. Во-первых, если исключить области устойчивых струйных западных и экваториальных течений, то средняя плотность доступной потенциальной энергии крупномасштабных океанских течений (т. е. запас  $P_m$  потенциальной энергии, связанный с отклонением изопикнических поверхностей от горизонтального положения, см. раздел 5) превышает среднюю плотность кинетической энергии  $K_m$  этих течений примерно в 1000 раз [71—73]. Во-вторых, средние плотности доступной потенциальной  $P_e$  и кинетической  $K_e$  энергии синоптических океанских вих-

рей являются величинами одного порядка (например, [74]) Константированную разницу между свойствами крупномасштабных течений и вихрей нетрудно понять, учтя, что  $P$  пропорциональна *среднему квадрату возмущений глубины изопикнических поверхностей*, а  $K$  в силу геострофического соотношения — *среднему квадрату наклонов изопикнических поверхностей* [72, 74]; таким образом, отношение  $P/K$  определяется горизонтальным масштабом поля течений.

Карты на рис. 13 построены по навигационным данным; любое отклонение поверхностного течения от климатической нормы трактовалось как синоптическое возмущение. Две особенности рис. 13 можно считать основными: а) общее подобие распределений  $K_m$  и  $\bar{K}_e$  (черточка обозначает осреднение по времени); б) существенное (в среднем примерно на порядок) превышение  $\bar{K}_e$  над  $K_m$  за исключением области Гольфстрима до  $60^\circ$  з. д. Весьма интересна высокая степень развития синоптических возмущений в приэкваториальной области океана.

Распределение  $\bar{P}_e$  в главном термоклине в Северной Атлантике изучалось Дантцлером [75] по многочисленным данным батитермографных измерений. Были получены очень сильный максимум в области Гольфстрима, слабые максимумы в районе к юго-востоку от Азорских островов и в зоне Северного пассатного течения («Полигон-70») и отчетливо выраженный минимум вдоль примерно  $25^\circ$  с. ш., т. е. в зоне практического отсутствия крупномасштабных течений.

Анализируя температурные разрезы из атласа Фьюглистера [76], Гилл, Грин и Симмонс [72] получили  $(P_m/\bar{P}_e) \approx 10$  для слоя главного термоклина в центральной части основного антициклонального круговорота Северной Атлантики. С этой оценкой хорошо согласуются результаты «Полигона-70» и МОДЕ-1, давшие  $(\bar{K}_e/K_m) \approx 100$  для глубин, соответствующих термоклину.

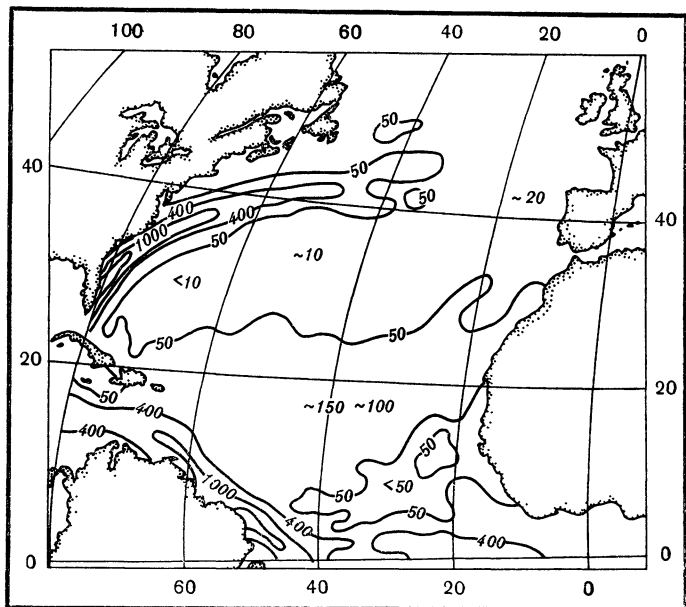
Анализ результатов долговременных измерений течений на глубинах от 2000 до 5000 м в области Гольфстрима от  $70$  до  $55^\circ$  з. д. и к югу от него опять-таки показал быстрое уменьшение величины  $\bar{K}_e$  в направлении от Гольфстрима на юг [69]. Отношение  $(\bar{K}_e/K_m)$  на этих глубинах на  $34^\circ$  с. ш. оказалось порядка 10.

Все эти результаты сходятся в двух пунктах:

- 1) вихри сильнее там, где сильнее крупномасштабные течения;
- 2) кинетическая (и примерно равная ей доступная потенциальная) энергия вихрей, как правило, существенно выше кинетической энергии крупномасштабных течений и в то же время существенно ниже их доступной потенциальной энергии.

Эти выводы — весьма убедительное экспериментальное свидетельство в пользу теории генерации вихрей за счет бароклинной неустойчивости крупномасштабных океанских течений; подробнее об этом будет сказано в следующем разделе.

а



б

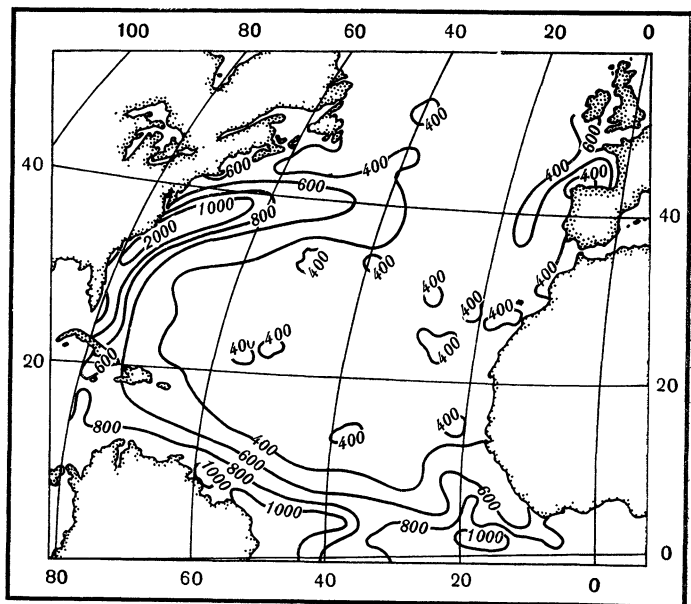


Рис. 13. Распределение плотности кинетической энергии (в  $\text{см}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ ) средних течений (а) и средней плотности кинетической энергии синоптических вихрей (б) в приповерхностном слое Северной Атлантики [122]

Некоторые общие соотношения<sup>1</sup>

С учетом экспериментально установленных (см. предыдущие разделы) пространственных и временных масштабов синоптических вихрей уравнения локальной динамики вихрей в некоторой области океана (исключение составляет узкая экваториальная зона океана) могут быть записаны следующим образом. Горизонтальные скорости  $u, v$  выражаются через возмущения давления  $p'$  геострофическими формулами  $u = -\rho_0^{-1} f_0^{-1} (\partial p' / \partial y)$ ,  $v = \rho_0^{-1} f_0^{-1} (\partial p' / \partial x)$ , а возмущения плотности  $\rho'$  — уравнением гидростатики  $\rho' = -g (\partial p' / \partial z)$ . Уравнения для вертикальной компоненты абсолютного вихря и для энтропии приводятся к виду

$$\frac{1}{\rho_0 f_0} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \Delta p' + \beta_0 v - f_0 \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial (\rho', p')}{\partial (x, y)}; \quad (1)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \rho' - \frac{\rho_0}{g} N^2(z) w = 0. \quad (2)$$

Эти уравнения записаны в локальной декартовой системе координат, ось  $x$  направлена на восток, ось  $y$  — на север, ось  $z$  — вертикально вверх, начало координат — на невозмущенной поверхности океана в центре рассматриваемой области,  $\Delta \equiv \{(\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2)\}$ ,  $t$  — время,  $w$  — вертикальная скорость,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $f_0 \equiv 2\Omega \sin \varphi_0$  и  $\beta_0 \equiv 2\Omega a^{-1} \cos \varphi_0$  — параметр Кориолиса и его широтное изменение в центре области, причем  $\Omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $a$  — ее радиус,  $\varphi_0$  — географическая широта,  $\rho_0$  — средняя плотность воды в океане,  $N^2(z) = [-g\rho_0^{-1} (d\rho_s/dz) - g^2 c^{-2}(z)]$  — квадрат частоты Вейселя, причем  $\rho_s(z)$  и  $c(z)$  — вертикальные распределения плотности и скорости звука в невозмущенном состоянии.

Первый и второй члены в левой части (1) описывают локальное изменение адвекции относительного вихря и адвекции «планетарного вихря», т. е. изменение завихренности меридионально движущейся частицы за счет изменения силы Кориолиса; третий член описывает эффект растяжения вихревых нитей вследствие дивергенции горизонтального течения в поле силы Кориолиса; правая часть уравнения описывает изменения завихренности частицы за счет эффекта бароклинности (соленоидов Бьеркнеса).

Используя геострофичность, гидростатичность и (2), можно преобразовать уравнение (1) к виду, содержащему одну зависимую

<sup>1</sup> Содержание настоящего и следующих двух подразделов в основном следует разделу «Волны Россби», написанному Каменковичем и Резником для книги «Гидродинамика океана» [74]. В дальнейшем авторы не будут специально ссылаться на работу Каменковича и Резника, но просят читателя иметь в виду указанное обстоятельство.

переменную  $p'$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \mathcal{L}p' + \frac{\beta_0}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = \\ = \frac{1}{g\rho_0^2} \frac{\partial(p', \partial p'/\partial z)}{\partial(x, y)}; \quad (3)$$

$$\mathcal{L}p' \equiv \frac{1}{\rho_0 f_0} \Delta p' + f_0 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\rho_0 N^2(z)} \frac{\partial p'}{\partial z} \right].$$

Уравнение (3) называется уравнением вихря в квазигеострофическом приближении. Его аналог впервые был использован Обуховым [77] и Чарни [78] при составлении принципиальной схемы краткосрочного прогноза погоды; затем оно изучалось многими авторами [79—85].

При обычных краевых условиях на границах рассматриваемой области океана нетрудно получить следующее интегральное уравнение энергии:

$$\int_V \rho_0 \frac{u^2 + v^2}{2} dV + \int_V \frac{g^2}{\rho_0 N^2} \frac{\rho'^2}{2} dV + \int_{\Sigma} g\rho_0 \frac{\zeta^2}{2} d\Sigma = \text{const}. \quad (4)$$

Здесь  $\Sigma$  и  $V$  — площадь горизонтального сечения области и ее объем,  $\zeta(x, y, t)$  — возмущение уровня океана. Первый член в левой части (4) представляет собой интегральную кинетическую энергию синоптических вихрей, сумма двух остальных — интегральную доступную потенциальную энергию вихрей (величина  $(g^2/N^2)(\rho'^2/2)$  является объемной плотностью доступной потенциальной энергии).

Оценка слагаемых уравнения для вихря (3) была произведена Маквильямсом [23] по данным поплавковых измерений течений и съемок поля плотности во время экспедиции МОДЕ-1. Оказалось, что на коротких промежутках времени (порядка 10 сут) локальные изменения относительной завихренности обуславливались преимущественно ее адвекцией. Если же перейти к уравнению вихря, осредненному по периоду времени порядка 60 сут, то баланс завихренности существенно меняется — ведущими в уравнении (3) становятся его линейные члены, имеющие одинаковый порядок; именно этот баланс определяет средний дрейф вихрей на запад. По существу, аналогичный результат получен и при анализе измерений течений на «Полигоне-70» [20].

Анализ уравнения баланса тепла, аналогичного уравнению (2), но с заменой плотности  $\rho'$  на количество тепла  $c\rho_0 T^{-1}$ , где  $T$  — температура и  $c$  — теплоемкость, был выполнен Брайденом по данным измерений температуры и течений в слое от 700 до 2000 м на буйковых станциях МОДЕ-1. Анализ дал одинаковый порядок всех членов уравнения, показав существенность адвективных эффектов в поле вихрей. Результаты плотностных съемок, выполненных во время МОДЕ-1, показали важную роль горизонтальной

адвекции в балансе тепла и в *приповерхностном слое океана* [36]. Аналогичный вывод может быть сделан и на основе данных плотностных съеомок, проведенных во время экспедиции «Полигон-67» [86].

### Бароклинная неустойчивость крупномасштабных течений

Выше отмечалось, что ведущей в настоящее время является гипотеза образования синоптических вихрей за счет бароклинной неустойчивости крупномасштабных океанских течений. Рассмотрим для простоты случай зонального крупномасштабного геострофического течения  $U(y, z)$  в бесконечном канале, ограниченном вертикальными зональными стенками, горизонтальным дном и «твердой крышкой» на поверхности жидкости.

Относя уравнения (1) и (2) к сумме зонального течения и синоптических вихрей, считая связанные с вихрями возмущения, во-первых, периодическими по  $x$  с периодом  $X$  и, во-вторых, малыми по амплитуде и пренебрегая, в соответствии с последним предположением, нелинейными членами в уравнениях (1) и (2), получаем следующее уравнение, описывающее обмен энергией между крупномасштабным течением и вихрями:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{g^2}{N^2 \rho_0^2} \frac{\rho'^2}{2} \right) dV = \int_V (-uv) \frac{\partial U}{\partial y} dV + \int_V - \frac{g^2}{N^2 \rho_0^2} v \rho' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} dV. \quad (5)$$

Здесь  $\bar{\rho}(y, z)$  — возмущение плотности в поле крупномасштабного течения; в силу его геострофичности  $g\rho_0^{-1}f^{-1}(\partial\bar{\rho}/\partial y) = (\partial U/\partial z)$ . Интегрирование в (5) производится по объему параллелепипеда, имеющего сторонами ширину канала, его глубину и расстояние  $X$ . Первый член в правой части (5) описывает изменение энергии вихрей за счет *баротропной* неустойчивости среднего течения, второй — за счет его *бароклинной* неустойчивости; в последнем случае источником энергии вихрей является доступная потенциальная энергия среднего течения. Оценки показывают, что, за исключением районов струйных течений типа начального участка Гольфстрима, для океана характерно решительное (в среднем на порядок) преобладание второго члена правой части (5) над первым.

В работе Иди [87] о бароклинной неустойчивости зонального течения с линейным вертикальным сдвигом скорости было показано, что при превышении сдвигом некоторого критического значения течение действительно становится неустойчивым, причем максимальная скорость нарастания возмущений осуществляется на масштабе, близком к внутреннему масштабу Россби (см. раздел 1). Этот фундаментальный результат может служить объяс-

нением преобладающего горизонтального масштаба синоптических вихрей.

Бароклинная неустойчивость собственно *океанских* течений изучалась затем в большом числе теоретических работ [72, 81, 82, 88—93]. Наиболее важным результатом ряда этих работ (например, [72, 92]) был вывод о том, что при некоторых дополнительных условиях, вполне реализуемых в океане, вертикальный сдвиг скорости всего лишь в несколько сантиметров в секунду может оказаться достаточным для неустойчивости крупномасштабного течения и генерации вихрей.

Выведем важное свойство неустойчивых синоптических возмущений поля течений. Положим для простоты  $U = U(z)$  и тем самым избавимся от первого члена в правой части (5). Возмущение давления зададим в виде плоской волны

$$p' = \Phi(z) \cos [kx - kc_r t + \theta(z)] \exp(kc_i t)$$

( $k$  — волновое число,  $c_r$  — фазовая скорость,  $\Phi(z)$  — амплитуда,  $\theta(z)$  — начальная фаза,  $c_i$  — скорость изменения амплитуды). Подставляя соответствующие геострофические возмущения скорости  $v$  и гидростатические возмущения плотности  $\rho'$  в правую часть (5), получим следующее соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (K_e + P_e) dV = - \frac{k}{2f_0} e^{2kc_i t} \int_V \Phi^2(z) \frac{d\theta}{dz} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} / \frac{d\rho_s}{dz} \right) dV. \quad (6)$$

Из (6) видно, что необходимым условием существования бароклинно-неустойчивых возмущений является сдвиг фазы возмущения с глубиной, причем знак сдвига фазы определяет нарастание или затухание возмущения. Сопоставляя уравнение (6) с результатами «Полигона-70», описанными в разделе 2, без труда убеждаемся, что как по знакам, так и по порядкам величин наклон оси главного вихря «Полигона-70» и скорость изменения его энергии находились между собой как раз в таком соотношении, какое указывается теорией для случая *усиления* вихря за счет бароклинной неустойчивости зонального крупномасштабного течения.

### Волновая интерпретация

Отбрасывая в (3) нелинейные члены и считая дно океана горизонтальным, ищем решение линеаризованного уравнения для вихря при обычных краевых условиях в виде  $p' = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x, y, t) P_n(z)$ , где функций  $p_n(x, y, t)$  удовлетворяют уравнениям

$$\left( \Delta - \frac{f_0^2}{gh_n} \right) \frac{\partial p_n}{\partial t} + \beta_0 \frac{\partial p_n}{\partial x} = 0 \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (7)$$

а  $h_n$  и  $P_n(z)$  суть собственные значения и собственные функции задачи

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\rho_0 N^2} \frac{dP_n}{dz} \right) + \frac{1}{gh_n \rho_0} P_n = 0;$$

$$\frac{g}{N^2} \frac{dP_n}{dz} + P_n = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad \frac{dP_n}{dz} = 0 \quad \text{при } z = -H.$$

Можно показать, что  $P_0(z)$  практически не зависит от  $z$  (баротропная мода возмущений давления), а  $P_n(z)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) имеют  $n$  нулей внутри интервала  $(-H, 0)$  (бароклинные моды). Величины  $h_n$  обычно называют эквивалентными глубинами; при  $N = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$  и  $H = 4 \text{ км}$  имеем  $h_0 = 4 \text{ км}$ ,  $h_1$  имеет порядок 70 см,  $h_2$  — порядок 15 см и т. д. Задавая  $p_n(x, y, t)$  в виде плоских гармонических волн, легко получаем следующие дисперсионные соотношения, связывающие временные и пространственные масштабы баротропной и бароклинной волн:

$$\omega_n = - \frac{\beta_0 m_1}{m_1^2 + m_2^2 + f_0^2 / gh_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Здесь  $m_1$  и  $m_2$  — составляющие волнового вектора вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно,  $\omega$  — круговая частота. Решение уравнения (7) требует постановки начальных и граничных (по  $x$  и  $y$ ) условий для функций  $p_n$ . В случае безграничного по  $x$  и  $y$  океана задача легко решается при помощи преобразования Фурье. Если при  $t = 0$

$$p_n(x, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} = (m_1, m_2), \quad \mathbf{x} = (x, y),$$

то при  $t > 0$  будем иметь

$$p_n(x, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(\mathbf{k}) \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega_n(\mathbf{k})t)] d\mathbf{k},$$

где зависимость  $\omega_n$  от  $\mathbf{k}$  определяется соотношением (8).

Соотношения (8), описывающие локальную динамику так называемых волн Россби [94], имеют фундаментальное значение для изучения синоптических океанских вихрей. Ввиду того что  $\omega > 0$ , имеем  $m_1 < 0$ , и, таким образом, свободные волны Россби обязаны двигаться с компонентой на запад, что и подтверждается наблюдениями над синоптическими вихрями в областях океана со слабыми средними течениями. Рассматривая далее для простоты волну,двигающуюся в чисто зональном направлении ( $m_2 = 0$ ), положим в соответствии с наблюдениями  $m_1 = R^{-1}$  и примем во внимание соотношение  $R = (gh_1)^{1/2} f_0^{-1}$ , связывающее внутренний масштаб Россби с эквивалентной глубиной первой бароклинной моды. Тогда для фазовой скорости  $c = \omega/m_1$  волны первой



бароклиной моды получим соотношение  $c = -\beta_0 R^2/2$ . При  $\beta_0 = 2 \cdot 10^{-13} \text{ см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$  и  $R = 5 \cdot 10^6 \text{ см}$  имеем  $c = 2,5 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ , что опять-таки находится в хорошем согласии с результатами наблюдений над синоптическими океанскими вихрями, например, по данным МОДЕ-1. Уже одно это обстоятельство свидетельствует о преобладании первой бароклиной моды в синоптических возмущениях поля океанских течений. Последний вывод подтверждается также изучением вертикальной структуры наблюдаемых синоптических вихрей [21, 24].

Модель океана из двух слоев плотностей  $\rho_1$  и  $\rho_2$  позволяет в рамках линейной теории волн Россби приближенно учесть влияние крупномасштабного течения (что особенно важно для практических приложений) и наклона океанского дна на распространение устойчивых волн [92]. Для случая малости толщины  $h^{(1)}$  верхнего слоя по сравнению с толщиной  $h^{(2)}$  нижнего слоя, присутствия среднего течения (компоненты скорости  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{V}$ ) только в верхнем слое и направления распространения волны, не очень близкого к меридиональному, дисперсионные соотношения для баротропной  $\zeta$  и бароклиной  $\rho$  волн Россби могут быть записаны в виде

$$\omega_{\zeta} = \frac{1}{m_1^2 + m_2^2} \left[ -\beta_0 m_1 + \frac{f_0}{h^{(2)}} (m_2 H_x - m_1 H_y) \right];$$

$$\omega_{\rho} = \frac{1}{m_1^2 + m_2^2 + \rho_0 f_0^2 (\Delta \rho g h^{(1)})^{-1}} \left[ -\beta_0 m_1 + (m_1^2 + m_2^2) (m_1 \mathcal{U} + m_2 \mathcal{V}) \right]. \quad (9)$$

Здесь  $H_x$  и  $H_y$  — зональный и меридиональный наклоны дна,  $\Delta \rho \equiv \rho_2 - \rho_1$ . Складывая две бароклинные волны, распространяющиеся под углом друг к другу, Маквилльямс и Робинсон [92] успешно аппроксимировали перемещение на запад главного вихря «Полигона-70», что еще раз свидетельствует о пригодности в первом приближении линейных моделей волн Россби для описания среднего дрейфа синоптических вихрей в районах океана с умеренной энергией вихрей. Учитывая, что  $R = (\Delta \rho \rho_0^{-1} g h^{(1)})^{1/2} f_0^{-1}$  при  $m_1^2 = R^{-2}$  и  $m_2 = \mathcal{V} = 0$ , из (9) получаем

$$c_{\rho} = (-\beta_0 R^2 + \mathcal{U})/2.$$

Влияние рельефа дна на распространение волн Россби в баротропном океане изучалось в [95—100]. Волны Россби в замкнутом баротропном океане рассматривались в [97, 101—103], а в бароклином океане — в [104]. Вынужденные волны Россби, порождаемые колебаниями ветра над океаном, наиболее полно исследованы в [74]. Основной вывод заключается в том, что колебания ветра, имеющие пространственные и временные масштабы порядка 2000 км и суток соответственно, вызывают в океане преимущественно баротропные колебания течений тех же масштабов. Отсюда следует, что прямое воздействие ветра не может

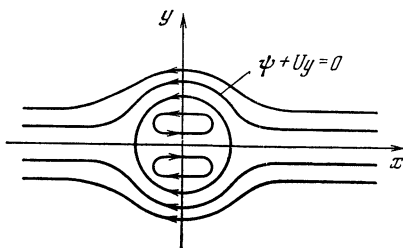


Рис. 14. Схематическое изображение линий тока в поле двумерной уединенной баротропной волны Россби в системе координат, движущейся вместе с волной [105]

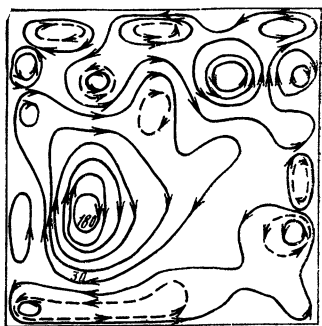


Рис. 15. Картина линий тока на глубине 100 м в переслоенном по плотности океане на 1717-е сутки после начала движения [115]

Течения генерируются из состояния покоя полем ветра, имитирующего пассаты в тропиках и западные ветры в умеренных широтах, и потоком тепла на поверхности океана, линейно меняющимся вдоль меридиана. «Реальная» сторона квадрата 900 км, шаг сетки при расчете 50 км. Значения функции тока в  $10^6 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$

рассматриваться как сколько-нибудь существенный фактор генерации синоптических океанских вихрей.

Теория *нелинейных* волн Россби весьма трудна для разработки и поэтому до последнего времени развивалась преимущественно для случая *баротропного* океана. В этом последнем случае, а также в предположении о горизонтальности океанского дна уравнение для вихря, (3) может быть переписано (с заменой  $p'$  на возмущение функции тока  $\psi = p'/\rho_0 f_0$ ) таким образом:

$$\left( \Delta - \frac{f_0^2}{gH} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial (\psi, \Delta \psi)}{\partial (x, y)} + \beta_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

Особый интерес представляют решения уравнения (10) в виде *двумерных уединенных волн (солитонов) Россби* [105, 106], в поле которых возмущения функции тока (рис. 14) экспоненциально затухают во все стороны от центра волны. Как можно видеть из рис. 14, центральная часть солитона занята водой, перемещающейся вместе с самой волной (вихрем). Физика солитона такова, что он может перемещаться (относительно постоянного зонального течения) или на восток, или на запад, но в последнем случае — со скоростью, обязательно превышающей максимально возможную скорость периодических баротропных волн Россби  $\beta_0 gH/f_0^2$  (см. формулу (8)). Следует отметить также бароклинную модель ринга Гольфстрима, построенную Флером [107] и давшую хорошее согласие с данными эксперимента.

Наибольшие успехи теоретического изучения океанских синоптических вихрей достигнуты к настоящему времени путем их численного моделирования на быстродействующих вычислительных машинах. Эти модели можно разделить на два основных класса:

- 1) локальные модели, описывающие динамику поля вихрей в некотором ограниченном районе океана [108—111];
- 2) вихреразрешающие модели общей океанской циркуляции [112—115].

Модели первого рода изучают нелинейные взаимодействия между вихрями и реакцию поля вихрей на изменение «внешних» параметров океана, например рельефа дна или стратификации. С помощью такого подхода удалось, например, получить поле вихрей, по своим свойствам очень напоминающее наблюдаемое экспедицией МОДЕ-1 [111]. Очень важна работа Райнса [108], показавшего, что при типичных значениях энергии поле океанских синоптических вихрей комбинирует в себе свойства двумерной квазигеострофической турбулентности и классических волн Россби. Особенно интересен и оригинален результат Райнса, согласно которому поле вихрей, первоначально заданное в виде хаотической мезомасштабной двумерной турбулентности, под организующим действием вращения и сферичности Земли и за счет внутренних взаимодействий между вихрями трансформируется в квазипорядоченное поле нелинейных волн Россби, характеризующееся некоторыми преобладающими пространственным и временным масштабами. Последние определяются средней энергией вихрей и параметрами стратификации океана и рельефа дна и даже при сравнительно высокой энергии вихрей находятся между собой в соотношении, приближенно указываемом линейной теорией.

Модели второго класса нацелены на решение проблем генерации океанских синоптических вихрей, их переноса, диссипации и взаимодействия с крупномасштабной океанской циркуляцией. Уже сам факт получения вихрей в таких моделях (рис. 15) является важным достижением теоретической океанологии. Наиболее развитые модели [114] дают следующие направления обмена энергией.

В областях океана, примыкающих к интенсивным течениям типа Гольфстрима, вихри образуются за счет *баротропно-бароклинной* неустойчивости крупномасштабных течений; в остальной части океана решительно преобладает эффект *бароклинной* неустойчивости. В свою очередь вихри расходуют энергию в основном на трение о дно океана и горизонтальную турбулентную вязкость. Обнаруживается также заметный переход энергии вихрей в кинетическую энергию средней циркуляции в глубинном слое океана; это эффект так называемой «отрицательной вязкости», аналогичный наблюдаемому в атмосфере [116]. Расчеты [114] показы-

вают, что за счет синоптических вихрей в океане осуществляется заметный меридиональный перенос тепла; соответствующий коэффициент горизонтальной турбулентной теплопроводности имеет порядок  $10^7 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ .

Авторы выражают благодарность В. М. Каменковичу и Г. М. Резнику, любезно предоставившим рукопись своего обзора «Волны Россби».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Brekhovskikh L. M., Fedorov K. N., Fomin L. M. e. a. — Deep-Sea Res. 1971, 18, p. 1189.
2. U. S. POLYMODE Organizing Committee, U. S. POLYMODE Program and Plan. Cambridge, MIT, 1976, p. 98.
3. Штокман В. Б., Ивановский И. И. — Метеорол. и гидрология, 1937, № 3—5, с. 154.
4. Озмидов Р. В. — Труды Ин-та океанологии АН СССР, 1962, 60, с. 114.
5. Озмидов Р. В., Ямпольский А. Д. — Изв. АН СССР. Физ. атмосфер. и океана, 1965, 1, с. 615.
6. Штокман В. Б., Кошляков М. Н., Озмидов Р. В. и др. — Докл. АН СССР, 1969, 186, с. 1070.
7. Кошляков М. Н., Грачев Ю. М., Чыонг Динь Хиен. — Океанология, 1972, 12, с. 728.
8. Ясуи М. — В кн.: Внутренние волны. М., «Мир», 1964, с. 236.
9. Swallow J. C., Hannon B. V. — Deep-Sea Res., 1960, 6, p. 155.
10. Crease J. — J. Geophys. Res., 1962, 67, p. 3173.
11. Swallow J. C. — Philos. Trans., 1971, 270, p. 451.
12. Еникеев В. Х., Кошляков М. Н. — Океанология, 1973, 13, с. 947.
13. Василенко В. М., Миравель А. П., Озмидов Р. В. — Океанология, 1976, 16, с. 55.
14. Гандин Л. С. — Труды Главн. геофиз. обсерватории, 1964, 165, с. 47.
15. Koshlyakov M. N., Yenikeyev V. Kh. POLYMODE News, Woods Hole Oceanogr. Inst., 1977, N 23.
16. Koshlyakov M. N., Grachev Yu. M. — Deep-Sea Res., 1973, 20, p. 507.
17. Кошляков М. Н. — Океанология, 1973, 13, с. 760.
18. McWilliams J. C., Robinson A. R. — Deep-Sea Res., 1974, 21, p. 359.
19. Фомин Л. М., Ямпольский А. Д. — Докл. АН СССР, 1977, 232, с. 50.
20. Бреховских Л. М., Грачев Ю. М., Кошляков М. Н., Фомин Л. М. — Метеорология и гидрология, 1978, № 2, с. 5.
21. Василенко В. М., Миравель А. П. — Изв. АН СССР. Физ. атмосфер. и океана, 1977, 13, с. 328.
22. Обухов А. М. — Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1960, № 3, с. 432.
23. McWilliams J. C. — J. Phys. Oceanogr., 1976, 6, p. 810; p. 828.
24. McWilliams J. C., Flierl G. — Deep-Sea Res., 1976, 23, p. 285.
25. Freeland H., Rhines P., Rossby H. T. — J. Marine Res., 1975, 33, p. 383.
26. Andrews J. C., Scully-Power P. — J. Phys. Oceanogr., 1976, 6, p. 756.
27. Bernstein R. L., White W. B. — J. Phys. Oceanogr., 1974, 4, p. 613.
28. Wyrtki K. — Dtsch. Hydrogr. Z., 1967, 20, p. 176.
29. Seckel G. — Deep-Sea Res., 1975, 22, p. 379.
30. Beckerle J. C., La Casce E. O. — Deep-Sea Res., 1973, 20, p. 673.
31. White W. — J. Phys. Oceanogr., 1973, 3, p. 156.
32. Duncan C. P. — J. Geophys. Res., 1968, 73, p. 531.
33. Patzert W. C., Bernstein R. L. — J. Phys. Oceanogr., 1976, 6, p. 392.
34. Gill A. E. — Deep-Sea Res., 1975, 22, p. 647.
35. Корт В. Г., Бышев В. И., Тарасенко В. М. — В кн.: Атлантический гидрофизический полигон-70. М., «Наука», 1974, с. 181.

36. Voorhis A. D., Schroeder E. H., Leetmaa A.— J. Phys. Oceanogr., 1976, 6, p. 953.
37. McEwen G. F.— J. Marine Res., 1948, 7, p. 1888.
38. Reid J. L., Schwartzlose R. A., Brown D. M.— J. Marine Res., 1963, 21, p. 205.
39. Beckerle J. C.— J. Geophys. Res., 1972, 77, p. 1637.
40. Hunkins K. L.— Deep-Sea Res., 1974, 21, p. 1017.
41. Saunders P. M.— Deep-Sea Res., 1971, 18, p. 1207.
42. Fuglister F. C.— In: Studies in Physical Oceanography, v. 1. Gordon and Breach, 1972, p. 137.
43. Palmén E., Newton C. W. Atmospheric circulations systems. Their structure and physical interpretation. New York — London, Acad. Press, 1969.
44. Masuzawa J.— Rec. Oceanogr. Works Japan, 1957, 3, p. 1.
45. Kawai H.— In: Kuroshio. Physical aspects of the Japan Current. H. Stommel and K. Yoshida (Eds). Seattle, Univ. Washington Press, 1972, p. 235.
46. Masuzawa J.— Oceanogr. Mag., 1955, 7, p. 29.
47. Бубнов В. А.— Труды Гидрофиз. ин-та, 1960, 22, с. 15.
48. Ичиye Т.— Oceanogr. Mag., 1956, 7, p. 115.
49. Кошляков М. Н.— Труды Ин-та океанологии АН СССР, 1961, 38, с. 31.
50. Булгаков Н. П.— Океанология, 1967, 7, № 5, с. 879.
51. Barkley R. A.— J. Marine Res., 1968, 26, N 2, p. 83.
52. Бышев В. И., Грачев Ю. М., Иванов Ю. А.— Океанология, 1976, 16, с. 216.
53. Павлычев В. П.— Изв. Тихоокеанского НИИ рыбного хозяйства и океаногрaфии, 1975, 96, с. 3.
54. Kitano K.— J. Phys. Oceanogr., 1975, 5, p. 245.
55. Bernstein R. L., White W. B.— J. Phys. Oceanogr. 1977, 7, p. 123.
56. Wilson W. S., Dugan J. P.— J. Phys. Oceanogr., 1978.
57. Fuglister F. C.— In: Progress in Oceanography, v. 1. Oxford e. a., Pergamon Press, 1963, p. 265.
58. Barrett J. R.— Deep-Sea Res., 1971, 18, p. 1221.
59. Parker C. E.— Deep-Sea Res., 1971, 18, p. 981.
60. Richardson P. L., Strong A. E., Knauss J. A.— J. Phys. Oceanogr., 1973, 3, p. 297.
61. Cheney R. E., Gemmill W. H., Shank M. K. e. a.— J. Phys. Oceanogr., 1976, 6, p. 741.
62. Vukovich F. M.— J. Phys. Oceanogr., 1976, 6, p. 605.
63. Lambert R. B.— Deep-Sea Res., 1974, 21, p. 529.
64. Cheney R. E., Richardson P. L.— Deep-Sea Res., 1976, 23, p. 143.
65. Lai D. Y., Richardson P. L.— J. Phys. Oceanogr., 1977, 7, p. 670.
66. Warren B. A.— Deep-Sea Res., 1967, 14, p. 505.
67. Кеонджян В. П.— Изв. АН СССР. Физ. атмосфер. и океана, 1972, 8, с. 1297.
68. Worthington L. V.— In: Johns Hopkins Oceanographic Studies, Baltimore, M. D., Johns Hopkins Press, 1977.
69. Schmitz W. J.— J. Marine Res., 1977, 35, p. 21.
70. McCartney M. S., Worthington L. V., Schmitz W. J.— J. Geophys. Res., 1978.
71. Stommel H. The Gulf Stream. A physical and dynamical description. 2 ed Univ. Calif. Press., Cambridge Univ. Press, 1966, p. 248.
72. Gill A. E., Green J. S. A., Simmons A. J.— Deep-Sea Res., 1974, 21, 499.
73. Вулис И. А., Монин А. С.— Докл. АН СССР, 1975, 221, с. 597.
74. Камелькович В. М., Резник Г. М.— В кн.: Физика океана, т. 2. Гидродинамика океана. М., «Наука», 1978, с. 300.
75. Dantzler H.— J. Phys. Oceanogr., 1977, 7, p. 512.
76. Fuglister F. C.— In: Progress in Oceanography, v. 1. Oxford e. a., Pergamon Press, 1963, p. 265.
77. Обухов А. М.— Докл. АН СССР, 1949, 13, с. 281.
78. Charney J. G.— J. Atmos. Sci., 1949, 6, p. 371.
79. Charney J. G., Stern M. N.— J. Atmos. Sci., 1962, 19, p. 159.

80. *Phillips N. A.*— Revs Geophys., 1963, 1, p. 123.
81. *Pedlosky J.*— J. Atmos. Sci., 1964, 21, p. 201, 342.
83. *Монин А. С.* Прогноз погоды как задача физики. М., «Наука», 1969, с. 183.
84. *Каменкович В. М.* Основы динамики океана. Л., Гидрометеиздат, 1973, с. 238.
85. *Монин А. С., Каменкович В. М., Корт В. Г.* Изменчивость Мирового океана. Л., Гидрометеиздат, 1974.
86. *Кошляков М. Н., Галеркин Л. И., Чыонг Динь Хиен.*— Океанология, 1970, 10, с. 805.
87. *Eady E. T.*— Tellus, 1949, 1, p. 33.
- 88, 89. *Pedlosky J.*— J. Phys. Oceanogr., 1975, 5, p. 603; 608.
90. *Тареев Б. А.*— Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1965, 1, с. 426.
91. *Schulman E. E.*— Tellus, 1967, 19, p. 292.
92. *Robinson A., McWilliams J.*— J. Phys. Oceanogr., 1973, 4, p. 281.
93. *Orlanskii I., Cox M. D.*— Geophys. Fluid Dynamics, 1973, 4, p. 297.
94. *Rossby C. G. e. a.*— J. Marine Res., 1939, 2, p. 38.
- 95, 96. *Rhines P. B.*— J. Fluid Mech., 1969, 31, p. 161, 191.
97. *Rhines P. B., Bretherton F.*— J. Fluid Mech., 1973, 61, p. 583.
- 98, 99. *Одудло А. В.*— Океанология, 1975, 15, с. 18, 781.
100. *Волосов В. М.*— Океанология, 1976, 16, с. 389.
101. 102. *Longuet-Higgins M. S.*— Proc. Roy. Soc. London, 1964, A 279, N 1379, p. 446; 1965, A 284, N 1396, p. 40.
103. *Pedlosky J.*— J. Phys. Oceanogr., 1975, 5, p. 603.
104. *Rattray M., Charnell R. L.*— J. Marine Res., 1966, 24, p. 82.
105. *Ларичев В. Д., Резник Г. М.*— Докл. АН СССР, 1976, 231, с. 1077.
106. *Ларичев В. Д., Резник Г. М.*— Океанология, 1976, 16, с. 961.
107. *Flierl G.*— J. Phys. Oceanogr., 1977, 7, p. 356.
108. *Rhines P. B.*— J. Fluid Mech., 1975, 69, p. 417.
109. *Rhines P. B.*— In: The Sea, v. 6: Marine Modelling. E. D. Goldberg, I. N. McCane, J. J. O'Brien, J. H. Steele (Eds). N. Y. John Wiley and Sons, 1977, p. 189.
110. *Bretherton F. P., Haidvogel D. B.*— J. Fluid Mech., 1976, 78, p. 129.
111. *Owens W. B., Bretherton F. P.*— Deep-Sea Res. (in press).
112. *Holland W. R., Lin L. B.*— J. Phys. Oceanogr., 1975, 5, p. 642.
113. *Robinson A. R., Harrison D. E., Mintz Y., Semtner A. J.*— J. Phys. Oceanogr., 1977, 7, p. 182.
114. *Semtner A. J., Mintz Y.*— J. Phys. Oceanogr., 1977, 7, p. 208.
115. *Саркисян А. С., Сеидов Д. Г., Семенов Е. В.*— Океанология, 1978, 18, с. 5.
116. *Oort A. H., Peixoto J. P.*— J. Geophys. Res., 1974, 79, p. 2705.
117. *Wunsch G.*— Deep-Sea Res., 1972, 19, p. 577.
118. *Grachev Yu. M., Koshlyakov M. N.* POLYMODE News, Woods Hole Oceanogr. Inst., 1977, N 23.
119. *Rossby H. T., Voorhis A., Webb D.*— J. Marine Res., 1975, 33, p. 355.
120. *Бурков В. А., Овчинников И. М.*— Труды Ин-та океанологии АН СССР, 1960, 40, с. 121.
121. *Hamon B. V.*— Deep-Sea Res., 1965, 12, p. 899.
122. *Wyrtki K., Mgaard L., Hager J.*— J. Geophys. Res., 1967, 81, p. 2641.

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В ОКЕАНЕ

Л. А. ОСТРОВСКИЙ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Внутренними волнами называют такие волновые движения, которые принципиально связаны с неоднородностью распределения плотности жидкости или газа по вертикали (плотностной стратификацией). Различают внутренние гравитационные волны, обусловленные силами плавучести, возникающими при вертикальном смещении частиц жидкости, и внутренние (бароклинные) волны Россби, существование которых обусловлено наряду со стратификацией также горизонтальным изменением (с юга на север) параметра Кориолиса, т. е. вертикальной проекции угловой скорости Земли в данной точке (во многом аналогичные «топографические» волны Россби существуют из-за изменений глубины вращающегося океана). Роль таких волн в процессах циркуляции и энергообмена в океане, по-видимому, чрезвычайно велика; весьма вероятно, что без их учета нельзя получить удовлетворительное представление о структуре океанической турбулентности, природе вертикальной микроструктуры океана, синоптических вихрей и т. п.

По внутренним (в особенности гравитационным) волнам в океане имеется сейчас обширная литература [1—7]. За последние десять лет в теории, особенно в нелинейной теории внутренних волн, сделано очень много (эти результаты частично отражены в книге Тернера [4]). Следует признать, однако, что теоретические успехи пока довольно мало продвинули наше понимание того, что происходит с внутренними волнами в реальном океане, и фундаментальные вопросы типа «откуда берется энергия внутренних волн, куда она уходит и что происходит по дороге?» [8] до сих пор остаются в значительной степени открытыми. Причина этого заключена, конечно, в сложности изучаемого явления и вытекающих из нее экспериментальных и теоретических трудностях. До настоящего времени большинство данных о внутренних волнах в океане было представлено в виде усредненных частотных и пространственных спектров энергии. Эти данные были объединены Гарреттом и Манком [9] в эмпирическую модель, которая постоянно модифицируется с учетом новых данных и, по-видимому, сейчас признается достоверной большинством исследователей. К сожалению, подобные усредненные данные при всей их важности создают не слишком много почвы для физической теории. Поэтому особое значение, на наш взгляд, приобретают данные о пространственно-временном ходе внутренних колебаний, особенно для относительно регулярных процессов (цугов, одиночных волн и т. д.).

Судя по последним данным, такие процессы составляют значительную долю внутренних волновых движений в океане [10].

Что же касается волн Россби, то они вызывают сейчас особый интерес в связи с тем, что с ними, вероятно, связана природа синоптических вихрей в океане — одного из наиболее интересных последних открытий в океанологии (см. статью А. С. Момина и М. Н. Кошлякова в настоящем сборнике).

Может возникнуть вопрос: нельзя ли выделить «наиболее нелинейные» участки в спектре внутреннего волнения, пренебрегая нелинейностью вне этих участков; ясно, что это существенно облегчило бы задачу теоретиков. К сожалению, это, по-видимому, невозможно. За характерный масштаб времени, на котором проявляется нелинейность, можно принять  $T_{нл} = l_z/\omega\eta$ , где  $\omega$  — частота,  $\eta$  — высота волны,  $l_z$  — вертикальный масштаб изменения величин в волне. Согласно данным наблюдений [9], для волн с периодами, заметно меньшими инерционного (см. ниже), спектры энергии  $E(\omega)$  более или менее близки к  $\omega^{-2}$ ; следовательно, средняя высота волн в фиксированном интервале  $d\omega$   $\eta \sim \sqrt{E} d\omega$  пропорциональна  $\omega^{-1}$ , и тогда (для заданной моды)  $T_{нл}$  вообще не зависит от  $\omega$ ! Правда, для коротких волн (с периодами меньше, скажем, 1 цикл/ч) спектры  $E(\omega)$  спадают быстрее, однако поведение параметра  $T_{нл}$  изменяется мало.

Так, на рис. 1 приведены относительные значения  $T_{нл}$  (в фиксированном интервале  $d\omega$ ), вычисленные по данным работы [11]. В интервале частот от 1 до 15 цикл/ч (где энергия волн изменяется в сотни раз) нелинейное время меняется не более чем в два раза. Конечно, эти оценки весьма условны (они не учитывают различия ни в структуре мод, ни в интервалах когерентности, ни в характере возможных нелинейных процессов), но они убедительно показывают, что в принципе нелинейные взаимодействия могут охватывать весь спектр внутренних волн.

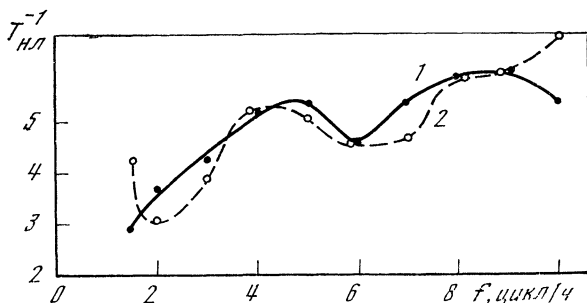


Рис. 1. Частотная зависимость «нелинейного времени»  $T_{нл}$  (в произвольных единицах), рассчитанная по спектрам смещений термоклины в районе Сейшельских (1) и Мальдивских (2) островов в Индийском океане, приведенным в [11]



Каковы же в этой ситуации возможности нелинейной теории? Во-первых, можно выделить те особенности, которые присущи внутренним волнам как объекту общей теории нелинейных волн, и оценить величину различных эффектов. Во-вторых, уже сейчас можно интерпретировать отдельные результаты наблюдений как проявления нелинейных эффектов и попытаться оценить роль таких эффектов в различных условиях. Мы затронем здесь некоторые из этих вопросов, не обсуждая подробно математического аппарата и общих свойств нелинейных волн, поскольку то и другое уже рассматривалось ранее [19, 42].

Имея в виду условия, типичные для океана, мы будем исходить из хорошо известных уравнений динамики идеальной несжимаемой жидкости, находящейся в поле тяжести:

$$\mathbf{U}_t + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} + \nabla p/\rho + 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}) = \mathbf{g}; \quad (1)$$

$$\rho_t + (\mathbf{U}\nabla)\rho = 0; \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{U}$  — скорость частиц жидкости,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения,  $\boldsymbol{\Omega}$  — угловая скорость вращения Земли. Эти уравнения содержатся во всех соответствующих учебниках и здесь приводятся без пояснений.

В уравнениях (1)—(3) для океана часто используются (вместе или порознь) так же хорошо известные упрощения: а) для волн, коротких в сравнении с радиусом Земли, океан можно считать плоским; б) используется так называемое «традиционное» приближение, в котором учитывается лишь вертикальная компонента силы Кориолиса, так что вектор  $2\boldsymbol{\Omega}$  заменяется на его вертикальную проекцию  $f$  ( $f = 2\Omega \sin \varphi$ , где  $\varphi$  — географическая широта); в) часто используется так называемое приближение Буссинеска, специфическое для условий океана, где плотность воды из-за стратификации меняется очень слабо (на доли процента), поэтому невозмущенную плотность  $\rho_0(z)$  можно считать постоянной везде, где она не дифференцируется. Однако для нелинейных волн выход за рамки приближения Буссинеска иногда оказывается принципиальным, как это будет видно из дальнейшего.

Что касается граничных условий, то для дна океана они сводятся к равенству нулю нормальной к нему (для горизонтального дна — вертикальной) компоненты  $\mathbf{U}$ , а для свободной поверхности — к условиям равенства давления атмосферному и равенства вертикальных компонент скорости движения водной поверхности и скорости лежащих на ней частиц воды. Однако для внутренних волн ввиду малости изменений плотности смещения поверхности малы по сравнению с вертикальными смещениями частиц в толще воды, и приближенно можно считать поверхность неподвижной ( $z = 0$ ), полагая на ней  $U_z = w = 0$ . Это так называемое приближение «твердой крышки», в сущности, эквивалент приближения Буссинеска в граничных условиях.

Дальнейшее изложение разделено на две части. Одна посвящена особенностям внутренних гравитационных волн в невращающемся океане (т. е. волн с частотами, существенно большими параметра Кориолиса), а другая — эффектам, связанным с вращением Земли. Такое разделение вызвано тем, что учет вращения сильно усложняет задачу и нелинейная теория для этого случая пока значительно меньше разработана.

## 2. НЕВРАЩАЮЩИЙСЯ ОКЕАН

### 2.1. Нелинейность и дисперсия во внутренних волнах

Если характерный период волны в океане существенно меньше кориолисова периода  $2\pi/f$ , то эффектами, связанными с вращением Земли, можно пренебречь. В этом случае имеется только один тип внутренних волновых движений — внутренние гравитационные волны. Началом исследований по нелинейной теории таких волн можно считать работы по теории стационарных двумерных течений стратифицированной жидкости (см., например, [4, 5]). В этих и большинстве последующих работ рассматривались двумерные движения, в которых все величины зависят от времени  $t$ , одной вертикальной  $z$  и одной горизонтальной  $x$  координаты. Используя функцию тока  $\psi$ , вводимую по формулам  $U_x = u = \psi_z$ ,  $U_y = w = -\psi_x$ , легко привести систему (1)–(3) к двум скалярным уравнениям для  $\psi$  и  $\rho$ , которые в приближении Буссинеска имеют вид

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + J(\Delta \psi, \psi) \right] = g \frac{\partial \rho'}{\partial x}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} + J(\rho', \psi) = 0, \quad (5)$$

где  $\rho' = \rho - \rho_0$ ,  $J(a, b) = a_x b_z - b_x a_z$  — якобиан. Существенно, что все нелинейные члены имеют вид якобианов.

Исходя из общих «теоретико-волновых» соображений, следовало бы начать с рассмотрения плоских стационарных волн, в которых все величины зависят от одной линейной комбинации координат и времени (фазы)  $\theta = k_1 x + k_2 z - \omega t$ , где  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\omega$  — постоянные. Однако здесь это, строго говоря, невозможно, поскольку жидкость неоднородна и (5) содержит переменный коэффициент  $d\rho_0/dz$  (множитель  $\rho_0$  в (4) в этом приближении можно считать постоянным). Только если  $d\rho_0/dz$  постоянно (т. е. в приближении Буссинеска постоянна частота Брента — Вэйсяля  $N = \left( -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \right)^{1/2}$ ), то можно искать решение в виде функций  $\theta$ . Но тогда, поскольку якобиан от любой пары функций одной и той же переменной тождественно равен нулю, уравнения (4), (5) оказываются линейными. Итак, в приближении Буссинеска плоские стационарные волны в безграничном океане остаются гармоническими при любой амплитуде.

литуде! Они удовлетворяют хорошо известному для линейных волн дисперсионному соотношению

$$\omega = Nk_x / \sqrt{k_x^2 + k_y^2}.$$

Как недавно было показано [12, 13], при выходе за рамки приближения Буссинеска стационарные плоские волны в принципе тоже возможны, если  $N = \text{const}$ , т. е. плотность изменяется с глубиной экспоненциально. Такие волны оказываются уже нелинейными и могут быть описаны уравнением осциллятора с нелинейным «трением» [13]. Однако возмущения физических величин в этом случае всегда неограниченно растут при  $\theta \rightarrow \infty$  или  $\theta \rightarrow -\infty$ , что означает неограниченный рост по  $x$  и  $z$  в любой момент времени. Поэтому физически такие решения нереализуемы (хотя и не исключено, что какие-то их «куски» с конечной энергией имеют определенный физический смысл).

В жидкости с переменной  $N(z)$  волна не может оставаться плоской и стационарной. Некоторую информацию о ее поведении можно попытаться получить, вычисляя локальные характеристики, которые имела бы стационарная волна при фиксированных для данной точки значениях  $d\rho_0/dz$  и  $d^2\rho_0/dz^2$  [14]. Однако правомерность таких попыток не вполне ясна, поскольку, как понятно из сказанного выше, нелинейность проявляется лишь на тех же масштабах, что и изменения амплитуды или искривление фронта волны из-за неоднородности, которые при этом не учитываются.

Следующий по сложности шаг состоит в рассмотрении неоднородных плоских волн, в которых  $\psi$  и  $\rho$  зависят от двух переменных:  $z$  и  $\xi = x - Vz$ , где  $V = \text{const}$ . Тогда уравнение (5) приобретает вид  $J(\rho, \psi - Vz) = 0$  и удовлетворяется любой функциональной связью между  $\rho$  и  $\psi - Vz$ :

$$\rho = \tilde{\rho}(\psi - Vz), \quad (6)$$

где  $\tilde{\rho}$  — произвольная функция. Физический смысл уравнения (6) ясен: в сопровождающей волну системе координат, где  $V = 0$ , частицы движутся вдоль линий тока, на которых одновременно постоянны как  $\psi$  (по определению), так и  $\rho$  (вследствие несжимаемости).

Уравнение (4) в классе стационарных волн тоже может быть записано в виде некоторого якобиана, после чего его порядок также понижается с появлением новой произвольной функции  $\Phi$  от  $\psi' = \psi - Vz$ . В течение многих лет различные формы этого уравнения служили, пожалуй, основным инструментом для изучения нелинейных течений стратифицированной жидкости. При этом рассмотрение обычно велось в системе координат, связанной с волной (где  $V = 0$ ). Давно замечено, что при некоторых условиях задача снова может быть приведена к линейной без предположения о малости возмущений. Такая возможность была успешно использована для решения важного класса задач о возбуж-

дении внутренних волн при набегании стратифицированного потока на двумерные барьеры различной формы [4, 5]. В приближении Буссинеска условия линейности сводятся и здесь к постоянству  $N(z)$ . Это сразу видно из простой формы уравнения для  $\psi$ , полученной Леоновым и Миропольским [14, 15] при наложении условия, чтобы это уравнение удовлетворялось тождественно при  $\psi = 0$ ,  $\rho = \rho_0(z)$ , т. е. для покоящейся жидкости. При этом условии в приближении Буссинеска можно получить

$$\Delta\psi + \frac{\psi}{V^2} N^2 \left( z - \frac{\psi}{V} \right) = 0. \quad (7)$$

Это уравнение не содержит произвольных функций, поскольку функция  $N$  определяется стратификацией невозмущенной жидкости. Оно всегда справедливо, если хотя бы при одном значении  $\xi$  (например, при  $\xi \rightarrow \infty$ ) функция  $\psi$  равна нулю при всех  $z$ . Следует помнить, однако, что (7) описывает лишь частный класс стационарных волн и непригодно, например, для исследования средних течений, создаваемых периодической волной (см. раздел 2.2).

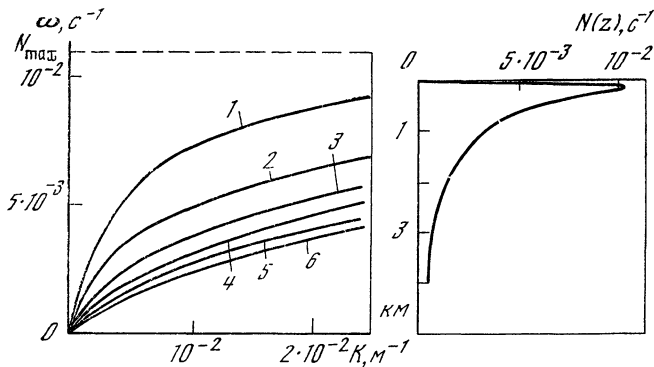
Чтобы определить вертикальную структуру течения в волне, необходимо наложить граничные условия на дне и поверхности океана. В упомянутом приближении «твердой крышки»  $w(0, H) \sim \sim \frac{\partial\psi}{\partial x} \Big|_{0, H} = 0$ . В линейном приближении, когда  $\psi \rightarrow 0$  или  $N^2 = \text{const}$ , решение (7) получается разделением переменных:  $\psi = f(z)e^{ik\xi}$ , причем  $f$  определяется как собственная функция (мода) краевой задачи

$$f_{\xi\xi} + \left[ \frac{N^2(z)}{V^2} - k^2 \right] f = 0 \quad (8)$$

с нулевыми условиями для  $f$  при  $z = 0, H$ . Собственные значения этой задачи определяют дисперсионное уравнение, связывающее горизонтальное волновое число  $k$  и частоту  $\omega = kV$ .

Типичный вид дисперсионных кривых  $\omega(k)$  показан на рис. 2. В вырожденном случае, когда жидкость состоит из двух однородных слоев, разделенных границей (термоклин, пикноклин), остается лишь одна мода. Подробное обсуждение дисперсионных свойств внутренних мод в общем случае можно найти, например, в [3, 5].

Заметим, что, хотя при  $N = \text{const}$  функции  $\psi$  и  $U$  меняются в фиксированной точке синусоидально, это не относится к вертикальному смещению частиц  $\eta$ , которое нелинейно связано со скоростью ( $w = \eta_t + u\eta_x = (u - V)\eta_\xi$ ), поэтому линии заданной плотности (изопикны) или изотермы деформируются нелинейным образом [1]. Заметим также, что при  $N = \text{const}$  решением будет любая суперпозиция гармонических мод, для которых значения  $V$  одинаковы (но не суперпозиция волн с произвольными  $\omega$  и  $k$ , как для случая бесконечно малых  $\psi$ ). В общем случае необходимо решать нелинейную краевую задачу и для ее решения обычно приходится в той или иной форме пользоваться малостью нелинейно-



**Рис. 2.** Дисперсионные кривые для первых шести внутренних мод в типичной модели океана глубиной 4 км с профилем  $N(z)$ , построенным по данным работы [16]

сти (либо малó  $\psi$ , либо  $N$  máло отличается от константы). Как хорошо известно из общей теории, отличие профиля такой волны от синусоидального определяется не только параметром нелинейности, характеризующим относительное значение членов этого разложения, но и параметром дисперсии, определяющим, например, разницу фазовых скоростей гармонической волны и ее высших гармоник. Поскольку дисперсия мала в области низких частот, в этой области даже малая нелинейность может привести к сильным искажениям формы волны, тогда как в высокочастотной области при слабой нелинейности стационарные волны должны быть близки к гармоническим.

## 2.2. Короткие волны

Сначала мы обсудим не слишком длинные квазигармонические волны, амплитуда которых относительно невелика, а дисперсия фазовой скорости достаточно сильна. Для таких волн, как известно, возможны различные эффекты нелинейного «самовоздействия» (самомодуляция, автодетектирование, самофокусировка и т. д.), обусловленные зависимостью скорости волны от ее интенсивности. Хотя в общей теории эти эффекты детально изучены, их особенности для внутренних волн (а эти особенности весьма существенны) были рассмотрены лишь недавно [17, 18].

В данном случае решение уравнений раздела 2.1 для стационарных волн можно искать в виде ряда с главным членом, соответствующим бегущей вдоль  $x$  синусоидальной волне, вертикальная структура которой определяется одной из собственных мод линейной задачи

$$\psi = f(z)(Ae^{i\theta} + A^*e^{-i\theta}) + \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n \psi_n(\theta, z) \quad (9)$$

и аналогично для  $\rho'$ . Здесь  $f(z)$  удовлетворяет уравнению (8),  $\theta = kx - \omega t$  — фаза стационарной волны,  $\varepsilon$  — малый параметр нелинейности. Подстановка этого ряда в уравнения (4), (5) приводит к уравнениям последовательных приближений по  $\varepsilon$ , которые вполне соответствуют обычным асимптотическим методам для нелинейных волн, обсуждавшимся ранее [19], с той, однако, разницей, что поправка каждого приближения определяется из решения соответствующей краевой задачи по  $z$ .

В линейном приближении ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) получаем, конечно, обычное дисперсионное уравнение  $\omega = F(k)$ . В первом порядке по  $\varepsilon$  основная волна не меняется, но появляется вторая гармоника  $\psi_2$  с амплитудой, пропорциональной  $|A|^2$ . В следующем порядке по  $\varepsilon$ , кроме третьей гармоники, амплитуда которой пропорциональна  $A^3$ , в уравнениях появляются члены порядка  $A^3$  на основной частоте  $\omega$  (самовоздействие). Это вносит поправку порядка  $A^2$  в дисперсионное уравнение

$$\omega = F(k) - I |A|^2, \quad (10)$$

где  $I$  — некоторая функция  $k$ . Примеры таких уравнений для двухслойных моделей жидкости приведены в [4]. Кроме того, гармоническая волна, вообще говоря, порождает средние потоки жидкости, величина которых порядка  $|A|^2$  [4]. В данном случае такие течения должны находиться из усредненных по времени уравнений (4), (5), в которых нелинейные по  $\psi$  и  $\rho$  члены при подстановке квазигармонического решения и усреднения в принципе дают «усредненную силу» порядка  $|A|^2$ , которая и порождает течения. Однако для строго периодической волны эта сила, как легко убедиться, обращается в нуль, и это означает, что к стационарному слабонелинейному решению можно добавить горизонтальное сдвиговое течение порядка  $|A|^2$ , скорость которого произвольно зависит от  $z$ , а также произвольно зависящую от  $z$  добавку к средней плотности того же порядка.

Горизонтальный поток массы  $P$  равен  $\overline{\rho u} = \rho_0 \overline{u} + \overline{\rho' u}$ , где черта обозначает усреднение. Даже если добавки к средней скорости и плотности равны нулю (в эйлеровых координатах), то  $P$  отлич-

но от нуля и равно  $P = \frac{\rho_0 z}{V} |A|^2 \overline{f f_z}$ . Отсюда ясно, что  $\int_0^H P dz = 0$ ,

т. е. полный перенос массы по горизонтали отсутствует. Это — аналог стокова течения для поверхностных волн. В общем же случае для строго периодических волн среднее течение остается неопределенным. Существенно, что оно влияет и на нелинейный параметр  $I$  в уравнении (10) и, следовательно, последнее тоже не определено.

Чтобы получить более определенные результаты и вместе с тем описать более широкий класс волн, следует рассмотреть модулированную волну, амплитуда которой медленно меняется во времени и пространстве [17]. При этом решение по-прежнему отыски-

вается в виде ряда (9), но теперь амплитуда  $A$ , а также функции  $\psi_n$  зависят от «медленных» переменных  $\tau = \epsilon t$ ,  $x' = \epsilon x$ . Из-за модуляции амплитуды по  $x$  средние (за период высокой частоты) от нелинейных слагаемых в уравнениях (4), (5) уже не равны нулю, и поэтому средние потоки тоже неизбежно отличны от нуля<sup>1</sup>. Трудность их определения состоит в том, что соответствующие члены в усредненных уравнениях имеют порядок производных по медленным переменным от величин  $|A|^2 A$ , и, следовательно, для отыскания потоков необходимо рассматривать уравнения четвертого приближения.

В результате довольно громоздких выкладок получается система дифференциальных уравнений второго порядка для медленно меняющихся добавок  $C$  и  $R$  к функции тока и плотности с правыми частями, состоящими из членов типа  $|A^2|_\tau$  и  $|A^2|_{x'}$ . Их общее решение должно содержать две произвольные функции, однако имеется частное решение вида  $C = c(z)|A|^2$ ,  $R = r(z)|A|^2$ , в котором течения локально связаны с амплитудой волны. Эти решения должны, в частности, реализоваться, если фронт волны продвигается в невозмущенную область. Функция  $c$  находится (в приближении Буссинеска) из решения краевой задачи [17]

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{N^2(z)}{V_g^2} \right] c(z) = \frac{1}{V} \left( \frac{2}{V^2} - \frac{1}{VV_g} - \frac{1}{V_g^2} \right) N^2 (f^2)_z + \frac{2}{V^3} (N^2)_z f^2,$$

$$c(0) = c(H) = 0,$$

а  $r(z)$  выражается алгебраически через  $c(z)$ . Здесь  $V_g = d\omega/dk$  — групповая скорость. Интересно отметить, что  $c$  и  $r$  отличны от нуля даже в приближении Буссинеска при  $N = \text{const}$ , когда в рассмотренных выше случаях нелинейность вообще исчезала. Параметр нелинейности  $I$  при этом равен

$$I \sim \frac{3\omega (n\pi)^6 k^2 [k^2 H^2 + (n\pi)^2]}{H \{ [k^2 H^2 + (n\pi)^2]^3 - 4(n\pi)^6 \}}, \quad (11)$$

где  $n$  — номер моды. Отсюда видна еще одна особенность — при  $k = k_* \simeq 2,4 n/H$  ( $\omega \simeq 0,6N$ ) параметр  $I$  меняет знак, обращаясь в бесконечность. Это указывает на пространственный резонанс между вертикальной структурой течения и возбуждающей его усредненной силой. Конечно, в окрестности точки  $k_*$  данное приближение неприменимо.

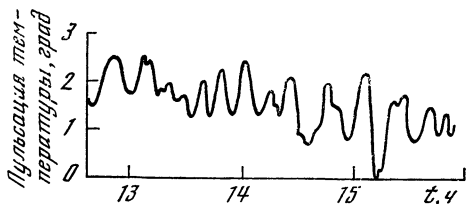
Возвращаясь к нелинейному самовоздействию модулированных волн, напомним, что устойчивость или неустойчивость плоской гармонической волны зависит от знаков нелинейного  $I$  и дисперсионного  $\kappa = \omega (dV_g/d\omega)/V_g = 3(N^2/\omega^2 - 1)^{-1}$  параметров. Необходимые условия устойчивости имеют вид  $I < 0$ ,  $I\kappa < 0$ . При  $I > 0$  волна неустойчива по отношению к поперечной (само-

<sup>1</sup> Этот эффект сродни хорошо известному для плазмы появлению в осциллирующем электрическом поле усредненной силы, пропорциональной градиенту от квадрата амплитуды осцилляций.

фокусировка), а при  $I\kappa > 0$  — к продольной (само модуляция) модуляции. Поскольку во внутренних волнах  $\kappa < 0$ , условия само модуляции и самофокусировки оказываются взаимоисключающими и стационарная волна неустойчива всегда. При  $N = \text{const}$ , когда справедлива формула (11), в волнах с  $k > k_*$  возникает самофокусировка, а при  $k < k_*$  — само модуляция.

Модуляционная неустойчивость должна приводить к сильной неоднородности распределения амплитуды внутренних волн, разбивая волны на отдельные цуги. Как известно из общей теории,

Рис. 3. Цуг коротких внутренних волн в Атлантическом океане [23]



неустойчивость развивается наиболее быстро при частоте модуляции  $\Omega_{\text{опт}} \sim \sqrt{IA^2 \omega \kappa / 2}$ , а время ее развития — порядка  $(IA^2)^{-1}$ , причем результатом неустойчивости может быть формирование относительно стабильных волновых групп длительностью порядка  $\Omega_{\text{опт}}^{-1}$ .

Цуги короткопериодных внутренних волн с узким спектром, по-видимому, часто встречаются в океане [10, 20—22] (рис. 3, см. также рис. 5, 8, приведенные ниже). Имеющиеся данные позволяют сделать лишь грубые оценки, которые показывают, что длительность цугов часто близка к  $2\pi/\Omega_{\text{опт}}$ , так что модуляционный механизм, возможно, влияет на параметры таких цугов (независимо от их происхождения).

Течения, порожденные внутренними волнами, представляют, конечно, и самостоятельный интерес. Одна из особенностей таких течений проявляется для достаточно коротких волн и состоит в том, что при значениях  $\omega$ , близких к  $N_{\text{max}}$ , возможна резкая (по сравнению со структурой данной волновой моды) вертикальная изменчивость течения [18]. Авторы [18, 19] привлекают этот результат для объяснения происхождения вертикальной микро структуры верхнего слоя океана и приводят примеры расчетов для реальных морских условий.

На рис. 4, а показаны профили средних возмущений плотности и скорости, которые, согласно расчетам, приведенным в [19], создавались бы внутренней волной длиной 24 м и амплитудой 40 см на основной моде, соответствующей приведенному на рис. 4, б профилю частоты Вэйсяля, снятому в одном из районов Балтийского моря. Рассчитанные таким образом изменения  $N(z)$  неплохо соответствуют наблюдаемым. Конечно, данная гипотеза формирования тонкой структуры не является единственной и, на наш



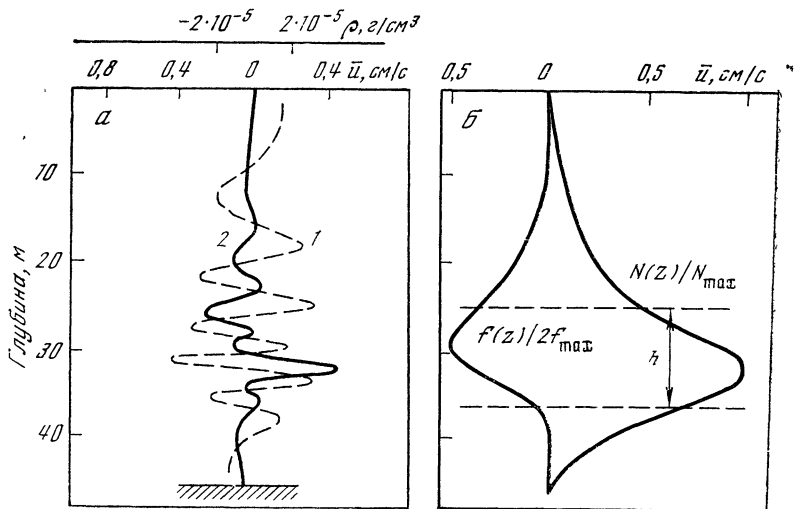


Рис. 4. Вертикальные распределения средней скорости течения (1) и средних возмущений плотности (2), вызванных первой внутренней модой с амплитудой 40 см и длиной 24 м, по расчетам [24] для одного из участков Балтийского моря (а) и профиль  $N(z)/N_{\max}$  и структура моды  $f(z)/2f_{\max}$  ( $h$  — масштаб сглаживания  $N(z)$ ) (б)

взгляд, вряд ли имеет универсальную применимость. Вместе с тем следует признать, что только эта гипотеза в данный момент доведена до конкретных количественных расчетов, позволивших провести сравнение с реальной океанической ситуацией. Однако более подробное обсуждение этих вопросов не входит в нашу задачу.

В заключение заметим, что тонкая структура в свою очередь должна влиять на распространение коротких внутренних волн. Как показано в работе [25], одним из эффектов может быть расслоение дисперсионных кривых на группы (кластеры), внутри которых происходит сближение дисперсионных параметров разных мод, тогда как разные группы удаляются друг от друга. Это может, по-видимому, повлиять на спектры внутренних волн в области частот, близких к максимальной частоте Вайсяля.

### 2.3. Длинные волны

Для длинных по сравнению с глубиной океана волн (по-прежнему без учета вращения Земли) дисперсия оказывается слабой, и предположение о квазигармоничности волны даже при малой нелинейности становится некорректным. В этом случае стационарные волны имеют существенно несинусоидальный профиль. Вместе с тем это типичный случай, когда имеется возможность пе-

рейти к упрощенным, модельным уравнениям, подобно тому как для длинных поверхностных волн можно перейти к «уравнениям мелкой воды» или уравнению Кортевега — де Вриза (КДВ), которые сыграли такую значительную роль в развитии общей теории нелинейных волн.

Для внутренних волн тут снова имеется ряд существенных осложняющих обстоятельств, обусловленных прежде всего их многомодовостью, а для одной моды — зависимостью величины и знака параметра нелинейности от структуры моды. В последние годы вопрос о стационарных длинных волнах и о модельных уравнениях для внутренних волн (в одномодовом приближении) обсуждался довольно часто, начиная с работ Тер-Крикорова [26], Лонга [27] и Бенджамена [28], где обсуждались периодические и уединенные стационарные волны (см. также [14]). Уравнение КДВ для длинных волн рассматривалось в работах [29, 30] (в том числе с учетом слабых горизонтальных течений [30]); учитывались также эффекты слабой дифракционной расходимости волны в горизонтальном направлении [31]. Во всех случаях исходными являлись уравнения типа (4), (5) для функции тока. Недавно автором [32] был предложен более общий подход, основанный на непосредственном использовании системы (1) — (8) и пригодный для трехмерных многомодовых движений, уравнения которых путем разложения по собственным модам линейной задачи приводятся к двумерной форме. При этом для длинных волн естественно пользоваться разложением по «асимптотическим» собственным функциям, удовлетворяющим уравнению (8) при  $k = 0$ . Кроме того, вместо вертикальной компоненты скорости  $w$  удобно использовать вертикальное смещение  $\eta$  частиц («жидкой линии») относительно невозмущенного уровня  $z$ . Это позволяет упростить задачу и, кроме того, сразу выявить аналогию с поверхностными волнами.

Поскольку в несжимаемой жидкости плотность каждого элемента жидкости сохраняется, то  $\rho$  постоянно на всей жидкой линии, т. е.  $\rho(z + \eta) = \rho_0(z)$ . В результате можно вообще исключить  $\rho$  из исходной системы. Оставшиеся величины представляем в виде рядов по упомянутым предельным собственным функциям линейной задачи

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_n f_n(z) \tilde{\eta}_n(x, y, t), \quad \mathbf{u} = \sum_n H f_{nz}(z) \tilde{\mathbf{u}}(x, y, t), \\ p' &= \sum_n H f_{nz} \tilde{p}'(x, y, t). \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя все это в исходную систему уравнений (1) — (3) и учитывая условия ортогональности для различных мод, можно провести обычную процедуру ортогонализации, которая состоит просто в умножении каждого уравнения на  $f_n$  или  $f_{nz}$  ( $n$  — номер моды) и интегрировании по  $z$  на интервале  $(0, H)$ . После этого  $\tilde{p}$  может быть выражено через  $\tilde{\eta}$ , и в результате получим систему двумерных уравнений для связанных мод, содержащую только

$\tilde{\eta}$  и  $\tilde{u}$ . Строго говоря, эта система бесконечна, однако, при слабой нелинейности, как обычно, следует оставить лишь конечное число мод, для которых выполняются определенные резонансные соотношения (см. раздел 2.5). Если же такой резонанс отсутствует или малоэффективен, то достаточно одномодового приближения. В этом случае остается только одна пара уравнений, которая в приближении Буссинеска имеет вид <sup>2</sup> (знак  $\sim$  далее опускается)

$$\eta_t + H \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{2} s \operatorname{div} \eta \mathbf{u} = 0; \quad (13)$$

$$u_t + \frac{c^2}{H} \nabla \eta + s \left[ (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{2H} (\eta \mathbf{u})_t \right] + DH \nabla \eta_{tt} = 0. \quad (14)$$

Здесь  $c$  — значение скорости  $V$  в уравнении (8), определяемое как собственное число краевой задачи при  $k = 0$ ,  $s = H \langle f_z^3 \rangle / \langle f_z^2 \rangle$  — безразмерный параметр нелинейности,  $D = \langle f^2 \rangle / H^2 \langle f_z^2 \rangle$  — параметр дисперсии, связанной с конечностью глубины океана; угловые скобки обозначают интегрирование по  $z$  в интервале  $(0, H)$ . Более подробный вывод уравнений (13), (14) можно найти в работе [32]. В случае  $N = \text{const}$  параметр нелинейности снова обращается в нуль благодаря приближению Буссинеска <sup>3</sup>.

Один из полезных результатов состоит в том, что уравнения (13), (14) почти полностью совпадают с хорошо известными «уравнениями неглубокой воды», полученными Буссинеском для длинных поверхностных волн и теперь входящими в число модельных в общей теории. Полное совпадение достигается простой заменой переменных:  $\mathbf{u}' = \mathbf{u}/s + \eta \mathbf{u}/2H$ ,  $\eta' = H + \eta/s$ . Это означает, что все достижения теории длинных нелинейных поверхностных волн непосредственно переносятся на внутренние волны (в одномодовом случае). В частности, рассматривая плоскую бегущую вдоль  $x$  (прогрессивную) волну и переходя к переменным  $\zeta = x - ct$ ,  $\tau = t$ , можно сразу написать упомянутое выше уравнение КДВ и его стационарные решения в виде периодических «нелинейных» волн и одиночных волн — солитонов, свойства которых обсуждались ранее [34].

Однако с физической точки зрения все обстоит не так просто. Дело в том, что параметры уравнений (13), (14) зависят не только от глубины океана, но и от закона плотностной стратификации, причем параметр нелинейности  $s$  может даже менять знак в зависимости от этого закона. Например, в простейшей модели океана, состоящего из двух однородных слоев с различной плотностью,  $s < 0$ , если верхний слой тоньше нижнего, и  $s > 0$  в противном случае. Поэтому для внутренних волн физическая картина процессов оказывается более сложной и многообразной, чем для по-

<sup>2</sup> Здесь учитывается только малая квадратичная нелинейность, поэтому не возникает вопроса о средних течениях, существенных при учете кубичной нелинейности.

<sup>3</sup> Совсем недавно это уравнение было обобщено на «небуссинесковский» случай [33].

верхностных. Остановимся на некоторых особенностях этих процессов.

Для очень длинных волн последним членом в уравнении (14), содержащим более высокие, чем остальные члены, производные, можно вообще пренебречь, и тогда система (13), (14) аналогична (после упомянутой выше замены переменных) уравнениям «мелкой воды» или двумерным уравнениям гидродинамики. В одномерном случае для них могут быть написаны характеристики и соответствующие инварианты Римана, сохраняющиеся на характеристиках. Им соответствуют два семейства простых волн, в которых каждая точка профиля движется со скоростью  $c + 3su/2$  (при распространении в сторону положительных  $x$ ). Как известно, профиль поверхностной простой волны деформируется таким образом, что крутизна ее фронта увеличивается вплоть до обрушения, а спад растягивается. Здесь это справедливо, если  $s > 0$ , в противном случае обостряется спад волны (к тому же для высших мод это разделение несколько условно, поскольку знак вертикального смещения меняется с глубиной).

Появление «внутреннего бора» в виде относительно резкого повышения или понижения <sup>4</sup> уровня термоклина или соответствующего (обратного по знаку) температурного фронта неоднократно наблюдалось в сравнительно мелководных акваториях (Массачусетская бухта [35], озеро Лох-Несс [36], Каспийское море [37] и др.) <sup>5</sup>. По-видимому, во всех случаях такой фронт возникал из длинопериодных волн (приливы, сейши) и сопровождался интенсивными короткопериодными осцилляциями, что типично для диспергирующих сред (рис. 5).

Согласно теории фазовая скорость возбуждаемых волн должна быть близка к скорости движения фронта, причем первые осцилляции имеют более низкую частоту и обострены по типу кноидальных волн. То и другое, по-видимому, согласуется с данными работы [37]. Заметим еще, что осцилляции на рис. 5 неравномерны и имеют вид последовательности пугов, что, возможно, связано с рассмотренным в разделе 2.2 эффектом самомодуляции. Ли и Бердсли [30] провели численный расчет эволюции фронта в уравнении КДВ (с учетом квадратичной и кубичной нелинейностей) и сравнили результаты с данными Хэлперна [35]; по оценкам авторов, нелинейная теория дает значительно лучшее согласие с экспериментом, чем линейная. В работе [30] описан также лабораторный эксперимент, в котором наблюдались различные случаи нелинейной эволюции внутренних волн.

Остается, по-видимому, открытым вопрос о том, могут ли такие фронты двигаться стационарно, не расплываясь, т. е. являются

<sup>4</sup> Как и следует из теории, понижение имело место для приповерхностного термоклина ( $s < 0$ ), а повышение — для придонного ( $s > 0$ ).

<sup>5</sup> Своеобразен и не вполне понятен случай наблюдения резкого температурного фронта выше слабо выраженного термоклина в открытом океане [38]. Фронт сопровождался осцилляциями с очень коротким периодом.

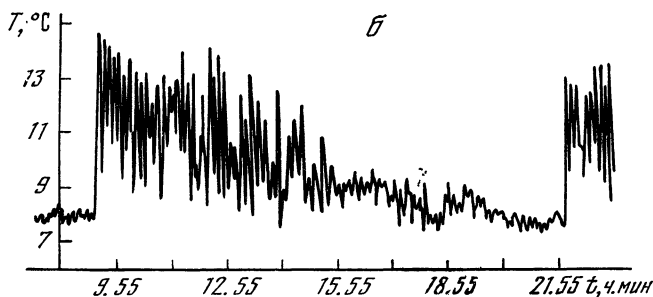
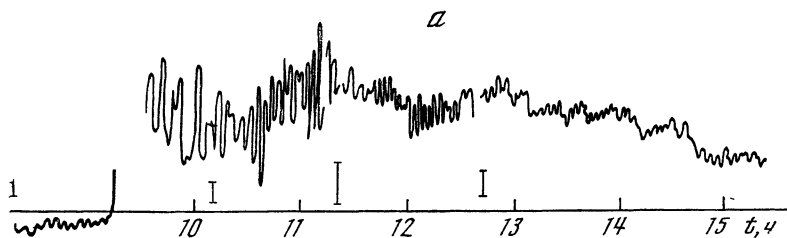


Рис. 5. Резкий температурный фронт и последующие внутренние осцилляции на термоклине в Каспийском море [22] (высота бора около 4,5 м, крутизна до 0,16, начальный участок пропущен из-за зашкаливания прибора, вертикальные отрезки соответствуют размаху колебаний термоклина в 1 м) (а) и изменение температуры на приливном течении в Массачусетской бухте [35] (б)

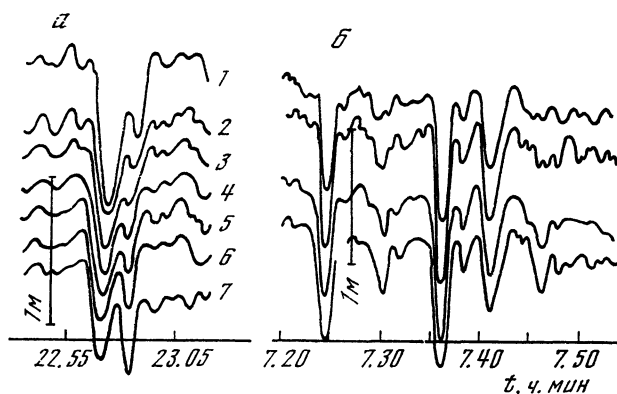


Рис. 6. Солитоноподобные изменения температуры в Каспийском море в августе 1972 г. (серии записей с датчиков, расположенных по горизонтали с интервалом 7 м) [40, 39]

ли они ударными волнами. Как известно, для этого необходима диссипация энергии на высоких частотах. Такая стабилизация фронта может быть связана с турбулентной вязкостью (которая должна одновременно приводить к уменьшению осцилляций за фронтом). В этом случае эволюция ударного фронта на фоне длинной волны может проводиться методами, известными, например, в газодинамике и нелинейной акустике, однако внутренние волны снова имеют ряд особенностей. Одна из них связана с многомодовостью [38]. Как уже говорилось, без учета резонансных взаимодействий поле можно приближенно считать просто суперпозицией нелинейно изменяющихся полей различных мод. Каждая из них эволюционирует по-своему, поскольку параметры  $c$ ,  $s$  для них различны, однако, как хорошо известно, асимптотическое поведение затухающей разрывной волны таково, что ее профиль перестает зависеть от многих деталей начального распределения поля. Так, если при  $t = 0$  волна синусоидальна, то начиная с некоторого этапа распределение энергии волн по модам зависит лишь от периодов этих волн (и, конечно, закона стратификации), но не от их амплитуд. В работе [38] приведены модельные примеры таких «универсальных» распределений.

Интересен вопрос о возможности существования в океане кноидальных волн или солитонов. По-видимому, такая возможность реальна. Так, периодические колебания термоклина, наблюдавшиеся Лафондом и приводимые едва ли не во всех книгах по внутренним волнам [1, 3, 4], весьма напоминают по форме и знаку кноидальные волны. Правда, непосредственно установить стационарность движения волнового профиля обычно нелегко. Критерием стационарности, например, для солитона может в известной степени служить выполнение связи между его характерной длиной  $\Lambda$  и высотой  $A$ , которая в первом приближении имеет вид  $\Lambda = 2H (DH/sA)^{1/2}$ , где параметры  $s$  и  $D$  те же, что и в уравнениях (13), (14).

О наблюдениях «солитоноподобных» смещений термоклина сообщалось уже неоднократно. На рис. 6 показаны такие образования, которые по знаку и соотношению между длительностью и амплитудой вполне могут соответствовать солитонам. Более того, рис. 6, *a* демонстрирует, вероятно, пару таких солитонов! Действительно, здесь можно судить об эволюции волны (правда, на небольшом расстоянии — 42 м), и эта эволюция качественно согласуется с известным теоретическим описанием взаимодействия двух солитонов в уравнении КДВ: амплитуда первого солитона растет, а второго — падает.

Упомянем еще о возможных особенностях распространения нелинейных волн в горизонтально неоднородном океане. Горизонтальные изменения глубины и плотности в океане — типичное явление, причем часто эти изменения можно считать достаточно плавными в масштабе длины исследуемой волны. Для подобных задач сейчас разработаны эффективные приближенные методы;

эти вопросы обсуждались ранее [34]. Для внутренних волн они подробно рассматривались Пелиновским и Шаврацким [40, 41]. В частности, была рассмотрена плавная перестройка параметров периодических и одиночных волн, близких к стационарным, в одномерном случае. Например, для упомянутой выше двухслойной модели высота солитона  $A_s$  (в приближении Буссинеска) изменяется по закону

$$A_s \sim \frac{h_2 - h_1}{h_2^2 h_1^2 (1 - \rho_1/\rho_2)^2}, \quad (15)$$

где  $h_1$ ,  $h_2$  и  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  — соответственно толщины и плотности слоев, которые здесь зависят от  $x$ . Заметим, что солитон имеет вид «впадины», если  $h_1 < H/2$ , и возвышения — в противном случае; это относится и к закону «внутреннего бора».

Как ясно из формулы (15), при движении в область, где плотности слоев выравниваются или слой океана подходит к поверхности ( $h_1 \rightarrow 0$ ), его амплитуда резко растет (это справедливо и для линейной волны), и в этой области вероятно его разрушение. Другая, специфически «нелинейная» особенность решения (15) состоит в том, что с приближением границы раздела к середине водного слоя ( $h_1 = H/2$ ) амплитуда солитона обращается в нуль, а его длина — в бесконечность. При дальнейшем заглублении термоклина полярность стационарной волны изменяется на противоположную, однако при переходе в эту область волна не может остаться стационарной. Эффект нарушения стационарной структуры волн при плавном изменении параметров океана также был рассмотрен в работе [41] для периодических (кноидальных) волн. Подходя к точке, в которой  $s = 0$ , такая волна становится почти синусоидальной (при конечной амплитуде), так что ее спектр резко сужается. Чтобы описать поведение волны в этой области, достаточно представить ее в виде суммы гармонического колебания (с амплитудой  $A_1(x)$ ) и его второй гармоники  $A_2(x)$  и рассмотреть их резонансное взаимодействие. Стационарной волне отвечает положение равновесия в плоскости переменных  $A_1, A_2$ . При достаточно медленном изменении параметров среды происходит столь же медленное изменение параметров точки равновесия, однако при изменении знака  $s$  фаза второй гармоники по отношению к первой изменяется на  $\pi$ . Такая бифуркация исключает плавную перестройку профиля стационарной волны, и процесс становится существенно нестационарным. Вообще возможность существования в океане «слабонелинейных» областей, где  $s = 0$  (например, когда термоклин расположен в середине водного слоя на мелком участке моря), может иметь определенный интерес для океанологов, поскольку в таких областях структура поля внутренних волн должна, по-видимому, обладать заметной спецификой.

## 2.4. Пикноклин

При средней глубине океана 4—5 км условие  $\lambda \gg H$  оказывается довольно жестким, если учесть, что при  $\lambda \approx 50 \div 100$  км уже существенны эффекты вращения Земли (см. также раздел 3.1). Вместе с тем во многих случаях основное влияние на волну оказывает сравнительно тонкая область наиболее резкой стратификации плотности (пикноклин), в которой частота Вайсяля имеет резко выраженный максимум. Тогда дисперсионные свойства волны определяются не полной глубиной  $H$ , а лишь толщиной пикноклина  $d$  или глубиной  $h$  его залегания под поверхностью океана. Простейшая модель пикноклина как границы раздела двух однородных жидкостей уже упоминалась в предыдущем разделе, однако это относилось лишь к случаю  $d \ll H \ll \lambda$ . В литературе подробно рассмотрен также случай в известной мере противоположный, когда  $\lambda \ll h$ ,  $H - h$  (но по-прежнему  $\lambda \gg d$ ) и можно рассматривать пикноклин как границу раздела между двумя бесконечными жидкими полупространствами с разными плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ), заменив граничные условия на дне и поверхности условиями исчезновения возмущений при  $|z| \rightarrow \infty$ . В этом случае существуют стационарные периодические волны, аналогичные волнам Стокса на глубокой воде при слабой нелинейности. Соответствующие решения можно найти, например, в [4].

Здесь мы остановимся лишь на своеобразном случае пикноклина конечной толщины в глубокой жидкости. Рассмотрим простейшую модель, когда в слое  $|z| < a$  жидкость стратифицирована, а вне этого слоя однородна ( $N = 0$ ). В таком слое существует набор мод, определяемых из уравнения (8) с нулевыми условиями при  $|z| \rightarrow \infty$  и условиями непрерывности  $f$  и  $f_z$  на границах слоя. Ясно, что при  $|z| > a$  поле спадает как  $\exp(-|k|z)$ . Таким образом, эффективная толщина слоя, возмущенного волной, пропорциональна горизонтальной длине волны.

В случае четной функции  $N(z)$  решение краевой задачи дает систему четных и нечетных (относительно плоскости  $z = 0$ ) мод. Здесь наиболее интересны волны, длинные по сравнению с толщиной слоя. Тогда, если, например, внутри слоя  $N = \text{const}$ , низшая четная мода удовлетворяет уравнению  $\omega = N\sqrt{ka}$ . Эта мода отвечает колебанию слоя как целого и аналогична поверхностной волне на глубокой воде. Остальные же моды при малом  $\omega$  имеют слабую дисперсию, и для них получается следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega_n \simeq c_n k - c_n^3 |k| k/aN^2 + O(k^3), \quad (16)$$

где  $n$  — номер моды,  $c_n = Na/n\pi$ , причем четным модам соответствуют целые, а нечетным — полуцелые значения  $n$ .

Уже это простое соотношение следует признать необычным для теории нелинейных волн, основанной преимущественно на дифференциальных уравнениях. Член, ответственный за дисперсию,



пропорционален не  $k^3$ , как для длинных волн, а  $k^2$ . Это означает, что дисперсионному уравнению (16) нельзя, как это обычно делают, поставить в соответствие дифференциальное уравнение, используя замену  $i\omega \rightarrow \partial/\partial t$ ,  $ik \rightarrow -d/dx$ , поскольку в этом случае уравнение (16) не остается действительным (ср. [42]). Поэтому линейный оператор, отвечающий члену с  $|k|k$ , оказывается интегральным. Он представляет собой часто встречающееся в физике преобразование Гильберта  $\hat{\mathcal{H}}[u(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(z)(\xi - z)^{-1} dz$ .

В нелинейной задаче (при слабой нелинейности) в указанном уравнении появится аддитивный нелинейный член. В результате для бегущей волны на фиксированной моде получается следующий эквивалент уравнения КДВ [3—5]:

$$u_\tau + suu_\zeta - \beta \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \hat{\mathcal{H}}(u) = 0, \quad (17)$$

где снова используется разделение переменных в форме (12) и сделана обычная замена  $\tau = t$ ,  $\zeta = x - ct$ . Параметры  $s$ ,  $\beta$  выражаются через функции  $N(z)$  и  $f(z)$ , причем при четном  $N(z)$   $s$  отлично от нуля лишь для нечетных  $f(z)$ . Все сказанное почти без изменений относится к случаю, когда стратифицированный слой прилегает к поверхности или дну жидкости [43].

На первый взгляд, решение интегродифференциального уравнения типа (17) выглядит нелегким делом даже в стационарном случае. Однако Бенджамен [46] нашел решение в простой форме, которая соответствует лоренцевой кривой

$$u_s(\xi) = A(1 + \xi^2/\delta^2)^{-1},$$

где  $\xi = x - Vt$ ,  $V = c + sA/4$ ,  $|\delta| = 4\beta/sA$ ,  $A$  — произвольная константа. Это так называемый алгебраический солитон, который представляет собой уединенный стационарный импульс с произвольной амплитудой  $A$ , причем в отличие от большинства известных солитонов функция  $u$  спадает на бесконечности не по экспоненциальному, а по степенному закону. Этот своеобразный класс нелинейных волн сейчас исследован для уравнений, отвечающих волнам разной физической природы.

Дэвис и Акривос [47] провели лабораторный эксперимент, в котором наблюдались алгебраические солитоны на терموклине. Они отмечают как удивительный факт ту легкость, с которой такие солитоны возникают почти из любого возмущения пикноклина. При небольших амплитудах форма волны соответствует теоретической, однако более интенсивные солитоны имеют ту существенную особенность, что в центре волны образуется вихревая область, в которой линии тока замкнуты, а скорость жидкости близка к скорости распространения волны (см. фото 9 в [4]). Такое движение не было вполне стационарным — за солитоном

наблюдались осцилляции, а в результате затухания волна ослаблялась, переходя в более гладкий процесс первого типа.

Уравнение (17) имеет также простое периодическое стационарное решение [46]

$$u(\xi) = A [1 - B \cos(\pi\xi/L)]^{-1},$$

где  $A = 8\pi^2\beta^2/s^2aL^2$ ,  $B = 1 - (4\pi\beta/Las)^2$ , а  $a$  и  $L$  — два произвольных параметра.

Можно думать, что класс нелинейных волн, обсуждавшихся в этом разделе, будет иметь значительный интерес для океанологии, поскольку в открытом океане внутренние волны, длина которых меньше глубины океана, но больше толщины или глубины залегания пикноклина, по-видимому, легко достигают значительной крутизны (до нескольких метров высоты на сотню метров длины), достаточной для проявления нелинейных эффектов за разумное время.

## 2.5. Взаимодействия

До сих пор мы рассматривали в основном процессы, которые можно назвать «одномодовыми» или «одноволновыми». Хотя такие процессы, по-видимому, встречаются в океане гораздо чаще, чем это казалось еще недавно, все же доминирующую роль в формировании спектров внутренних волн, вероятно, играют их взаимодействия. В литературе уже довольно давно изучаются случаи резонансных «распадов» и «слияний» троек волн, связанных резонансными соотношениями

$$\omega_1 \pm \omega_2 = \omega_3, \quad k_1 \pm k_2 = k_3. \quad (18)$$

Как показал Филлипс [48], эти соотношения могут выполняться уже для плоских внутренних волн в безграничной среде с  $N = \text{const}$ . Гораздо богаче возможности для резонансного обмена энергией для внутренних мод конечной глубины или на термоклине. При этом возможен «скалярный» резонанс, когда горизонтальные волновые векторы всех трех волн коллинеарны. Возможность подобных взаимодействий демонстрировалась в лабораторных экспериментах. Краткий обзор работ по этому вопросу можно найти в [4]. Заметим, что подробный расчет матричных коэффициентов, определяющих величину взаимодействий мод в разных случаях, был недавно проделан Вороновичем [49].

Подробно рассматривались также взаимодействия пары поверхностных волн с одной внутренней, частота и волновой вектор которой равны разности соответствующих величин для поверхностных волн [6]. Такое взаимодействие привлекло внимание многих авторов в связи с тем, что оно позволяет поверхностным волнам быть одним из источников внутреннего волнения, а вопрос об основных источниках внутренних волн в океане до сих пор не решен.

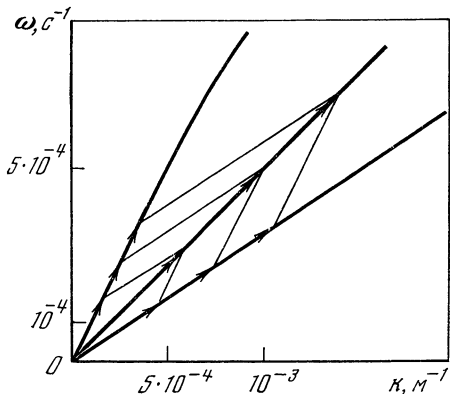
Взаимодействия поверхностных и внутренних волн интересны и с другой точки зрения: пара внутренних волн может порождать поверхностную волну с суммарной частотой. Не исключено, что этот процесс влияет на формирование спектров поверхностного волнения в малоизученном низкочастотном диапазоне (с периодами, меньшими приливных, но большими периода Вайсяля). Ермаков и Пелиновский [50] проанализировали различные типы взаимодействий такого рода и показали, что наиболее эффективным является возбуждение поверхностной волны парой распространяющихся навстречу друг другу бегущих внутренних волн, т. е. «почти стоячей» внутренней волной. В работе [50] рассматривается также кинетика таких взаимодействий в заданном поле внутренних волн на начальном этапе, когда амплитуды волн растут пропорционально  $t$ . Интересно отметить, что в спектрах как внутренних, так и порождаемых ими поверхностных волн могут быть (не всегда одновременно) особенности вблизи соответственно  $\omega_{\text{вн}} = N$  и  $\omega_{\text{пов}} = 2N$ . Это обстоятельство может оказаться важным, поскольку в спектрах внутренних волн, экспериментально снятых в океане, нередко обнаруживается пик вблизи частоты Вайсяля [1, 23, 51].

Специального рассмотрения заслуживает взаимодействие длинных волн, лежащих в области слабой дисперсии, где дисперсионные кривые близки к прямым. В этом случае даже при коллинеарном распространении существует непрерывное множество частот и волновых чисел, удовлетворяющих резонансным условиям; в частности, им удовлетворяют все высшие гармоники заданной тройки, которые еще лежат на линейных участках дисперсионных кривых. Поэтому представление о тройке гармонических волн, вообще говоря, неадекватно, и следует рассматривать обобщение уравнений (13), (14) на случай тройки мод с произвольным изменением поля на каждой моде [32].

Для прогрессивных волн в одномерном случае эта система сводится к трем связанным уравнениям Кортевега — де Вриза. Здесь любопытен, в частности, случай  $N = \text{const}$ , когда в приближении Буссинеска «собственная» нелинейность на каждой моде исчезает. Для волн с дискретным спектром это приводит к следующему выводу: в спектрах волн резонансная связь имеет место лишь в триплетах, составленных из гармонических волн на разных модах (рис. 7), различные же триплеты распространяются независимо. В каждом триplete происходит периодический обмен энергией между его составляющими, причем скорость этого обмена зависит от частот этих составляющих. Поэтому в волне происходит непрерывное «перемешивание» амплитуд и фаз спектральных компонент, и регулярный вначале профиль должен, вообще говоря, приобрести хаотическую форму (этот процесс напоминает перемешивание в системе невзаимодействующих частиц, в начальный момент регулярно модулированных по скоростям).

Как можно заключить из сказанного выше, вероятно, самой

Рис. 7. Резонансные тройки мод на прямолинейных участках дисперсионных кривых ( $N = 3 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1} = \text{const}$ ,  $H = 1 \text{ км}$ )



важной особенностью резонансных взаимодействий внутренних волн в океане является то, что в них легко могут быть вовлечены одновременно много мод и много спектральных составляющих, поэтому для описания результата взаимодействий естественно применять статистический подход. При этом для случая небольшой нелинейности имеет смысл рассматривать спектры, характерные для слабой турбулентности, как для трех-, так и четырехволновых процессов. Этот вопрос обсуждался в работах Конторовича [7] и Пелиновского (см. настоящий сборник). Были получены многочисленные спектры слабой турбулентности, причем некоторые из них, возможно, соответствуют наблюдаемым в океане.

В последнее время появились прямые подтверждения существования резонансных взаимодействий внутренних волн в океане. Об этом свидетельствует важная работа [23], авторы которой, исследовав спектры взаимной когерентности волн, наблюдавшихся ими в Арктике, выявили когерентные триплеты, соответствующие соотношению (18).

Очень много внимания в последнее время уделяется нерезонансным взаимодействиям с участием внутренних волн, особенно взаимодействиям между длинными и короткими волнами. Для этого имеется ряд существенных причин. Во-первых, с внутренними волнами многие связывают образование турбулентных областей в океане за счет обрушения или неустойчивости. Этот важный класс явлений выходит за рамки данной работы (см. [3, 4, 7, 52]). Заметим только, что при этом может возникнуть вопрос о возможности (и целесообразности) отличать очень короткие внутренние волны от классической гидродинамической турбулентности, и недавно этот вопрос был даже предметом специальной дискуссии.

Во-вторых, цуги коротких внутренних волн в океане часто возникают в присутствии интенсивных длинных внутренних волн (см., например, рис. 8). Предлагались различные объяснения этого факта [22, 23, 53, 54]. Наиболее распространенной можно, пожалуй, считать гипотезу о том, что относительно короткие внутренние волны порождаются гидродинамической неустойчивостью

в более длинных волнах, которые можно рассматривать локально как сдвиговые течения [22, 54]. Следует заметить, что в спектрах внутренних волн иногда наблюдались несколько резких пиков, соответствующих когерентным волнам разных масштабов [54]. Это позволяет авторам [54] сделать предположение о «каскадном» характере такой неустойчивости, когда осуществляется перенос энергии от наиболее длиннопериодных внутренних волн (приливных или инерционных) через несколько «поколений» неустойчивых волн (дающих соответствующие пики в спектрах) к меньшим масштабам и в конце концов — к турбулентности.

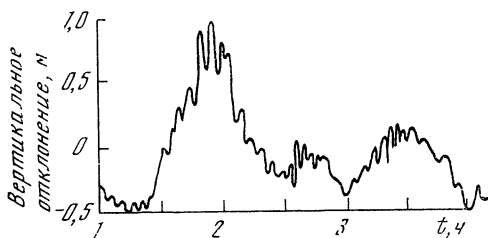


Рис. 8. Короткопериодные пуги на вершинах длиннопериодных внутренних волн в Черном море [10]

Конечно, это не единственный возможный механизм. Так, уже упомянутый внутренний бор в озере Лох-Несс, по-видимому, резонансно возбуждается длинноволновыми колебаниями, возникающими за счет пульсаций ветра [36].

Наконец, необходимо упомянуть о воздействии внутренних волн на мелкомасштабные поверхностные волны. Механизмы такого воздействия могут быть различны: адиабатическая перестройка поверхностных волн на неоднородных течениях, создаваемых внутренней волной [48], изменение поглощения поверхностных волн за счет перераспределения поверхностных пленок в океане и т. д. Так или иначе это взаимодействие приводит к «проявлению» внутренних волн на поверхности океана, и благодаря этому на фотографиях океана, сделанных с искусственных спутников Земли, внутренние волны видны в виде «сликов» — полос, ориентированных вдоль фронтов внутренних волн [55].

### 3. ВРАЩАЮЩИЙСЯ ОКЕАН

#### 3.1. Внутренние гравитационные волны

Если характерный период волн превышает несколько часов, то на их поведение существенно влияет вращение Земли. Если без учета последнего мы могли в значительной степени использовать подходы, развитые в общей теории, и говорить лишь о существенной специфике физических результатов, то для вращающегося океана мы сталкиваемся с новыми типами волновых движений, которые не только сложны сами по себе, но часто совершенно не укладываются в рамки известных до сих пор модельных задач.

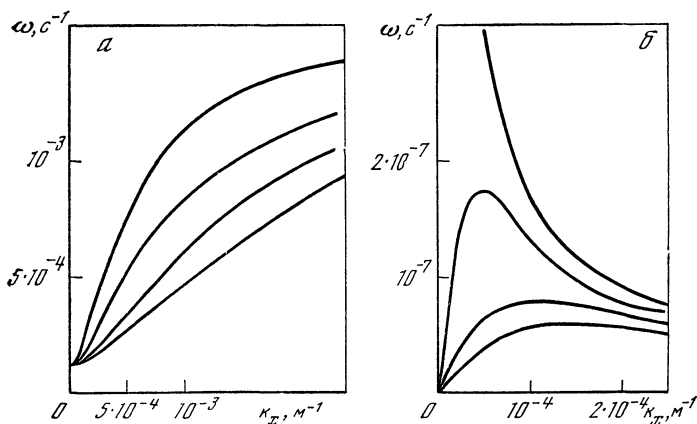


Рис. 9. Дисперсионные кривые разных мод для внутренних гравитационных волн (глубина  $H = 4$  км,  $N = 1,5 \cdot 10^{-3}$  с $^{-1} = \text{const}$ ,  $45^\circ$  с. ш.) (а) и для волн Россби ( $H = 4$  км,  $N = 2 \cdot 10^{-3}$  с $^{-1} = \text{const}$ ,  $45^\circ$  с. ш., распространение по широте) (б)

Верхняя кривая на рис. 9,б — баротропная мода

Кое-какую информацию снова дает рассмотрение дисперсионных характеристик таких волн в линейном приближении. Общий анализ дисперсионных свойств волн во вращающемся стратифицированном океане довольно сложен, и даже вопрос о возможности разделения переменных не всегда ясен. Однако реально вращение Земли имеет смысл учитывать, по-видимому, лишь для волн, длинных в сравнении с глубиной океана. В этом случае вращение Земли не оказывает влияния на вертикальную структуру мод. Дисперсионные же зависимости, связывающие  $\omega$  и  $k$ , радикально изменяются (рис. 9, а). Внутренние гравитационные волны (их называют также гравитационно-гироскопическими) теперь имеют нижнюю предельную частоту, равную параметру Кориолиса, вблизи которой появляется сильная «низкочастотная» дисперсия, аналогичная той, которая характерна, например, для электромагнитных мод в волноводах. Кроме того, при учете зависимости  $f$  от меридиональной координаты  $y$  появляется еще группа мод с частотами, много меньшими  $f$ , — планетарные волны или волны Россби. Одна из них — баротропная (поверхностная) мода — соответствует тривиальному решению уравнения (8) и аналогична по структуре длинным поверхностным волнам, но существует и в приближении твердой крышки. Остальные моды — внутренние (бароклинные) — существуют благодаря стратификации океана.

Поскольку речь идет о волнах, длинных по сравнению с глубиной океана, мы снова можем перейти от трехмерных уравнений (1) — (3) к двумерным уравнениям связанных мод [32]. В результате для одной моды получаются снова уравнения (13), (14), где в левой части (14) добавляется член  $(f \times u)(1 - \eta/2H)$ . Под-

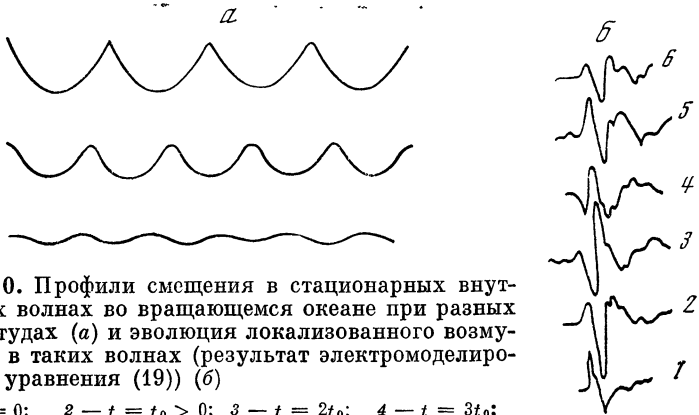


Рис. 10. Профили смещения в стационарных внутренних волнах во вращающемся океане при разных амплитудах (а) и эволюция локализованного возмущения в таких волнах (результат электро моделирования уравнения (19)) (б)

1 —  $t = 0$ ; 2 —  $t = t_0 > 0$ ; 3 —  $t = 2t_0$ ; 4 —  $t = 3t_0$ ;  
5 —  $t = 4t_0$ ; 6 —  $t = 5t_0$

черкнем, что в такой форме модовые уравнения справедливы как для внутренних гравитационных волн, так и для бароклинных волн Россби.

Рассмотрим сначала гравитационные волны. Для них можно положить  $f = \text{const}$ . Ограничимся одномерным распространением (в направлении  $x$ ). Однако и в этом случае благодаря вращению отличны от нуля обе компоненты горизонтальной скорости  $u$  и  $v$ . Чтобы получить обозримые результаты, предположим, что «вращательная» дисперсия относительно мала, т. е. частота волны не слишком близка к  $f$ ; если при этом максимальная частота Вейселя существенно больше  $f$ , что типично для океана, то и высокочастотная дисперсия, связанная с конечностью глубины, может оставаться малой в значительном диапазоне частот. В этом случае для бегущей (прогрессивной) волны можно получить упрощенное модельное уравнение [32]

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( u_\tau + \frac{3}{2} suu_\xi + \frac{1}{2} cDH^2 u_{\xi\xi\xi} \right) = \frac{f^2}{2c} u, \quad v = -f \int u dt, \quad (19)$$

где  $\tau = t$ ,  $\xi = x - ct$ ,  $v \ll u$ .

Таким образом, при учете вращения «модельное» уравнение оказывается на порядок выше, чем известное уравнение КДВ для невращающейся жидкости, и исследовать даже стационарные его решения далеко не просто.

Задача существенно облегчается, если пренебречь высокочастотной дисперсией, связанной с конечностью глубины (член с  $D$ ); оставшееся уравнение второго порядка в классе стационарных волн ( $u = u(\xi)$ ,  $\xi = \zeta - \Delta\tau$ ) легко интегрируется. Ограниченные гладкие решения имеются только при  $\Delta > 0$ , т. е. для «быстрых» стационарных волн, скорость которых  $V$  превышает  $c$  (рис. 10, а). Эти решения периодичны по  $\xi$ . Интересно, что при за-

данной скорости они имеют предельную амплитуду, при которой профиль  $u(\xi)$  имеет излом (разрыв производной). Форма такой предельной волны оказывается параболической. Высота ее зависит от скорости, однако вертикальное ускорение частиц  $v = \omega t$  оказывается универсальной константой:  $v_{\text{пр}} \simeq (4/9) H f^2$  (для открытого океана и средних широт  $v_{\text{пр}} \simeq 2 \cdot 10^{-3}$  см/с<sup>2</sup>). Это несправедливо, конечно, вблизи точек излома  $u$ , где  $v$  имеет дельта-образный пик. Для устранения этой особенности необходимо учесть либо конечность глубины (т. е. рассматривать уравнение (19) в полном виде), либо учесть возможность разрушения волны вблизи вершин, что может привести к генерации относительно мелкомасштабной волновой турбулентности (с масштабами порядка глубины океана).

Для «медленных» волн ( $V < c$ ) неограниченных стационарных решений без особенностей нет вообще; в частности, нет решений в виде солитонов. Что же касается нестационарных локализованных волн, то можно ожидать [32], что в волне должна наблюдаться периодическая изменчивость с частотой порядка  $f$ . Это подтверждается экспериментами по электромагнитному моделированию решений уравнения (19) (рис. 10, б).

### 3.2. Внутренние волны Россби

Периоды инерционно-гравитационной ветви внутренних волн ограничены сверху инерционным периодом  $T_{\text{и}} = 2\pi/f$ . Гораздо сильнее низкочастотные движения связаны с волнами Россби. Эти волны вызывают большой интерес у океанологов, поскольку это самые крупномасштабные из известных волновых движений океана. В частности, масштабы уже упомянутых синоптических вихрей (размеры порядка 50—100 км, характерные времена в несколько суток и более) соответствуют, видимо, низшим бароклинным волнам Россби. Добавим, что нелинейность в таких вихрях весьма велика, так как скорость движения частиц (10 см/с и более) превышает скорость перемещения возмущений.

Чтобы использовать двумерные уравнения (13), (14) (с учетом вращения) для описания волн Россби, необходимо, во-первых, ввести в них зависимость  $f$  от меридиональной координаты  $y$  и, во-вторых, сделать несколько упрощающих предположений. Для волн, коротких по сравнению с радиусом Земли (а это практически всегда справедливо для бароклинных волн), обычно можно использовать так называемое приближение  $\beta$ -плоскости, т. е. положить  $f = f_0 + \beta y$ , где  $\beta = \text{const}$  и  $|\beta y| \ll f_0$  (такое приближение, конечно, неприменимо вблизи экватора). Частота таких волн мала по сравнению с  $f$ , а скорость — по сравнению с  $c$ . Кроме того, принимается так называемое условие квази-геострофичности:  $|su| \ll f\lambda$ , где  $\lambda$  — характерная длина волны. Можно показать, что при этих условиях приближенно  $u \simeq -F_y$ ,  $v = F_x$ ,



где  $F = c^2 \eta / 2f_0 H$ , т. е.  $\eta$  приближенно пропорционально функции тока <sup>6</sup>.

С учетом сказанного уравнения типа (13), (14) легко привести к так называемому уравнению вихря, которое запишем в виде [32]

$$-\beta F_x + \frac{f_0^2}{c^2} F_t = \Delta F_t + sJ(F, \Delta F) \quad (20)$$

(членом, учитывающим конечность глубины океана, мы пренебрегаем). Хотя непосредственно это уравнение получено для бароклинных мод, оно совпадает с известным уравнением для баротропной волны [56], если положить  $s = 1$ , а  $c$  считать скоростью длинных поверхностных волн ( $c = \sqrt{gH}$ ); заметим, что для последней член  $(f_0^2/c^2)F_t$  возникает только при отказе от приближения твердой крышки. Таким образом, обсуждавшаяся выше аналогия между уравнениями нелинейных поверхностных и внутренних волн распространяется и на волны Россби.

Одна из особенностей уравнения (20) состоит в том, что, хотя в исходных уравнениях все нелинейности малы, нелинейный член в (20) в принципе сравним с остальными и может даже быть основным (насколько это совместимо с одномодовым приближением). Другой особенностью является то, что мы снова имеем дело с нелинейностью в виде якобиана, на этот раз по горизонтальным координатам. Стационарные плоские волны опять оказываются синусоидальными при любой амплитуде и удовлетворяют известному дисперсионному уравнению

$$\omega = -\beta k_x / (k_x^2 + k_y^2 + a_R^{-2}),$$

где  $a_R = c/f_0$  — так называемый масштаб Россби.

Отсюда видно, что волны Россби существенно анизотропны, причем, как уже отмечалось, фазовая скорость направлена к западу. Как видно из рис. 9, б, групповая скорость длинных волн направлена на запад, а коротких — на восток. Таким образом, эти волны уже в линейном приближении обладают весьма интересными особенностями, которые, впрочем, неоднократно обсуждались в литературе.

Нелинейное поведение бароклинных волн Россби почти не изучалось (за указанным ниже исключением). Все же ряд выводов можно сделать на основе аналогии с уравнением баротропных волн. Здесь решалось несколько нелинейных задач. Одна из них в известной мере сходна с рассмотренной в разделе 1 для невращающегося океана: поскольку однородные плоские волны оказываются линейными, естественно рассматривать неоднородные плоские волны в некотором (здесь горизонтальном) волноводе. Он может быть создан, например, неоднородным зональным (направленным по параллелям  $x$ ) течением, изменяющимся по

<sup>6</sup> При обычном трехмерном описании аналогичную роль играет давление

меридиану  $y$ . В таком течении возможны локализованные (спадающие при  $|y| \rightarrow \infty$ ) моды волн Россби.

Такой случай исследовали Максуриси и Редекопп [57] применительно к бароклиным волнам Россби при  $N(z) = \text{const}$ . (это едва ли не единственный пример рассмотрения нелинейных бароклиных волн). Они показали, что достаточно длинные (по  $x$ ) волны такого типа на сдвиговом течении удовлетворяют модифицированному уравнению КДВ, в котором нелинейный член

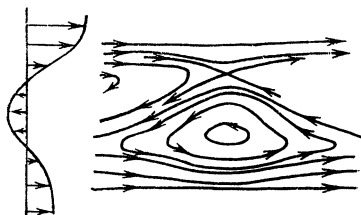


Рис. 11. Схема линий тока для связанной пары солитонов Россби противоположных знаков на неоднородном течении (профиль течения показан слева) [56]

пропорционален  $A^2 A_x$  (как обычно, при  $N = \text{const}$  квадратичная нелинейность исчезает). Решения такого уравнения хорошо изучены. Авторы используют такие решения для объяснения наблюдений Большого Красного пятна на Юпитере, предполагая, что оно представляет собой солитон Россби или, точнее, пару взаимодействующих солитонов противоположных знаков (рис. 11). По мнению авторов, получающаяся в результате картина линий тока хорошо согласуется с данными наблюдений структуры самого пятна и окружающих его течений.

Другой причиной формирования волновода может быть изменение глубины океана  $H(x, y)$ . Вообще «планетарная» ветвь волн существует при условии, что отличен от нуля градиент отношения  $f/H$ , причем изменению  $f$  соответствуют обычные волны Россби, а изменению  $H$  — так называемые топографические волны Россби. При этом склоны океанического дна могут создавать волноводы, а распространение длинных волн вдоль склонов может быть описано уравнением типа КДВ. Подобные задачи рассматривались для баротропных волн [58, 59]. Ввиду изрезанности рельефа реального дна океанов топографические эффекты представляются весьма существенными.

Указанные выше задачи все же сродни тем, которые рассматривались в первой части. Своеобразные и сложные задачи возникают для «свободных» волн Россби, структура которых не фиксируется какой-либо горизонтальной волноводной модой. Подобные задачи рассматривались Ларичевым и Резником применительно к баротропной моде Россби. Для таких волн были рассмотрены, в частности, стационарные волны на зональном сдвиговом течении [60]. Были найдены как периодические, так и уединенные волны, причем первые движутся на запад, а вторые — на восток относительно среднего течения. Заметим, од-

нако, что эти решения не являются аналитическими по  $y$  и, вообще говоря, не определены на всем бесконечном интервале по  $y$ .

Весьма интересны, на наш взгляд, попытки найти двумерный солитон Россби, который был бы локализован во всех направлениях уже в однородной жидкости. Отыскивая стационарные уравнения (20) в виде  $F(\xi, y)$ , где  $\xi = x - Vt$ , нетрудно получить

$$J(F + Vy, \Delta F + \beta'y) = 0 \quad (21)$$

или

$$\Delta F + \beta'y = \Phi(F + Vy), \quad (22)$$

где  $\Phi$  — произвольная функция,  $\beta' = \beta + f_0 V/c^2$ . Ввиду наличия произвольной функции можно было бы ожидать, что в семействе уравнений (22) имеются такие, которые допускают полностью локализованные решения, однако отыскать их не просто. Легко видеть, однако, что однозначной функции  $\Phi$ , удовлетворяющей этому условию, не существует. Действительно, условие  $F, \Delta F \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  может быть совместно с уравнением (22) только при  $\Phi(\xi) = (\beta'/V)\xi$ , и тогда уравнение (22) становится линейным. Ясно, что такое уравнение не имеет полностью локализованных решений. Ларичев и Резник рассмотрели возможные неаналитические решения (22), считая, что в общем случае  $\Phi$  может быть неоднозначной. Одно из них [60] относится к волнам с очень сильной нелинейностью, когда в уравнении (20) преобладают слагаемые, входящие в якобиан  $J(F, \Delta F)$ . При этом решение можно искать в виде асимптотического ряда, первый член которого удовлетворяет уравнению (22) с  $\beta' = 0$ ,  $V = 0$  и, таким образом, представляет собой симметричное образование с круговыми линиями тока, причем зависимость скорости от  $r$  оказывается знакопеременной. Эти решения в первом и втором приближениях могут быть сделаны достаточно гладкими, хотя и не аналитическими. В отличие от линейных эти волны могут двигаться как на запад, так и на восток (относительно постоянного зонального течения).

Другой тип неаналитических решений, рассмотренных теми же авторами [61], основан на предположении, что вне и внутри круга некоторого радиуса  $a$  функция  $\Phi(\xi)$  различна и имеет вид  $-k^2\xi$  при  $r < a$  и  $p^2\xi$  при  $r > a$ , причем, как следует из сказанного выше,  $p^2 = \beta'/V$ . В результате сшивки при  $r = a$  при заданных  $a$  и  $V$  получается счетное множество решений, спадающих как  $r^{-1/2} \exp[-(\beta'/V)^{1/2}r]$  при  $r \rightarrow \infty$ , осциллирующих, вообще говоря, при  $r < a$  и непрерывных при  $r = a$  вместе с первой и второй производными (т. е. непрерывно поле скоростей и его первые производные).

Наинизшая мода такого типа похожа на хорошо известное в гидродинамике поле пары вихрей (см. рис. 14 в статье Моница и Кошлякова в этом сборнике), но с тем существенным отличием,

что здесь возмущения спадают на бесконечности экспоненциально, т. е. вихри сильно локализованы. Все же вопрос о возможности реального существования подобных двумерных образований, по-видимому, остается открытым: во-первых, ничего не известно об их устойчивости и, во-вторых, трудно предложить какой-либо дополнительный малый фактор (вроде вязкости для ударных волн), который сделал бы решение аналитическим и позволил бы объяснить неоднозначность функции  $\Phi$ .

Довольно подробно исследовались резонансные взаимодействия баротропных волн Россби. Как показали Лонге-Хиггинс и Гилл [56], для таких волн (в отличие от поверхностной или фиксированной внутренней моды) возможна резонансная связь уже в квадратичном приближении, т. е. могут быть выполнены соотношения (18) для горизонтальных триплетов. В бароклинном случае возможности выполнения резонансных условий снова резко возрастают из-за многомодовости, причем становится возможным скалярный синхронизм (см. раздел 2.5). При этом весьма вероятна хаотизация процесса, и тогда необходимо пользоваться статистическим описанием. Пример такого описания, а именно построение спектров слабой турбулентности для баротропных волн Россби, уже был рассмотрен в литературе [62].

В заключение раздела обратим внимание на некоторые особенности длинных волн ( $ka_R \ll 1$ ), лежащих в области слабой дисперсии. Скорость таких волн близка к величине  $c_R = \beta c^2 / f_0^2$ . В реальном океане это справедливо для волн с длинами, превышающими 100—200 км (для низких мод; для более высоких соответствующие размеры уменьшаются). В этом случае все члены в правой части (20) малы, причем условие малости нелинейности имеет вид  $(ka_R)^2 su / c_R \ll 1$ , т. е. для длинных волн нелинейность может быть невелика, даже если  $u > c_R$ . Для синоптических вихрей  $u / c_R \approx 3 \div 5$ , а указанный параметр нелинейности, по-видимому, близок к единице для низших мод. Вместе с тем отношение нелинейного и дисперсионного ( $\Delta F_t$ ) членов порядка  $su / c_R$ . В области слабой дисперсии резонансное взаимодействие мод можно свести к набору независимых триплетов, и к этому случаю применимы все утверждения, сделанные в разделе 2.5 для длинных гравитационных волн (см. рис. 7), причем эти утверждения справедливы теперь при любом  $N(z)$ , а не обязательно при  $N = \text{const}$ .

Теоретические и экспериментальные исследования последнего времени внушают некоторый оптимизм в отношении возможности разобраться в нелинейных процессах, происходящих с внутренними волнами в реальном океане. Как ясно из примеров (конечно, далеко не исчерпывающих имеющиеся данные), уже сейчас можно дать правдоподобную теоретическую интерпретацию многих наблюдаемых явлений (генерация цугов внутренних волн, внутрен-

ние боры, некоторые случаи формирования микроструктуры, одиночные волны, те или иные участки сплошных спектров, некоторые свойства синоптических вихрей) исходя из результатов нелинейной теории. Конечно, глобальный вопрос об источниках и стоках энергии внутренних волн остается нерешенным, и здесь, кроме пополнения экспериментальных данных, необходимо ликвидировать серьезные пробелы в теории (так, почти совершенно не изучены нелинейные режимы генерации внутренних волн сдвиговыми течениями и резонансными внешними источниками, например, ветром). Однако уже сейчас во всех оценках баланса энергии внутренних волн в океане [63, 64] учитываются нелинейные взаимодействия, приводящие к переносу энергии между волнами различных масштабов. Судя по всему, возможности количественного описания нелинейных внутренних движений в океане существенно возрастут уже в ближайшие годы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Краусс В. Внутренние волны. Л., Гидрометеиздат, 1968.
2. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. М., «Мир», 1969.
3. Монин А. С., Каменкович В. М., Корт В. Г. Изменчивость Мирового океана. Л., Гидрометеиздат, 1974.
4. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М., «Мир», 1977.
5. Ии Чи-Шун — В кн.: Нелинейные волны. М., «Мир», 1977, с. 271.
6. Брезовских Л. М., Наугольных К. А., Рыбак С. А. — Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, № 5—6, с. 842.
7. Конторович В. М. — Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, № 5—6, с. 872.
8. Briscoe M. G. — J. Geophys. Res., 1975, 80, N 3, p. 289.
9. Garrett C., Munk W. — J. Geophys. Res., 1975, 80, N 3, p. 291.
10. Brekhovskikh L. M., Konjaev K. V., Sabinin K. D., Serikov A. W. — J. Geophys. Res., 1975, 80, N 6, p. 856.
11. Сабинин К. Д., Сериков А. Н. — Океанология, 1976, 16, № 5, с. 782.
12. Самодуров А. С. — Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1974, 10, № 8, с. 904.
13. Одуло А. Б., Одуло Ан. Б., Чусов М. А. — Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1977, 13, № 8, с. 850.
14. Леонов А. И., Миропольский Ю. З. — Докл. АН СССР, 1975, 222, № 1, с. 68; 1974, 218, № 6, с. 1287.
15. Леонов А. И., Миропольский Ю. З. — Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1975, 11, № 5, с. 491.
16. Кулаков А. В. — Океанология, 1977, 17, № 5, с. 800.
17. Борисенко Ю. Д., Воронович А. Г., Леонов А. И., Миропольский Ю. З. — Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1976, 12, № 3, с. 293.
18. Воронович А. Г., Леонов А. И., Миропольский Ю. З. — Изв. АН СССР, Физ. атмос. и океана, 1976, 16, № 5, с. 750.
19. Островский Л. А. — Изв. вузов. Радиофизика, 1974, 17, № 4, с. 454.
20. Curtin T., Mooers N. K. — J. Geophys. Res., 1975, 80, N 6, p. 882.
21. Zenk W., Katz E. J. — J. Geophys. Res., 1970, 80, N 27, p. 3885.
22. Иванов В. А., Коняев К. В. — Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1976, 12, № 4, с. 416.
23. Коняев К. В., Сабинин К. Д. — Докл. АН СССР, 1973, 210, № 6, с. 1342.
24. Леонов А. И., Миропольский Ю. З., Тамсалу Р. Э. — Океанология, 1977, 17, № 3, с. 399.
25. Островский Л. А. — Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1977, 13, № 7, с. 783.

26. *Гер-Крикоров А. М.*— ПММ, 1962, 26, № 6, с. 1067.
27. *Long R. R.*— *Tellus*, 1965, 17, p. 46.
28. *Benjamin T. B.*— *J. Fluid Mech.*, 1966, 25, p. 241.
29. *Benney D. J.*— *J. Math. phys.*, 1966, 45, N 1, p. 53.
30. *Lee C. V., Beardsley R. C.*— *J. Geophys. Res.*, 1974, 79, N 3, p. 453.
31. *Леонов А. И.*— Докл. АН СССР, 1976, 229, № 4, с. 820.
32. *Островский Л. А.*— *Океанология*, 1978, 18, № 2, с. 181.
33. *Одуло А. Б.*— *Океанология*, 1978, 18, № 1, с. 23.
34. *Островский Л. А.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, № 5—6, с. 661.
35. *Halpern D.*— *J. Marine Res.*, 1971, 29, p. 116.
36. *Thorpe S. A.*— *J. Fluid Mech.*, 1974, 63, p. 509.
37. *Коняев К. В., Сабинин К. Д.*— Докл. АН СССР, 1973, 209, № 1, с. 86.
38. *Ермаков С. А., Пелиновский Е. Н.*— Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1975, 11, № 10, с. 1055.
39. *Коняев К. В.*— Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1975, 11, № 3, с. 285.
40. *Пелиновский Е. Н., Раевский М., Шаврацкий С. Х.*— Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1977, 12, № 1, с. 325.
41. *Пелиновский Е. Н., Шаврацкий С. Х.*— Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1976, 12, № 1, с. 76; 1977, 13, № 6, с. 669.
42. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
43. *Оно Н.*— *J. Phys. Soc. Japan*, 1975, 39, N 4, p. 1082.
44. *Gargett A. E.*— *Deep-Sea Res.*, 1976, 23, N 3.
45. *Левиков С. П.*— *Океанология*, 1976, 16, № 6, с. 968.
46. *Benjamin T. B.*— *J. Fluid Mech.*, 1967, 29, p. 559.
47. *Davis R. E., Acrivos A.*— *J. Fluid Mech.*, 1967, 29, p. 593.
48. *Филлипс О.* Динамика верхнего слоя океана. М., «Мир», 1969.
49. *Воронович А. Г.*— *Океанология*, 1975, 15, № 5, с. 773.
50. *Ермаков С. А., Пелиновский Е. Н.*— Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1976, 12, № 3, с. 312.
51. *Desabubies Y. J. F.*— *J. Geophys. Res.*, 1975, 80, N 6, p. 895.
52. *Монин А. С.*— Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1977, 13, № 11, с. 1159.
53. *Самодуров А. С.*— В кн.: Исследование изменчивости гидрофизических полей в океане. М., «Наука», 1974, с. 99.
54. *Коротаев Г. К., Пантелеев Н. А.*— *Океанология*, 1977, 17, № 6, с. 941.
55. *Apel J. R., Byrne H. M., Proni J. R., Chamell R. L.*— *J. Geophys. Res.*, 1975, 80, N 6, p. 865.
56. *Лонге-Хиггинс М. С., Гилл А. Э.*— В кн.: Нелинейная теория распространения волн. М., «Мир», 1970, с. 161.
57. *Maxworthy T., Redekopp L. G.*— *Nature*, 1976, 260, p. 509.
58. *Clarke R. A.*— *Geophys. Fluid Dynamics*, 1971, 2, p. 343.
59. *Одуло А. Б., Пелиновский Е. Н.*— *Океанология*, 1978, 18, № 1, с. 61.
60. *Ларичев В. Д., Резник Г. М.*— *Океанология*, 1976, 16, № 2, с. 200.
61. *Ларичев В. Д., Резник Г. М.*— Докл. АН СССР, 1976, 231, № 5, с. 1077.
62. *Pelinovsky E. N.*— *Polymode News*, 1978, 43, № 2, p. 192.
63. *Müller P., Olbers D. J.*— *J. Geophys. Res.*, 1975, 80, N 27, p. 3848.
64. *Thorpe S. A.*— *J. Geophys. Res.*, 1975, 80, N 3, p. 319.

# ОПТИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ЗВУКА В ЖИДКОСТИ

К. А. НАУГОЛЬНЫХ

Воздействие интенсивного оптического излучения на вещество вызывает сильное возмущение среды, сопровождающееся излучением звука. Механизмы этого эффекта различны и зависят прежде всего от величины объемной плотности энергии, выделившейся в веществе, и режима ее выделения.

Объемная плотность энергии в возмущенной области среды, подверженной действию лазерного излучения, может изменяться в очень широких пределах, достигая даже в простых устройствах, использующих эффект фокусировки лазерного луча, величин  $10^8 - 10^9$  Дж/см<sup>3</sup>.

Для сравнения отметим, что в канале импульсных электрических разрядов в жидкости плотность энергии достигает  $10^2 - 10^3$ , а при взрывах ВВ — примерно  $10^4$  Дж/см<sup>3</sup>.

Режимы выделения энергии также могут быть разными, отличаясь как временными зависимостями, определяющими темп выделения энергии, так и ее распределением в пространстве, зависящим, в частности, от длины пробега света в среде и геометрии лазерного луча. Некоторое представление об энергетических и временных характеристиках излучения современных серийных ОКГ дает таблица [1].

| Рабочее вещество       | $E$ , Дж           | $W_{\text{пик.}}$ , Вт | $W_{\text{н.}}$ , Вт | $\lambda$ , мкм | $f$       | $\phi$ , мрад | КПД, % |
|------------------------|--------------------|------------------------|----------------------|-----------------|-----------|---------------|--------|
| Рубин                  | $(1-5) \cdot 10^3$ | До $10^{11}$           | 1                    | 0,6943          | 60        | 1-10          | 0,7    |
| Стекло                 | $(1-5) \cdot 10^3$ | до $10^{11}$           | —                    | 1,06            | 1-10      | 0,5-10        | 6      |
| Иттрий-алюминий-гранат | 0,01-1             | до $10^5$              | 1-250                | 1,06            | до $10^4$ | 2-20          | 2-3    |
| СО <sub>2</sub>        | 0,1-5              | $10^5$                 | 10,6                 | до $10^2$       |           | 30            |        |

В таблице приведены рабочее вещество ОКГ, энергия лазерного импульса  $E$ , пиковая мощность оптического излучения в импульсном режиме  $W_{\text{пик.}}$ , мощность в непрерывном режиме работы лазера  $W_{\text{н.}}$ , длина волны оптического излучения  $\lambda$ , частота повторения оптических импульсов  $f$ , угловая расходимость луча  $\phi$ , КПД лазера.

Видно, что можно выделить три группы лазеров: непрерывно действующие лазеры (излучение которых может быть модулировано), импульсные лазеры, излучающие длинные импульсы (около  $10^{-3}$  с) с энергией в импульсе до  $10^3 - 10^5$  Дж, импульсные лазеры, излучающие короткие импульсы длительностью  $10^{-8}$  с энергией в импульсе 0,1-1 Дж. Различие временных и энергетических характеристик лазеров приводит к большому разно-

образию эффектов оптической генерации звука. Среди них можно выделить: 1) тепловое расширение, 2) взрывное вскипание, 3) поверхностное испарение, 4) электрострикцию, 5) оптический пробой. При умеренных плотностях энергии генерация звука в поглощающих средах в основном обусловлена тепловым механизмом. Этот механизм и будет рассматриваться в настоящей статье.

Пусть луч падает на границу поглощающего вещества из прозрачной среды. Поглощаясь в приповерхностном слое, он вызывает расширение нагретой области, приводящее к излучению звука. При этом каждый элемент объема нагретой области становится источником звука, а всю возмущенную поглощением оптического излучения область можно рассматривать как некую объемную антенну (иногда называемую термоакустической).

Процесс излучения звука объемной термоакустической антенной описывается математически решением краевой задачи для неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 p = - \frac{\beta}{C_p} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

с соответствующими граничными и начальными условиями [2—6]. Здесь  $p$  — избыточное давление,  $c$  — скорость звука,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $C_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $Q$  — плотность выделившейся в среде энергии; правая часть уравнения описывает объемные источники звука.

Рассмотрим сначала генерацию звука в импульсном режиме оптического излучения. С акустической точки зрения характер этого процесса зависит от формы области и соотношения ее размеров  $l$  с длиной пробега звука за характерное время выделения энергии  $\theta$ , определяемое длительностью лазерного импульса.

Можно выделить два простейших случая: 1)  $c\theta \ll l$ , 2)  $c\theta \gg l$ .

В первом случае в процессе выделения энергии область поглощения не успевает расшириться, выделившаяся энергия остается локализованной в ней, в результате чего возникают избыточные напряжения, вызывающие затем излучение звуковой волны. Во втором случае расширение области происходит в квазистационарном режиме в течение всего времени выделения энергии. С математической точки зрения можно сказать, что первый случай соответствует излучению звука в условиях начальной, а второй — граничной задачи [7]. Качественное различие двух режимов приводит к различию в их количественных характеристиках.

Пусть термоакустическая антенна образуется лазерными лучами, радиус которого  $a$  велик по сравнению с длиной пробега света в поглощающей среде,  $a \gg l$ , так что задача сводится к определению излучения плоского слоя толщины  $l$ .

Рассмотрим сначала генерацию звука короткими лазерными импульсами, характеризуемыми соотношением  $c\theta \ll l \ll a$ . В ре-



в результате выделения энергии  $\Delta E = \int I dt$  в элементе приповерхностного слоя единичного поперечного сечения и толщины  $l$  он нагревается на величину

$$\Delta T = \Delta E / \rho C_V l, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность среды,  $C_V$  — ее удельная теплоемкость.

Быстрое нагревание приводит к повышению давления на величину

$$p = \beta_p \Delta T, \quad (2)$$

где  $\beta_p = \frac{1}{p} \frac{dp}{dT}$  — термический коэффициент давления, связанный с коэффициентом теплового расширения  $\beta$  простым соотношением

$$\beta_p = \rho c^2 \beta. \quad (3)$$

Подставляя в формулу (2) выражения (1) и (3), найдем величину избыточного давления

$$p = \Delta E \beta c^2 / C_V l = E \beta c^2 / C_V S l, \quad (4)$$

где  $E = S \int I dt$  — полная энергия, выделившаяся в среде в результате поглощения оптического импульса  $S = \pi a^2$ .

Возникновение избыточного давления (рис. 1, а) в плоском слое приводит к излучению плоских волн сжатия амплитуды

$$p_H = p/2, \quad (5)$$

бегущих вперед и назад от возмущенного слоя, в соответствии с решением одномерной начальной задачи (рис. 1, б). Наличие границы приводит к отражению бегущего назад импульса, причем в случае свободной границы меняется фаза отраженного сигнала (рис. 1, в).

Подчеркнем, что в данном случае коротких оптических импульсов амплитуда давления акустического сигнала зависит лишь от полной энергии оптического импульса и нечувствительна к его форме.

Рассмотрим теперь случай длинных оптических импульсов, характеризуемых соотношением  $c\theta \gg l$ , которое означает, что

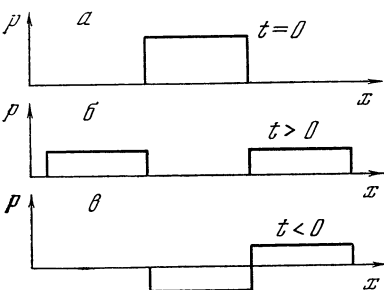


Рис. 1

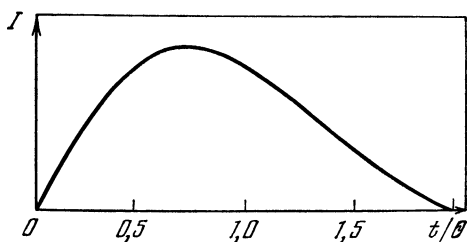


Рис. 2

толщина слоя выделения энергии мала по сравнению с длиной пробега звука за время выделения энергии, так что он успевает разгрузаться. Это обстоятельство позволяет описать процесс генерации звука длинными оптическими импульсами в квазистационарном приближении, т. е. при условии, что слой успевает расширяться в процессе выделения энергии в нем. Скорость расширения слоя определяется соотношениями (для акустически жесткой границы)

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{1}{S} \frac{dV}{dt}, \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\beta}{\rho C_p} \frac{dE}{dt} = \frac{\beta IS}{\rho C_p}. \quad (6)$$

Здесь

$$I = \frac{1}{S} \frac{dE}{dt}.$$

Расширение слоя вызывает излучение плоской звуковой волны, давление в которой определяется решением граничной задачи и равно  $p = \rho cv$ ,  $\rho$ ,  $c$  — плотность среды и скорость звука в ней. Подставляя сюда выражение для  $v$  из формулы (6), найдем

$$p = \frac{\beta c}{C_p} I(t). \quad (7)$$

Как видно, в этом случае форма акустического сигнала в точности повторяет профиль огибающей интенсивности оптического импульса. Используя обычную аппроксимацию для последней в виде

$$I(t) = I_0 \frac{t}{\theta} e^{-t/\theta} \left(2 - \frac{t}{\theta}\right) \quad (0 \leq t \leq 2\theta),$$

получим, что акустический сигнал будет иметь форму, изображенную на рис. 2;  $I_0$  — средняя интенсивность оптического импульса, определяемая из условия нормировки

$$\int_0^{2\theta} I dt = I_0 2\theta = E/S.$$

С учетом этого выражения и формулы (7) можно получить следующее выражение для характерной амплитуды давления:

$$p_r = E\beta c/C_p S\theta.$$

Сопоставим два режима, соответствующих генерации звука в условиях начальной (короткие оптические импульсы) и граничной (длинные оптические импульсы) задачи.

Из формул (4) и (5) получаем  $p_n/p_r = c\theta_n/l \gg 1$  при условии равенства энергий длинного и короткого оптического импульсов. Если же одинаковы интенсивности оптических сигналов, то  $p_n/p_r = c\theta_n/l \ll 1$ .

Сопоставим энергетические характеристики. Отношение энергии акустического излучения к энергии оптического импульса для начальной и граничной задач определяется формулами

$$\frac{W_H}{E} = \left(\frac{\beta c}{C_V}\right)^2 \frac{E}{\rho S l}, \quad \frac{W_r}{E} = \left(\frac{\beta c}{C_p}\right)^2 \frac{E}{\rho S c \theta}.$$

Видно, что эти величины определяются термодинамическими коэффициентами среды и плотностью выделившейся энергии. Последняя меньше в случае граничной задачи, когда возмущенная в процессе выделения энергии область велика, соответственно меньшим оказывается коэффициент трансформации энергии.

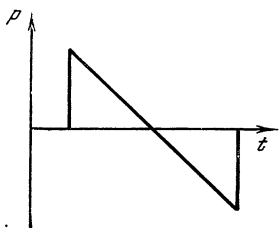


Рис. 3

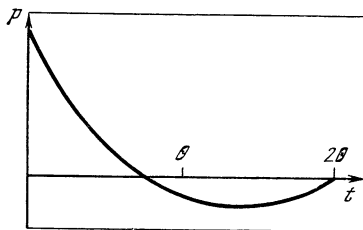


Рис. 4

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда область поглощения оптического импульса, образующую термоакустическую антенну, можно приближенно рассматривать как сферу радиуса  $a$ . Если длительность оптического импульса мала ( $c\theta \ll a$ ), то в результате выделения энергии в сферической области возникает избыточное давление

$$p = \rho c^2 \beta E / \rho C_V V, \quad V = 4/3 \pi a^3,$$

что приводит затем к излучению акустической  $N$ -волны [8]

$$p = \frac{p_H}{2} \frac{a}{r} f(\bar{t}) = \frac{E \beta c^2}{C_V V} \frac{a}{r} f(\bar{t});$$

$$f(\bar{t}) = \begin{cases} 1 - \bar{t}/\tau & (0 \leq \bar{t} \leq 2\tau), \\ 0 & (\bar{t} > 2\tau), \end{cases}$$

где  $\bar{t} = t - r/c$ ,  $\tau = a/c$ ,  $r$  — расстояние до точки наблюдения. Форма волны изображена на рис. 3. При этом внутри сферы бежит сходящаяся волна разряжения. Как и в случае плоской задачи, форма волны не зависит от режима выделения энергии.

В случае длинных оптических импульсов ( $c\theta \gg a$ ) область выделения энергии расширяется в процессе поглощения оптического импульса, излучая звуковую волну, давление в которой определяется изменением объемной скорости [8]:  $p = \rho \dot{V} / 4\pi r$ .

Принимая во внимание, что  $\dot{V} = \beta IS / \rho C_p$ , получим

$$P = \frac{\beta S}{4\pi C_p r} \frac{dI}{dt}.$$

Таким образом, в случае сферической области форма акустического сигнала не повторяет огибающую оптического импульса, а определяется ее производной по времени (рис. 4).

Энергетические характеристики для случая сферической термоакустической антенны выражаются формулами

$$\frac{W_H}{E} \simeq \left(\frac{\beta c}{C_V}\right)^2 \frac{E}{\rho V} \quad (c\theta \ll a), \quad \frac{W_r}{E} \simeq \left(\frac{\beta c}{C_p}\right)^2 \frac{E}{\rho a^2 c\theta} \quad (c\theta \gg a).$$

Полученные результаты могут быть использованы при расчете и наглядной интерпретации более сложных случаев.

Пусть, например, длина пробега света значительно больше радиуса лазерного луча ( $l \gg a$ ), так что термоакустическая антенна имеет форму цилиндра (рис. 5). Расчет акустического излучения такой антенны легко произвести в предельных случаях толстого ( $a \gg c\theta$ ) и тонкого ( $a \ll c\theta$ ) цилиндров или соответственно коротких и длинных лазерных импульсов, если рассматривать каждый элемент объема цилиндра как элементарный источник звукового сигнала [9, 10].

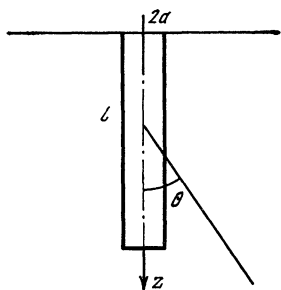


Рис. 5

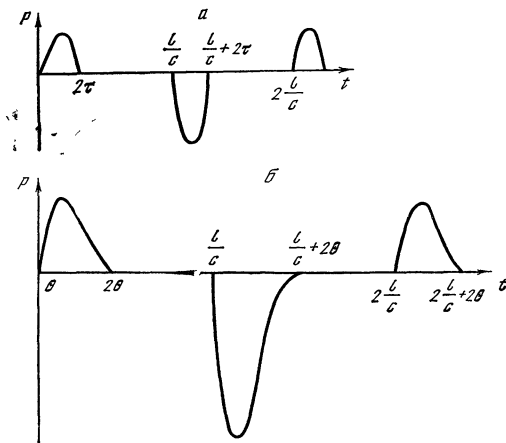


Рис. 6

Расчет показывает, что сигнал в поперечном направлении получается интегрированием элементарных импульсов по амплитуде, а в продольном — по времени. Поэтому форма акустического импульса, излучаемого в поперечном направлении, повторяет форму элементарного сигнала, изображенного на рис. 3 и 4 соответственно для случая коротких ( $\theta \ll a/c$ ) и длинных ( $\theta \gg a/c$ ) лазерных импульсов.

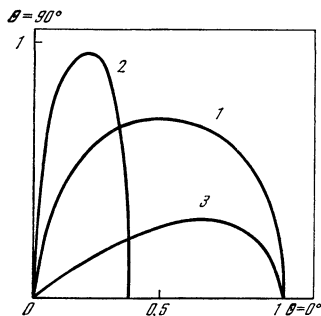


Рис. 7

Форма сигнала в продольном направлении зависит от величины коэффициента поглощения света, точнее, от соотношения длины пробега света с длиной элементарного акустического импульса. Для простейшего случая, когда плотность выделившейся энергии можно принять одинаковой по длине цилиндра, формы сигналов, излучаемых вдоль луча, изображены на рис. 6 соответственно для случая коротких (а) и длинных (б) лазерных импульсов.

При воздействии на вещество непрерывного, модулированного по интенсивности оптического излучения происходит генерация звука на частоте модуляции. При этом поглощающая свет область играет роль объемной антенны длины  $l = \alpha^{-1}$  с апертурой, определяемой радиусом светового луча  $a$ . При нормальном падении светового луча на свободную границу жидкости акустическое поле в дальней зоне определяется выражением [5]

$$p = \frac{\beta I S \omega}{4\pi C_p r} F(\theta),$$

где  $I$  — интенсивность света,  $\omega$  — частота модуляции,  $S = \pi a^2$ ,  $r$  — расстояние до точки наблюдения, функция  $F(\theta)$  описывает направленность излучения

$$F(\theta) = \frac{2kl \cos \theta}{1 + (kl)^2 \cos^2 \theta} \left| \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right|.$$

При  $ka \ll 1$  и  $kl \ll 1$  излучение не направлено (рис. 7, кривая 1), с увеличением длины антенны появляется направленность в поперечном к ее оси направлении (рис. 7, кривая 2), с увеличением поперечного размера — в продольном (рис. 7, кривая 3).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рэди Дж. Действие мощного лазерного излучения. М., «Мир», 1974.
2. Бункин Ф. В., Комиссаров Н. К. — Акуст. журн., 1973, 19, № 3, с. 305.
3. Westervelt P. I., Larson R. S. — J. Astron. Soc. America, 1973, 54, N 1, p. 121.
4. Божков А. И., Бункин Ф. В. — Квант. электроника, 1975, 2, № 8, с. 1763.
5. Козяев Е. Ф., Наугольных К. А. — Акуст. журн., 1976, 22, № 3, с. 366.
6. Лямшев Л. М. — Акуст. журн., 1977, 23, № 1, с. 169.
7. Лямшев Л. М., Наугольных К. А. — Акуст. журн., 1976, 22, № 4, с. 625.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
9. Городецкий В. С., Еггев С. В., Есипов И. Б., Наугольных К. А. — Квант. электроника, 1976, 3, с. 71.
10. Еггев С. В., Лямшев Л. М., Наугольных К. А. — Акуст. журн., 1978, 24, N 3, с. 372.

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОМ ОКЕАНЕ

Е. Н. ПЕЛИНОВСКИЙ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании океанических процессов практически любого масштаба (от  $10^{-5}$  с для звуковых волн до сотен и тысяч лет для климатических процессов) неизбежно приходится учитывать пространственно-временную изменчивость Мирового океана [1]. Наиболее впечатляющим примером такой изменчивости является ветровое волнение на поверхности океана, когда за несколько часов полный штиль может смениться ураганным штормом. Ветровое волнение, перемешивая воду в приповерхностном слое, приводит к его турбулизации. Случайными являются параметры океана и на больших глубинах — так называемая тонкая структура полей плотности и течения [2]. Дно океанов и морей также нельзя считать ровным [3]. Более того, случайность параметров океана создают сами волны, даже если при этом не происходит необратимое перемешивание жидкости. Так, например, температурные флуктуации, связанные с прохождением внутренних волн, изменяют скорость звука в океане, что приводит к нестационарности звуковых полей и искажению трассы (лучей) распространения звука.

Изменчивость параметров Мирового океана приводит к рассеянию энергии волн, распространяющихся в океане, и вычисление декрементов поглощения волны представляет несомненный теоретический и прикладной интерес. Очевидны, однако, и возникающие здесь трудности. Обзор существующих методов в теории распространения линейных волн в случайно неоднородной среде дан в [4—9]. Здесь дается интерпретация некоторых из этих методов на языке нелинейной теории колебаний и волн, которая, на наш взгляд, позволяет связать теорию линейных волн в случайных средах с «классическими» нелинейными теориями взаимодействия волн с волнами и резонансными частицами, уже обсуждавшимися на горьковских школах [10].

Применение соответствующих аналогий позволяет предложить систему «тестов», необходимых в большой степени именно для волн в океане из-за громоздкости уравнений, их описывающих. В результате удастся сравнительно быстро и экономно решать действительно трудоемкие задачи динамики океана. При этом мы ограничимся пока рассмотрением только средних полей (когерентных волн) в статистически неоднородном океане, поскольку именно здесь достигнута наибольшая ясность в методическом отношении. Применительно к проблемам турбулентности океана пока имеются лишь отдельные гипотезы, о которых также говорилось ранее [10].

## 2. «КЛАССИЧЕСКИЙ» МЕТОД СРЕДНЕГО ПОЛЯ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВОЛН

Рассмотрим сначала наиболее распространенную схему получения замкнутых уравнений для волны, распространяющейся в случайно неоднородной среде [4, 5]. Для этого запишем исходное уравнение в виде

$$\hat{L}u = \varepsilon \hat{M}u, \quad (1)$$

где  $\hat{L}$  и  $\hat{M}$  — детерминированные линейные интегродифференциальные операторы,  $u$  — вектор функций, описывающих волновое поле, и  $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  — вектор случайных функций с заданной статистикой. Отметим, что, как правило, статистика  $\varepsilon$  нам с достоверностью не известна и ее нахождение является чрезвычайно трудной задачей, поскольку обычно не известны уравнения, ее определяющие. Например, распространение поверхностной волны в океане со случайной топографией можно изучать на основе уравнений идеальной или вязкой гидродинамики, в то время как для исследования природы возникновения случайной топографии нам понадобится знание геологических процессов, происходящих под дном океана, и механизмов формирования дна.

Вообще говоря, в формировании осадков на дне океана принимают участие и волны, в том числе и те, которые мы собираемся исследовать. В результате задача определения  $u$  и  $\varepsilon$  должна ставиться как самосогласованная (нелинейная). Однако чаще всего (но не всегда!) пространственно-временные масштабы полей  $u$  и  $\varepsilon$  различны, так что можно считать, что  $\varepsilon$  заметно не успевает измениться при распространении волны (приближение заданных неоднородностей). Это обстоятельство позволяет использовать эмпирические данные о статистике неоднородностей и исследовать распространение волн с учетом реальных условий в океане (гидрологии, топографии, метеоусловий) без знания механизмов формирования таких неоднородностей.

С учетом сказанного выберем  $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  так, что

$$\langle \varepsilon \rangle = 0, \quad (2)$$

где  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по ансамблю реализаций. Представим волновое поле в виде среднего  $\langle u \rangle$  и рассеянного  $u'$  полей:

$$u = \langle u \rangle + u', \quad \langle u' \rangle = 0. \quad (3)$$

Подставим (3) в (1) и усредним (1) по ансамблю неоднородностей:

$$\hat{L}\langle u \rangle = \langle \varepsilon \hat{M}u' \rangle. \quad (4)$$

Это уравнение является незамкнутым. Другое уравнение получим, вычитая (4) из (1):

$$\hat{L}u' = \varepsilon \hat{M}\langle u \rangle + [\varepsilon \hat{M}u' - \langle \varepsilon \hat{M}u' \rangle]. \quad (5)$$

Получить решения уравнений (4) и (5), вообще говоря, не удастся, поскольку они содержат случайный коэффициент  $\varepsilon$ .

Целью метода среднего поля является получение уравнений, в которые входили бы уже детерминированные функции (например, функции корреляции  $\varepsilon$ ). Эта процедура обычно получается с помощью приближенных методов. Например, часто можно считать  $\langle \varepsilon^2 \rangle$  малым параметром. В этом случае рассеянное поле пропорционально  $\varepsilon$ , и в первом приближении квадратную скобку в (5) можно опустить. Тогда уравнение (5) решается в квадратурах

$$u' = \hat{L}^{-1} \varepsilon \hat{M} \langle u \rangle. \quad (6)$$

(Мы не останавливаемся пока на технических трудностях получения  $\hat{L}^{-1}$  (функции Грина) в задачах динамики океана.)

Если в качестве  $\langle u \rangle$  выбрать невозмущенное решение уравнения (1) при  $\varepsilon = 0$ , то с помощью (6) легко получаются все характеристики рассеянного поля, и это приближение получило название приближения Борна, или приближения однократного рассеяния [6]. Как правило, такой подход справедлив при малой величине неоднородностей и малом объеме, занимаемом неоднородностями (точные условия его применимости приведены в [4, 6]), при этом  $u'$  остается малым по сравнению с  $\langle u \rangle$ . Можно, однако, попытаться получить решение исходного уравнения, пригодное для больших рассеивающих объемов. Для этого нужно, так же как это делается в асимптотических методах в теории колебаний и волн, считать поле  $\langle u \rangle$  незадаанным и распорядиться им так, чтобы  $u'$  оставалась ограниченной на достаточно больших расстояниях.

Искомое уравнение для  $\langle u \rangle$  нами уже написано [формула (4)], и задача сводится, по существу, к вычислению с той или иной степенью точности функции  $u'$  через  $\langle u \rangle$ , чтобы уравнение (4) оказалось замкнутым. В первом приближении естественно связать  $u'$  с  $\langle u \rangle$  формулой (6) (но не считая  $\langle u \rangle$  заданной функцией), тогда уравнение для среднего поля принимает вид

$$\hat{L} \langle u \rangle = \langle \varepsilon \hat{M} \hat{L}^{-1} \varepsilon \hat{M} \rangle \langle u \rangle \equiv \hat{N} \langle u \rangle. \quad (7)$$

В этом и состоит вся идея «классического» метода среднего поля, а само приближение называется приближением Бурре [11]. В результате получено уравнение с детерминированными коэффициентами, и его решение можно получить с помощью регулярных методов.

В настоящее время имеется большое число работ, посвященных исследованию средних полей на основе (7), особенно для электромагнитных волн (см., например, обзоры [4, 5]). Применительно к волнам в океане этот метод используется значительно слабее, что связано главным образом с громоздкостью уравнений гидродинамики из-за стратификации вод океана. Последняя приводит к возникновению сложной многомодовой структуры волнового поля. Ряд задач все же были решены таким методом, в частности



распространение длинных поверхностных волн в океане со случай- ной топографией [12], внутренних волн в безграничном океане со случайными флуктуациями частоты Вьяйсяля около среднего (по- стоянного) значения [13, 14], волн Россби при случайных измене- ниях глубины и течений [15, 16] и некоторые другие. Правда, во всех рассмотренных примерах оператор  $\hat{L}$  не содержал перемен- ных коэффициентов, так что с математической точки зрения эти задачи полностью эквивалентны электромагнитным.

Главной трудностью в применении метода среднего поля яв- ляется нахождение функции Грина уравнения (1) при  $\varepsilon = 0$ , что точно может быть сделано лишь в исключительных случаях. Между тем, как будет ясно из дальнейшего, нам нужна сравнитель- но малая информация о функции Грина (например, ее полюса и т. п.), так что нет необходимости в точном ее вычислении. Это позволит сократить расчетную часть работы (которая пока, к со- жалению, занимает слишком много места в публикуемых работах) и выяснить физические закономерности процесса рассеяния волны более экономным путем, что удобно для проведения конкретных оценок.

### §3. «СПЕКТРАЛЬНЫЙ» МЕТОД РАСЧЕТА СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Очевидно, что задача о рассеянии волны на неоднородностях есть частный случай нелинейной задачи о взаимодействии волн (одна из которых принимается случайной и заданной). Такие за- дачи, как правило, решаются спектральным методом, т. е. отыски- ваются не сами поля, а их пространственно-временные фурье- спектры. Поэтому естественно применить спектральный метод к исследованию средних полей в случайных средах (по-видимому, впервые для океана эта техника начала использоваться в [17, 18]). Для этого необходимо разложить поле  $u(\mathbf{r}, t)$  по собственным мо- дам линейной задачи

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_{m, \sigma} \int d\mathbf{k} a_{\sigma\mathbf{k}}^m \exp [i\sigma(\omega_{\mathbf{k}}^m t - \mathbf{k}\mathbf{r})], \quad (8)$$

где  $\omega_{\mathbf{k}}^m = \omega_m(\mathbf{k})$  — дисперсионное соотношение  $m$ -й собственной волны,  $\sigma = \pm 1$ ,  $a_{\sigma\mathbf{k}}^m$  — спектральная амплитуда волны, причем  $a_{-\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^*$ .

Очевидно, что также можно разложить не только волновые пе- ременные, но и заданные внешние поля, например турбулентные течения, случайную топографию и т. п. Для этих полей тоже вы- полняются определенные дисперсионные соотношения. Так, для неподвижных неоднородностей  $\omega = 0$ ; неоднородности, движущие- ся со скоростью  $v$ , описываются дисперсионным соотношением  $\omega = \mathbf{k}v$ . Будем поэтому считать, что вектор  $u$  включает как вол- новые переменные, так и внешние поля. Но тогда уравнение (1) автоматически превращается в нелинейное уравнение, и к нему

могут быть применены уже известные методы теории нелинейных колебаний и волн. В частности, амплитуду  $a_k$  необходимо считать функцией времени и рассматривать (8) как замену переменных.

Подставляя (8) в исходную систему уравнений и применяя обратное фурье-преобразование, нетрудно получить уравнение для спектральной амплитуды в привычной для нелинейной теории волн форме:

$$\frac{da_0}{dt} \approx \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ \sigma_1, \sigma_2}} \int dk_1 dk_2 V_{0,1,2}^{0,1,2} a_1 a_2 \exp[i\Delta_{0,1,2}(t)] \delta(\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2 - \sigma k) + \dots, \quad (9)$$

где  $a_i = a_{\sigma_i k_i}^{m_i}$ ,  $V_{0,1,2}^{0,1,2}$  — матричные коэффициенты взаимодействия и  $\Delta_{0,1,2} = \sigma_1 \omega_1 + \sigma_2 \omega_2 - \sigma \omega$  — расстройка взаимодействующих волн по частоте.

Подчеркнем, что переход к (9) не связан с какими-либо приближениями и количество слагаемых в правой части (9) определяется только степенью нелинейности исходных уравнений, в частности, при квадратичной нелинейности в (9) остается только одно слагаемое. Отметим еще, что хотя мы записали разложение поля только в виде (8), т. е. без учета модовой структуры, связанной, например, со стратификацией океана или наличием его границ, уравнение (9) остается в силе и в этом случае, модовая структура сказывается лишь на виде матричных коэффициентов. Вообще специфика океанических задач здесь проявляется только через матричные коэффициенты, последние уже вычислены для многих типов волн [17, 19—23].

Итак, уравнения (9) в единой форме описывают взаимодействия волн как друг с другом, так и с внешними полями. Рассмотрим теперь ситуацию, когда наряду с шумом (турбулентностью, неоднородностью или случайными волнами) задана регулярная волновая компонента. Определение условий, при которых часть полей можно считать заданными, требует проведения самостоятельных исследований и не всегда является однозначным. Если же такое разделение удалось сделать, то дальнейшая процедура получения уравнений для среднего поля совпадает с приведенной в разделе 2. Для этого необходимо представить решение в виде

$$a_i = b_i + c_i, \quad (10)$$

где  $b_i$  — амплитуда волны, а  $c_i$  — заданная спектральная амплитуда шума, причем будем считать, что  $\langle c_i \rangle = 0$ . Тогда, подставляя (10) в (9), в линейном приближении по амплитуде волны получаем следующее интегродифференциальное уравнение для  $b_i$ :

$$\frac{db}{dt} = 2 \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ \sigma_1, \sigma_2}} \int dk_1 dk_2 V_{0,1,2}^{0,1,2} b_1 c_2 \exp(i\Delta_{0,1,2} t) \delta(\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2 - \sigma k).$$

Таким путем мы пришли к уравнению со случайными коэффициентами. Применим к нему «классическую» схему среднего поля, учитывая, что  $L^{-1}$  находится тривиально (это просто интеграл по времени). В результате находим замкнутое уравнение для среднего поля  $\langle b \rangle$  (подробности вычислений приведены в [24])

$$\frac{d \langle b \rangle}{dt} = 4 \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ \sigma_1, \sigma_2}} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\Omega d\tau V_{0,1,2}^{0,1,2} V_{1,-2,0}^{1,2,0} \Phi_{m_2}(\sigma_2 \mathbf{k}_2, \Omega) \delta(\sigma_1 \mathbf{k}_1 + \sigma_2 \mathbf{k}_2 - \sigma \mathbf{k}) \langle b(t - \tau) \rangle \exp[-i(\sigma\omega - \sigma_1\omega_1 - \Omega)\tau]. \quad (11)$$

При выводе (6) предположено, что внешний шум стационарен и однороден и введен пространственно-временной спектр шума

$$\langle c_1(t) c_2(t + \tau) \rangle = \frac{1}{4} \delta_{m_1 m_2} \delta(\sigma_1 \mathbf{k}_1 + \sigma_2 \mathbf{k}_2) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \Phi_{m_2}(\sigma_2 \mathbf{k}_2, \Omega) \exp[i(\sigma_1\omega_1 - \Omega)\tau].$$

Как видно из (11), система уравнений распалась на независимые уравнения, количество которых определяется числом когерентных волновых компонент. Каждое из уравнений допускает решение в виде  $\langle b \rangle \sim e^{\gamma t}$ , где  $\gamma$  в общем случае — комплексная постоянная, подлежащая определению. Найти ее удастся сравнительно просто лишь при слабом взаимодействии с внешними полями (малое затухание волны), когда величиной  $\gamma$  можно пренебречь в показателе экспоненты в (11) по сравнению с частотами. Тогда для  $\gamma$  получаем явное выражение

$$\gamma = 4 \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ \sigma_1, \sigma_2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 V_{0,1,2}^{0,1,2} V_{1,-2,0}^{1,2,0} \Phi_{m_2}(\sigma_2 \mathbf{k}_2, \Omega) \delta(\sigma_1 \mathbf{k}_1 + \sigma_2 \mathbf{k}_2 - \sigma \mathbf{k}) \int \exp[-i(\sigma\omega - \sigma_1\omega_1 - \Omega)\tau] d\tau. \quad (12)$$

Реальная часть выражения (12) описывает затухание или усиление среднего поля при взаимодействии с внешними полями. Мнимая часть приводит к изменению скорости распространения (частоты) волны. Обе эти величины могут быть зарегистрированы экспериментально. Наиболее интересно вычисление  $\text{Re } \gamma$ , так как она определяет энергетику взаимодействия волны с внешними полями. Чтобы ее найти, необходимо определить знак матричных коэффициентов. Для важного класса консервативных систем (не только при  $\varepsilon = 0$ , но и при  $\varepsilon = \text{const}$ ) произведение матричных коэффициентов всегда действительно [25], поэтому для вычисления  $\text{Re } \gamma$  необходимо воспользоваться известным равенством

$$\text{Re} \int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau = \pi \delta(\omega).$$

Кроме того, выражение для  $\text{Re } \gamma$  значительно упрощается, если шум имеет волновую природу или турбулентность является «замороженной». Тогда можно ввести дисперсионное соотношение для шума и представить спектр в виде

$$\Phi(\mathbf{k}, \Omega) = \Phi(\mathbf{k}) \delta(\Omega - \omega_{\mathbf{k}}).$$

Наконец, если в качестве спектральных амплитуд выбрать нормальные переменные, т. е. удовлетворяющие следующей нормировке для плотности энергии:

$$E_{\mathbf{k}}^m = \omega_{\mathbf{k}}^m |a_{\sigma \mathbf{k}}^m|^2,$$

то можно воспользоваться условиями симметрии матричных коэффициентов [25]

$$V_{0,1,2} = -V_{1,-2,0} \sigma \sigma_1 = -V_{2,-1,0} \sigma \sigma_2.$$

В результате выражение (12) удается записать в наиболее компактном виде (при этом исправлена ошибка в численном коэффициенте, содержащаяся в [24]),

$$\begin{aligned} \mu = \text{Re } \gamma = 4\pi \sum_{m_1, m_2} \int d\mathbf{k}_1 \{ & -|V_{0,1,0-1}^{0,1,2}|^2 \Phi_{m_2}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \times \\ & \times \delta(\omega - \omega_1 - \omega_{0-1}) - |V_{0,1,1-0}^{0,1,2}|^2 \Phi_{m_2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) \times \\ & \times \delta(\omega - \omega_1 + \omega_{1-0}) + |V_{0,-1,0+1}^{0,1,2}|^2 \Phi_{m_2}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) \times \\ & \times \delta(\omega + \omega_1 - \omega_{0,1}) \}. \end{aligned} \quad (13)$$

Эта важная формула имеет достаточно простой физический смысл и легко интерпретируется на языке нелинейных взаимодействий. Прежде всего отметим резонансный характер затухания среднего поля. К изменению амплитуды волны приводят только те спектральные компоненты шума (неоднородностей), частоты и волновые числа которых удовлетворяют условиям синхронизма

$$\omega_{\mathbf{k}} \pm \omega_{\mathbf{k}_1} \pm \omega_{\mathbf{k}_2} = 0, \quad \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 = 0. \quad (14)$$

В частности, если неоднородности неподвижны, то из (14) следует, что волна рассеивается в волны с той же частотой, а волновые числа рассеянных волн удовлетворяют известным условиям Брэгга [6—8]. Легко показать, что нерезонансные компоненты шума приводят к изменению частоты волны (ее скорости распространения), но на затухание влияют только резонансные компоненты. Здесь имеется полная аналогия с синхронным и несинхронным взаимодействием нелинейных волн [26].

Указанное обстоятельство практически не использовалось при расчетах среднего поля, что и приводило к их значительному усложнению. Между тем для вычисления  $\mu$  нам надо иметь сравнительно мало информации о характере неоднородностей и дисперсионных соотношений среды — только резонансные точки и спектральные плотности неоднородностей в этих точках. Поэтому вычисление  $\mu$  может быть упрощено [12,27]. В частности, если исходные уравнения весьма громоздки и дисперсионная характеристика

среды сложна — содержит несколько ветвей (нормальных волн), а резонанс имеет место лишь с частью из них, то остальные ветви при вычислении затухания могут не приниматься во внимание. Отбрасывая «лишние» нормальные волны, можно понизить порядок исходных уравнений. Более того, поскольку на дисперсионных кривых важны только резонансные точки, в нерезонансных областях кривые можно деформировать произвольным образом, упрощая тем самым уравнения для оставшихся волн.

Из (13) следует также важный вывод, что усиление среднего поля возможно (но не обязательно) только при условии, если шум более высокочастотен по сравнению с волной<sup>1</sup>. Физически это связано с распадом высокочастотного шума, передающего энергию основной волне. На квантовом языке это соответствует метастабильному состоянию шума (занимающего верхние уровни энергии, в то время как нижние свободные), и волна служит спусковым механизмом для перехода шума (его распада) на нижние уровни (как известно, распад невозможен, если нет «затравки» на низких частотах).

Это обстоятельство позволяет предсказать возможность усиления волны только из анализа дисперсионных соотношений без решения исходных уравнений. Однако усиление будет иметь место в действительности, только если процессы распада шума будут преобладать над процессами слияния волны и шума, описываемыми первыми двумя слагаемыми в (13). Поэтому усиление зависит от вида спектра шума и вероятности этих процессов (матричных коэффициентов) и реализуется в неравновесной ситуации (когда в шуме наиболее интенсивно представлены высокочастотные составляющие). В этом основное отличие от равновесной ситуации, когда волна может только затухать из-за взаимодействия с шумом. (Обсуждение этого вопроса см. также в [28].)

И, наконец, третий вывод: декремент затухания выражается через коэффициенты нелинейных взаимодействий. (По существу, классическая линейная теория распространения волн в случайных средах занималась получением именно матричных коэффициентов нелинейного взаимодействия!) В настоящее время эти коэффициенты вычислены для многих типов волн в океане, в частности для поверхностных и внутренних волн [17—23]. Спектры волнения (шумов) и неоднородностей также интенсивно исследуются как теоретически, так и экспериментально. В результате анализ распространения средних полей сводится к простому вычислению интегралов в (13).

Таким образом, спектральный подход позволяет выяснить все качественные особенности процессов распространения средних полей (роль дисперсионных соотношений, условия резонанса, возможности усиления) в довольно простой математической форме.

Рассмотрим несколько конкретных задач, играющих важную роль в динамике океана.

<sup>1</sup> По-видимому, впервые усиление среднего поля отмечалось в [13, 27a].

#### 4. РАССЕЙЯНИЕ ВОЛНЫ ЦУНАМИ В ОКЕАНЕ СО СЛУЧАЙНОЙ ТОПОГРАФИЕЙ

Рассмотрим сначала классическую задачу о рассеянии волны на неоднородностях, уже решенную при ряде ограничений в [12, 29]. Волны цунами — это длинные волны с периодами 10—30 мин (их длина 10—300 км, что значительно превосходит глубину океана), возникающие при подводных землетрясениях [30]. Характерные масштабы неровностей дна 0,1—10 км, т. е. сравнимы с глубиной океана (см. рис. 1, взятый из [30a]). Поэтому первый вопрос, который возникает при постановке задачи о рассеянии волны цунами на неоднородностях, сводится к следующему: можно ли использовать уравнения теории длинных волн, если очевидно, что рассеянное поле содержит компоненты с длинами порядка глубины океана, поскольку таков масштаб неоднородностей. Эти уравнения уже использовал Хоув [12], однако он принимал, что масштаб неровностей больше глубины океана. Ответ на наш вопрос легко следует из анализа условий синхронизма (14).

Поскольку случайной топографии можно «приписать» дисперсионное соотношение  $\omega = 0$ , то векторы падающей  $\mathbf{k}$  и рассеянной  $\mathbf{k}_1$  волн лежат внутри круга радиуса  $k$ , соответствующего постоянной частоте  $\omega$  (рис. 2). Отсюда следует, что в рассеянии принимают участие только спектральные компоненты неоднородности с  $k_2 < < 2k$ . Поэтому если падающая волна длинная, то для вычисления ее затухания нужно учитывать только длинные «волны» неоднородности, и, следовательно, исходные уравнения [1]

$$\Delta\varphi = 0;$$

$$\partial^2\varphi/\partial t^2 + g \partial\varphi/\partial z = 0 \quad (z = 0);$$

$$\partial\varphi/\partial z + \nabla\varphi\nabla h = 0 \quad (z = -h(\mathbf{r}))$$

( $\varphi$  — потенциал поля скорости,  $g$  — ускорение свободного падения,  $h$  — глубина океана) для любого масштаба неровностей можно заменить на значительно более простые уравнения длинных волн (уравнения мелкой воды) [1]

$$\partial\mathbf{u}/\partial t + g\nabla\eta = 0;$$

$$\partial\eta/\partial t + \operatorname{div}(h\mathbf{u}) = 0,$$

где  $\eta(\mathbf{r}, t)$  — возвышение водной поверхности,  $\mathbf{u}$  — горизонтальная скорость частиц жидкости на поверхности воды.

Таким образом, используя условия синхронизма, мы смогли «испортить» исходные уравнения в нужную нам сторону. Еще один ответ мы можем получить сразу, не решая задачу, — определить знак  $\mu$ , который, очевидно, оказывается отрицательным, так как частота неоднородностей ( $\omega = 0$ ) меньше частоты волны.

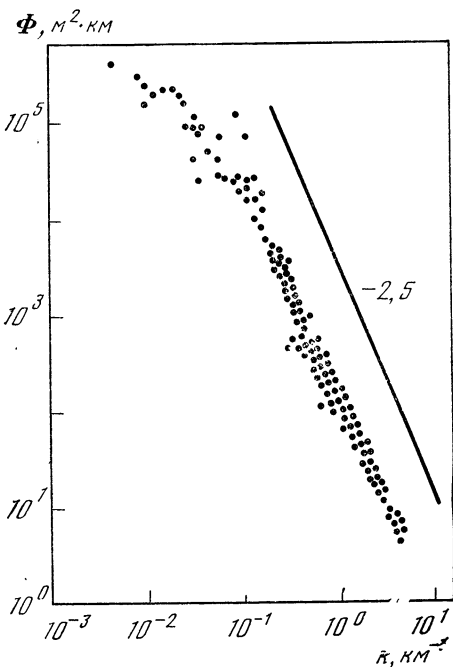


Рис. 1

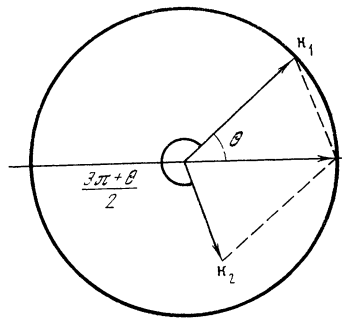


Рис. 2

Осталось найти матричный коэффициент и вычислить интеграл в (13). Представляя  $h = h_0 [1 + \varepsilon(\mathbf{r})]$ ,  $\langle \varepsilon \rangle = 0$  и переходя к спектральной амплитуде  $a$  (в качестве  $a$  взята амплитуда волны смещения), находим матричный коэффициент в виде

$$V_{0,1,2} = ig h_0 \sigma_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k} / 2\omega_k,$$

причем важно отметить, что уравнение (9) содержит только одно слагаемое (кубические и более высокого порядка взаимодействия отсутствуют). Один интеграл (по модулю  $k_1$ ) в (13) легко вычисляется из-за наличия дельта-функции ( $\omega = \sqrt{gh_0}k$ )

$$\mu = -\frac{\pi \sqrt{gh_0} k^3}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \Phi \left( 2k \sin \frac{\theta}{2}, \frac{3\pi + \theta}{2} \right) d\theta. \quad (15)$$

Рассмотрим сначала физически более наглядный случай одномерных неровностей глубины, так что линии изобат наклонены под углом  $\pi/2 - \alpha$  к направлению распространения волны. В этом случае двумерный спектр  $\Phi(k_2)$  имеет вид (подробности см. в [31])

$$\Phi(\mathbf{k}_2) = F \left[ 2k \sin \frac{\theta}{2} \sin \left( \frac{\theta}{2} - \alpha \right) \right] \delta \left[ 2k \sin \frac{\theta}{2} \cos \left( \frac{\theta}{2} - \alpha \right) \right],$$

где  $F$  — одномерный спектр неоднородностей. В результате

интеграл в (15) легко вычисляется

$$\mu = - \frac{\pi \sqrt{gh_0} k^2}{2} \frac{F(0) + F(2k \cos \alpha) \cos^2 2\alpha}{\cos \alpha}.$$

Обсудим сначала случай нормального падения волны ( $\alpha = 0$ ). При этом затухание определяется компонентами спектра на двух пространственных частотах  $k_2 = 0$  и  $k_2 = 2k$ , первая из которых соответствует рассеянию вперед, а вторая — назад. Если  $F(0) = F(2k) = 0$ , то затухание волны отсутствует, несмотря на неровности дна. Обычно считают, что  $F(k)$  — монотонно убывающая функция  $k$ . При этом можно различать два случая: спектр  $F$  достаточно широкий, что соответствует малой величине масштаба корреляции, и достаточно узкий (большая длина корреляции). О первом случае говорят как о рассеянии в среде с мелкомасштабными флуктуациями, а о втором — как о рассеянии в среде с крупномасштабными флуктуациями, хотя на рассеяние в обоих случаях влияют одни и те же пространственные частоты. Очевидно, что при одной и той же  $\langle \varepsilon^2 \rangle$  величина  $F(0)$  больше для крупномасштабных неоднородностей, чем для мелкомасштабных, так как интеграл от  $F(k)$  равен  $\langle \varepsilon^2 \rangle$ . Поэтому коэффициент поглощения волны на крупных неровностях дна значительно больше, чем на мелких, причем при крупномасштабных неровностях  $\mu$  определяется в основном рассеянием вперед, а при мелкомасштабных — рассеянием вперед и назад, и рассеяние в обе стороны происходит практически одинаково.

Наконец, еще одно важное свойство:  $\mu \sim k^2$ , так же как при затухании волны в вязкой среде<sup>2</sup>. Это означает, что можно ввести эффективную (турбулентную) вязкость

$$v_{\text{эфф}} = \frac{\pi \sqrt{gh_0}}{2} [F(0) + F(2k)] \simeq \frac{\pi}{2} \sqrt{gh_0} \langle \varepsilon^2 \rangle l$$

( $l$  — масштаб корреляции и  $l^{-1}$  — ширина спектра  $F(k)$ ), которая на много порядков превосходит молекулярную (для  $h \approx 1$  км,  $l \approx 1$  км,  $\sqrt{\langle \varepsilon^2 \rangle} \approx 10^{-2}$  имеем  $v_{\text{эфф}} \approx 10^5$  см<sup>2</sup>/с, в то время как молекулярная вязкость равна  $10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с). Поэтому роль рассеяния в поглощении энергии волны цунами может оказаться значительной.

При наклонном падении волны на неоднородности ( $\alpha \neq 0$ ) величина коэффициента поглощения зависит от угла падения, причем рассеяние назад исчезает при  $\alpha = 45^\circ$ . Физически это связано с тем, что при  $45^\circ$  рассеянная волна распространяется перпендикулярно основной, не влияя на ее амплитуду. Интересно отметить, что при  $\alpha > 45^\circ$  рассеянная назад волна также распространяется вперед. При  $\alpha \rightarrow \pi/2$  величина  $\mu$  неограниченно растет.

<sup>2</sup> Применительно к волнам цунами в регулярном океане с учетом вязкости частотный ход коэффициента затухания оказывается другим ( $\mu \sim \sqrt{k}$ ), что связано с особенностями пограничного слоя в мелком море [32].



И этот результат легко объясняется резонансным характером рассеяния. При скольжении под очень малым углом эффективный масштаб корреляции резко возрастает ( $l_{\text{эфф}} = l/\cos\alpha$ ), так что неоднородности становятся все более крупномасштабными, а рассеяние на таких неоднородностях, как уже указывалось, сильно увеличивается.

Рассмотрим теперь двумерные изотропные неоднородности рельефа дна:  $\Phi(k_2) = \Phi(k_2)$ . В этом случае также удобно различать мелкие и крупные неровности. При мелкомасштабных неровностях  $\Phi(2k \sin\theta/2) \simeq \Phi(0) \sim \langle \varepsilon^2 \rangle l^2$  и

$$\mu \sim - \sqrt{gh_0} \langle \varepsilon^2 \rangle k^3 l^2.$$

Отсюда видно, что в случае мелкомасштабных неоднородностей изменилась частотная зависимость коэффициента поглощения ( $k^3$  вместо  $k^2$ ). При крупномасштабных неровностях спектр  $\Phi(k_2)$  отличен от нуля в малой окрестности  $\theta = 0$  (рассеяние происходит вперед), и после несложных вычислений получаем

$$\mu \sim - \sqrt{gh_0} \langle \varepsilon^2 \rangle k^2 l.$$

Таким образом, с помощью спектрального подхода удается более наглядно решить классическую задачу о рассеянии волны над неровным дном и выяснить характер (и необходимость) обычно используемых приближений.

Опишем в заключение этого раздела особенности затухания океанических волн других типов на неровном дне. Интересными особенностями обладают волны Россби с законом дисперсии (рис. 3)

$$\omega = -\beta k_x/k^2, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad (16)$$

где  $\beta = d\Omega/dy = \text{const}$ ,  $\Omega$  — параметр Кориолиса. Волны Россби сейчас интенсивно исследуются в связи с открытием крупных океанических вихрей в Атлантике, сделанным во время эксперимента «Полигон» [1]. Как видно из (16), фазовая скорость волн Россби всегда направлена в одну сторону (для северного полушария — на запад), так что отраженных волн в привычном смысле нет. Однако групповая скорость может быть направлена в обе стороны (цуги длинных волн бегут на запад, а коротких — на восток в северном полушарии), и при отражении таких волн, например от стенки, происходит трансформация волны с изменением ее длины.

Эти особенности проявляются при рассеянии волн на неровном дне, что видно из условий синхронизма (векторы взаимодействующих волн изображены на рис. 3 и 4). Рассеяние в этом случае происходит в волны с тем же направлением фазовой скорости, но с разными длинами волн, и компоненты рассеянного поля с другим направлением групповой скорости обеспечивают рассеяние назад. Конкретные вычисления затухания волн Россби проделаны в [16, 33].

Рис. 3

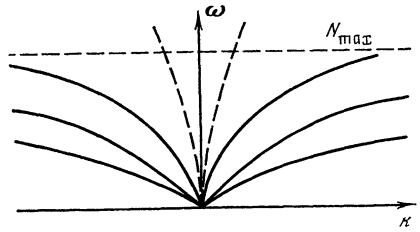
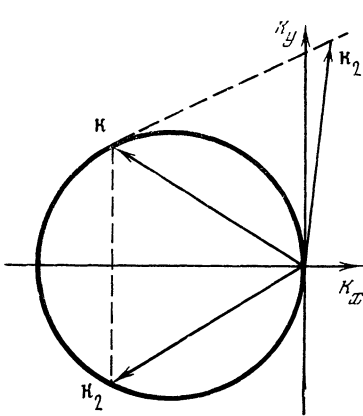
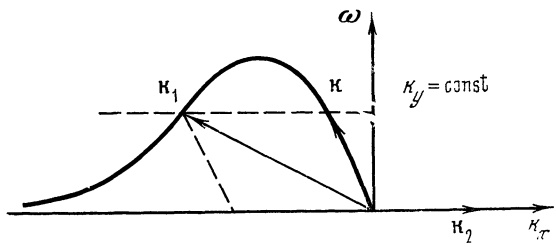


Рис. 5

Рис. 4



Другой пример — затухание внутренних волн на неровном дне. Как известно, внутренние волны существуют благодаря плотностной стратификации вод океана и имеют частоты ниже частоты Вайсяля  $N = \sqrt{\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}}$  ( $\rho_0$  — плотность морской воды) [1, 32]. Поле внутренних волн при непрерывной стратификации представляет собой суперпозицию бесконечного числа нормальных мод, их дисперсионные соотношения изображены на рис. 5. На этом же рисунке пунктиром показано дисперсионное соотношение поверхностной волны. Этой информации достаточно для определения характера рассеяния внутренней волны на неподвижной случайной топографии. Ясно, что знак  $\mu$  здесь отрицательный и внутренняя волна всегда затухает.

Поскольку частота волны не изменяется при взаимодействии, то рассеяние, как видно из рис. 5, должно происходить во все моды внутренних волн, а также в поверхностную волну (аналогичный результат должен иметь место при рассеянии поверхностной волны, в частности цунами, с частотой, меньшей  $N$ ; ее энергия переходит в энергию внутренних волн). Число мод определяется шириной спектра неоднородностей: в случае мелкомасштабных неровностей их число велико (примерно  $(kl)^{-1}$  при  $kl \ll 1$ ), при крупномасштабных неровностях рассеяние происходит только в волну с тем же номером моды, причем вперед. Конкретные

расчеты величины поглощения выполнены Ермаковым [34] и Беллом [35], которые показали, что влияние многомодовости поля внутренних волн приводит к сложным, в частности, немонотонным частотным зависимостям коэффициента поглощения от частоты.

Третий пример — затухание внутренней волны на случайных изменениях поля плотности (флуктуациях частоты Вьясяля). Если считать в океане  $N$  случайной функцией только вертикальной координаты  $z$ , а внутренняя волна имеет заданную вертикальную структуру, то очевидно, что в этом случае мы имеем случайную структуру моды внутренней волны, а затухание отсутствует. Формально это следует из (13), так как «волны неоднородности» в этом случае отсутствуют. Эта задача впервые рассматривалась Миропольским [36], указавшим на принципиальное отличие этой задачи от «классических», в которых волна обязательно затухает на неоднородностях.

В рамках спектрального подхода как мы видим, полученный ответ легко объясняется. Следует отметить, что, если считать глубину океана бесконечной, внутренняя волна не имеет определенной структуры по вертикали и распространяется под углом к неоднородности. В этом случае имеется  $z$ -компонента волнового вектора, волна взаимодействует с неоднородностью и обязательно затухает<sup>3</sup> [13, 14].

Возвращаясь к случаю конечной глубины, распространение моды можно по концепции Бриллюэна описать суперпозицией двух волн, распространяющихся под углом к неоднородности. Поскольку каждая из них обязана затухать, а мода не затухает, то это означает, что рассеянные поля каждой волны компенсируют друг друга. Отсюда наглядно виден физический смысл затухания волны в неоднородной среде, при котором энергия волны не поглощается в привычном смысле как в вязкой среде (т. е. переходит в тепло), а переизлучается, переходя в энергию рассеянных волн.

## 5. ГЕНЕРАЦИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ВЕТРОВЫМ ВОЛНЕНИЕМ НА ПОВЕРХНОСТИ МОРЯ

Хотя внутренние волны мало возмущают морскую поверхность (эти колебания, однако, могут быть зарегистрированы [37]), связь между глубинными и поверхностными слоями не является слабой, и при изменении метеоусловий меняются также амплитуды колебаний глубинных слоев воды. Воздействие атмосферы на внутренние волны происходит несколькими путями. Во-первых, пульсации атмосферного давления непосредственно раскачивают внутренние волны (как и поверхностные) в соответствии

<sup>3</sup> Если  $N$  — функция времени, то возможно усиление внутренней волны [13].

с резонансным механизмом Филлипса; линейная теория такого процесса рассматривалась в [38]. Во-вторых, внутренние волны отбирают энергию у поверхностных волн в результате нелинейного взаимодействия; динамические задачи такого рода изучались в [39]. Хотя спектр ветрового волнения считается узким, его ширина превышает частоту Вайсяля, и, следовательно, задача о генерации внутренних волн ветровым волнением должна рассматриваться в статистической постановке.

Будем считать ветровое волнение заданным, т. е. не зависящим от внутренних волн, — оправданность такого приближения не вполне ясна, поскольку время установления ветровых волн имеет порядок 10 мин — 1 ч, т. е. величину, характерную для периодов внутренних волн<sup>4</sup>. В этом приближении ветровые волны представляют собой заданные движущиеся неоднородности и задача о генерации внутренних волн может решаться на основании (13). Поскольку частоты внутренних и поверхностных (ветровых) волн несоизмеримы, то можно упростить выражение (13). В частности, первое слагаемое равно нулю (внутренняя волна не может распасться с образованием высокочастотной поверхностной волны). Кроме того, условия синхронизма показывают, что во взаимодействии всегда участвуют две поверхностные волны и одна внутренняя, поэтому в (13) пропадает суммирование по модам внутренних волн. В результате формула (13) принимает вид

$$\mu_k^m = 4\pi \int dk_1 [|V_{0,-1,0+1}^{b,n,m}|^2 \Phi(k+k_1) \delta(\omega_k^m + \Omega_{k_1} - \Omega_{k_1+k_2}) - |V_{0,1,0-1}^{b,n,n}|^2 \Phi(k_1-k) \delta(\omega_k^m - \Omega_{k_1} + \Omega_{k_1-k})]. \quad (17)$$

Здесь  $\Phi(k)$  — пространственный спектр ветрового волнения,  $\Omega$  — частота поверхностной волны и  $\omega$  — частота  $m$ -й моды внутренней волны.

Рассмотрим вначале наиболее простой случай, когда спектр волнения можно аппроксимировать дельта-функцией. Примером такого волнения может, по-видимому, служить зыбь с узким угловым и пространственным спектром. В этом случае

$$\mu = 4\pi \Phi(k_0) [|V|^2 \delta(\omega_k + \Omega_{k_0-k} - \Omega_{k_0}) - |V|^2 \delta(\omega_k - \Omega_{k_0+k} + \Omega_{k_0})], \quad (18)$$

где  $k_0$  — волновое число зыби. Из-за дельта-функций, входящих в (18), при заданном  $k_0$  имеются только две внутренние волны, которые взаимодействуют с ветровым волнением (рис. 6), причем более низкочастотная волна усиливается, а высокочастотная затухает. Физически этот результат легко объяснить, если учесть, что в первом случае поверхностная волна распадается, а во втором происходит слияние внутренней и поверхностных волн.

<sup>4</sup> Физический интерес представляет и обратная задача: перестройка спектра ветрового волнения регулярной внутренней волной в связи с проблемой видения внутренних волн из космоса [40—42].

Следует отметить, что в формуле (18)  $m$  — произвольное число. Это означает, что ветровое волнение генерирует сразу несколько внутренних волн с различной вертикальной структурой, причем генерация различных внутренних волн происходит независимо.

В случае широкого спектра ветрового волнения (а эта ситуация является типичной) знак  $\mu$  определяется конкуренцией процессов распада и слияния и зависит, вообще говоря, от конкретного вида спектра. Рассмотрим генерацию сравнительно длинных

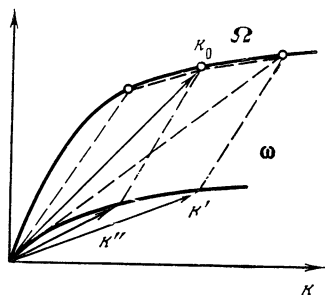


Рис. 6

внутренних волн. Тогда при  $k \ll k_0$ ,  $k_1$  из (17) получается следующая приближенная формула:

$$\mu \simeq 8\pi \int dk_1 k \frac{d_i}{dk_1} [|V_{0,1,-1}^{b,n,n}|^2 \Phi(k_1)] \delta(\omega_k - v_{гр}(k_1)k), \quad (19)$$

где  $v_{гр}$  — групповая скорость поверхностных волн. Отсюда, кстати, следует еще одна интерпретация взаимодействия внутренней волны с ветровым волнением. Поверхностные волны на квантовом языке можно рассматривать как поток квантов (частиц) со средней скоростью  $v_{гр}$ . Затухание волн на резонансных частицах (скорости которых равны фазовой скорости волны) хорошо известно — это затухание Ландау. Роль функции распределения частиц играет величина  $f = |V|^2 \Phi$ . Усиление или затухание волны определяется знаком  $df/dk_1$ .

Для одномерного волнения с широким спектром из (19) получаем явное выражение для декремента волны

$$\mu = \frac{8\pi}{|dv_{гр}/dk_1|} \frac{d}{dk_1} ||V|^2 F|_{v_{гр}=\omega/k}. \quad (20)$$

Конкретные вычисления проведем для экспоненциальной модели стратификации с постоянной частотой Вьяйсяля. Для этого случая  $V$  и  $\omega(k)$  имеют вид

$$|V|^2 = \frac{\omega^5 k_z^2 k_1^{5/2}}{8\sqrt{g} N^2 H k^4}, \quad \omega = \frac{Nk}{\sqrt{k^2 + k_z^2}}, \quad (21)$$

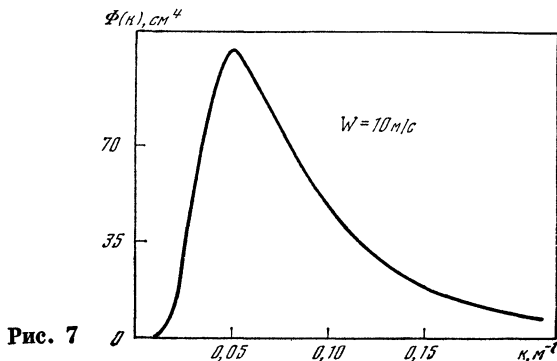
где  $k_z = m\pi/H$ ,  $H$  — глубина океана. Примем обобщенную формулу для одномерного спектра волнения в виде [43]

$$F(k_1) = \beta k_1^{-n} \exp(-pg/k_1 W^2), \quad (22)$$

где  $W$  — скорость ветра,  $\beta$ ,  $n$  и  $p$  — постоянные числа. Подставляя (21) и (22) в (20) и учитывая, что  $v_{гр} = 1/2 \sqrt{g/k_1}$ , получаем окончательно

$$\mu = \frac{4\pi g}{v^3} \exp(-4pv^2/W^2) \left( \frac{5}{2} - n \frac{4pv^2}{W^2} \right).$$

При  $p = 0$  (т. е. спектр монотонно спадает в области высоких частот) усиление возможно только, если  $n < 2,5$ . Из данных наблюдений следует, что  $n \geq 2,5$  (это соответствует  $F(\omega) \sim \omega^{-4} \div \omega^{-6}$ ), поэтому внутренние волны затухают в поле ветрового



волнения. Интересно отметить, что спектру слабой турбулентности гравитационных волн, найденному в [44], соответствует  $n = 2,5$  и слабая турбулентность не влияет на внутренние волны. Эти выводы, однако, справедливы только, если  $p = 0$ , так что максимум спектра ветрового волнения приходится на очень низкие  $k$ , сравнимые с волновыми числами внутренних волн, а при этих условиях формула (20) неприменима.

Учтем более реальный случай  $p \neq 0$  и примем для расчетов  $n = 3$  и  $p = 2$  (такие значения принимаются, например, в формуле Ролла—Фишера для экспериментального спектра волнения [43]). Тогда усиление возможно только при сравнительно слабом ветре  $W < 4v$ . С учетом того, что для внутренних волн  $v < 0,5 \div 3$  м/с, критическое значение скорости ветра оказывается равным 2 — 12 м/с. При этом усиливаются только длинные внутренние волны, а короткие затухают. При больших скоростях ветра все внутренние волны затухают. Этот вывод может показаться парадоксальным, но подчеркнем, что речь идет о среднем поле (регулярной компоненте). Случайные внутренние волны, разумеется, усиливаются при любом ветре.

Расчет величины  $\mu$  для «настоящего» океанологического спектра Ролла—Фишера (рис. 7)

$$\Phi(k, \theta) = \beta k^{-4} \exp(-2g/kW^2) \cos^2(\theta - \theta_0),$$

$$|\theta - \theta_0| \leq \pi/2$$

выполнен в [24, 45]. Громоздкие вычисления показывают, что наиболее интенсивно генерируются регулярные внутренние волны, распространяющиеся по направлению ветра; волны, распространяющиеся поперек ветра, затухают. Характерное время усиления (затухания) волн оказывается порядка нескольких суток для типичных значений глубины и стратификации океана.

В заключение укажем, что рассмотренный механизм усиления одних волн другими должен встречаться для многих процессов в океане, например, при генерации волн Россби внутренними волнами [46].

## 6. РАСПРОСТРАНЕНИЕ РЕГУЛЯРНОЙ ВОЛНЫ НА ФОНЕ СЛАБОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

До сих пор мы рассматривали распространение волны в заданном поле «чужих» волн. Очевидно, что аналогично можно исследовать поглощение волны в поле случайных волн той же физической природы. Особый интерес такая задача вызывает в связи с изучением релаксации когерентного поля на фоне слабой турбулентности. Под слабой турбулентностью, как известно, понимается взаимодействие большого числа случайных квазимонохроматических волн [47—49]. Эти процессы интенсивно исследуются для волн на воде, в частности, найдены спектры колмогоровского типа для гравитационных и капиллярных волн [44, 50], внутренних волн [51, 52] и волн Россби [53]. Большую роль (хотя и не определяющую) здесь играют соображения размерности, позволяющие, как и в классической теории Колмогорова, найти энергетические спектры без решения соответствующих уравнений (см. ниже). Этим же соображениям оказывается достаточно, чтобы определить частотную зависимость коэффициента поглощения регулярной волны на фоне слабой турбулентности. Можно получить размерную оценку декремента  $\mu$  из (13)

$$\mu \sim kF(k) |V|^2/\omega$$

( $F$  — одномерный спектр слабой турбулентности), и для нахождения  $\mu$  необходимо определить  $F$  и  $|V|^2$ . Эту задачу также можно решить с помощью соображений размерности, применение которых к уравнениям теории слабой турбулентности описано в работе [48]. Кинетическое уравнение (уравнение для спектра волн) имеет вид [47—49]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\mathbf{k})}{\partial t} = I = & 4\pi \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \{ |V_{0,1,2}|^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \times \\ & \times \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) (\Phi_1 \Phi_2 - \Phi \Phi_1 - \Phi \Phi_2) + \\ & + 2 |V_{1,0,2}|^2 \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k} - \mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega - \omega_2) \times \\ & \times (\Phi_1 \Phi_2 + \Phi \Phi_1 - \Phi \Phi_2) \}. \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда размерностная оценка интеграла столкновений

$$I \sim k\Phi^2 |V|^2/\omega, \quad (24)$$

где  $k$  означает  $k$  в степени размерности пространства ( $k = k_x k_y \dots$ ).

Учтем теперь, что для инерционного интервала (области, где существенно только нелинейное взаимодействие волн, а инкременты малы) обычно предполагается, что передача энергии по спектру происходит каскадно с неизменным потоком энергии<sup>5</sup>. Это означает, что уравнение (23) может быть записано в виде уравнения неразрывности

$$\partial E(k)/\partial t + \partial P/\partial k = 0. \quad (25)$$

Здесь  $E(k)$  — одномерный энергетический спектр, связанный с  $\Phi(k)$  простым соотношением  $E(k) \sim \omega\Phi(k) k/k \sim \omega F$ . Отсюда следует, что

$$\frac{\partial P}{\partial k} \sim \frac{\omega k}{k} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \sim \frac{\omega k}{k} I,$$

или

$$I \sim P/\omega k. \quad (26)$$

Сравнивая (24) и (26), находим величину

$$|V|^2 \sim P/k^2\Phi^2 \sim P/k^2 F^2$$

и коэффициент поглощения

$$\mu \sim P/\omega k F \sim P/k E(k).$$

Как видим, коэффициент поглощения определяется величиной потока и спектра энергии, которые связаны между собой. Эту связь также удастся определить из соображений размерности. При этом целесообразно выделить два класса волн: «поверхностных», занимающих ограниченный по вертикали объем воды (к нему относятся короткие поверхностные волны и внутренние волны, прижатые к термоклину), и «объемных», занимающих весь объем жидкости (длинные поверхностные и внутренние волны, волны Россби). Такое разделение обусловлено тем, что соображения размерности пригодны только в случаях, когда отсутствуют другие масштабы длины и времени, кроме  $k^{-1}$  и  $\omega^{-1}$ . Между тем энергия объемных волн, очевидно, пропорциональна глубине океана и зависит от двух масштабов. Однако плотность энергии зависит только от  $k^{-1}$ , и, следовательно, снова можно применять соображения размерности. Первый класс рассмотрен в [48]. Анализ размерности сводится, по существу, к следующему.

<sup>5</sup> Или какой-либо другой величины, например числа квантов, энтрофии и т. д. Знак потока может быть определен из анализа интеграла столкновений [53а].



Кинетическая энергия в поверхностной волне равна  $E = \int \langle u^2 \rangle dz$ , и ее размерность есть  $l^3/t^2$ . Из определения  $E = \int E(k) dk = \int E(\omega) d\omega$  следуют размерности  $E(k)$  и  $E(\omega)$ , и с помощью (25) потока  $P$

$$E(k) \sim l^4/t^2, \quad E(\omega) \sim l^3/t, \quad P \sim l^3/t^3.$$

Поскольку других масштабов нет, то  $E(k)$  и  $E(\omega)$  должны быть сконструированы из  $\omega$ ,  $k$  и  $P$ . Чтобы такая связь была однозначной, воспользуемся снова кинетическим уравнением. Из сравнения (24) и (26) следует, что  $E(k) \sim P^{1/2}$ . После этого зависимость от  $k$  и  $\omega$  уже находится однозначно:

$$E(k) \sim \sqrt{P\omega} k^{-5/2}, \quad E(\omega) \sim \sqrt{P/\omega} k^{-3/2}. \quad (27)$$

Используя (27), находим зависимость декремента волны от волнового числа и частоты:  $\mu \sim \sqrt{P/\omega} k^{3/2}$ .

Для объемных волн необходимо работать с величиной  $E_0 \sim \langle u^2 \rangle$ , имеющей размерность  $l^2/t^2$ . В этом случае  $E_0(k) \sim l^3/t^2$ ,  $E_0(\omega) \sim l^2/t$ ,  $P_0 \sim l^2/t^3$ , и, подобно (27), находим спектры слабой турбулентности в виде

$$E_0(k) \sim \sqrt{P_0\omega} k^{-2}, \quad E_0(\omega) \sim \sqrt{P_0/\omega} k^{-1}.$$

Тогда декремент затухания регулярной волны оказывается равным  $\mu_0 \sim \sqrt{P_0/\omega} k$ .

Результаты расчетов для волн на воде сведены в таблицу. Как видим, зависимости  $\mu$  от  $k$  оказываются самыми разнообразными и могут определяться дробными степенями волнового числа.

Таким образом, используя только соображения размерности, удается определить частотную зависимость декремента затухания регулярной волны на фоне слабой турбулентности без вычисления интеграла (13).

## 7. ОБ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ СРЕДНИХ ПОЛЕЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

В последнее время схема метода среднего поля была обобщена на нелинейные волны в средах со случайными неоднородностями, в частности, для длинных поверхностных волн над неровным дном [12, 29] и акустических волн при наличии флуктуаций скорости звука [54—56]. К этим работам близко примыкают «плазменные» работы [57, 58], а также [59, 60]. Идею такого обобщения проще всего пояснить на уравнении (1), в которое добавим нелинейный член

$$\hat{L}u = \varepsilon \hat{M}u + \hat{Q}u^2$$

( $\hat{Q}$  — детерминированный для простоты линейный оператор).

| Тип волн   | $E(k)$          | $E(\omega)$          | $\mu(k)$       |
|--|-----------------|----------------------|----------------|
| Капиллярные волны на глубокой воде (поверхностные)         | $\sim k^{-7/4}$ | $\sim \omega^{-3/2}$ | $\sim k^{3/4}$ |
| Волны Россби (объемные)                                    | $\sim k^{-5/2}$ | $\sim \omega^{1/2}$  | $\sim k^{3/2}$ |
| Короткие внутренние волны в безграничном океане (объемные) | $\sim k^{-2}$   | —                    | $\sim k$       |
| Длинные внутренние и поверхностные волны (объемные)        | $\sim k^{-3/2}$ | $\sim \omega^{-3/2}$ | $\sim k^{1/2}$ |
| Капиллярные волны на мелкой воде (объемные)                | $\sim k^{-1}$   | $\sim \omega^{-1}$   | const          |

Подставляя поле в виде суммы регулярной и случайной компонент, получаем систему двух уравнений:

$$\hat{L} \langle u \rangle = \langle \varepsilon \hat{M} u' \rangle + \hat{Q} \langle u \rangle^2 + \hat{Q} \langle u'^2 \rangle, \quad (28)$$

$$\hat{L} u' = \varepsilon \hat{M} \langle u \rangle + [\varepsilon \hat{M} u' - \langle \varepsilon \hat{M} u' \rangle + \hat{Q} (u'^2 - \langle u'^2 \rangle) + 2Q \langle u \rangle u']. \quad (29)$$

Если неоднородность ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) и, главное, нелинейность малы ( $\langle u^2 \rangle \rightarrow 0$ ), то естественно снова в (29) оставить только первое слагаемое. Тогда  $u'$  легко находится (формула (6)) и уравнение для среднего поля получается в виде

$$\hat{L} \langle u \rangle = \hat{N} \langle u \rangle + \hat{Q} \langle u \rangle^2.$$

Это уравнение замкнуто относительно  $\langle u \rangle$ , и далее могут быть применены обычные методы нелинейной теории волн. Следует, однако, иметь в виду, что используемая здесь (как и во всех предыдущих разделах) процедура замыкания уравнений не является вполне строгой, поскольку очевидно, что затухание среднего поля обязательно должно сопровождаться нарастанием рассеянного поля и, следовательно,  $u'$  становится сравнимым с  $\langle u \rangle$ , хотя предполагалось, что  $u' \ll \langle u \rangle$ . Косвенным аргументом в пользу корректности используемой схемы может служить тот факт, что в линейной теории ее иногда удается обосновать (см., например, [7, 61, 62]). В нелинейных задачах обосновать такую схему пока еще не удалось, и трудности на этом пути очевидны. Поэтому большую теоретическую ценность имеют модельные, точно решаемые уравнения, на примере которых удастся сравнить точные результаты с приближенными и оценить корректность теоретических предпосылок.

В качестве такого модельного уравнения рассмотрим уравнение первого порядка [3, 4]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(t) \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{Q}_{\text{л}} u + \hat{Q}_{\text{нл}} u = 0, \quad (30)$$

где  $\hat{Q}_л$  и  $\hat{Q}_{нл}$  — соответственно линейный и нелинейный детерминированные операторы, не зависящие явно от  $x$ , и  $\alpha(t)$  — случайная функция времени. Легко видеть, что замена переменных  $t = t$ ,  $z = x - \eta(t)$ ,  $\dot{\eta}(t) = \alpha(t)$ ,  $\eta(0) = 0$ ,  $u(x, t) = U(z, t)$  переводит стохастическое уравнение (30) в детерминированное

$$\partial U / \partial t + \hat{Q}_л U + \hat{Q}_{нл} U = 0, \quad (31)$$

решение которого связано с решением (30):

$$u(x, t) = U(x - \eta(t), t).$$

В принципе  $U(z, t)$  может быть случайной функцией как из-за случайных начальных условий, так и из-за возможной стохастизации решений уравнения (31) (например,  $U$  является странным аттрактором). Важно, однако, подчеркнуть, что возможная статистика  $U$  не связана со статистикой  $\alpha$ . По известной  $U$ , которую будем считать детерминированной, нетрудно определить моменты  $u(x, t)$ . В частности, среднее поле описывается выражением

$$\langle u(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} U(x - \eta, t) W(\eta, t) d\eta, \quad (32)$$

где  $W$  — вероятностное распределение  $\eta$ , которое в случае гауссовости и стационарности  $\alpha(t)$  при  $t \gg \tau$  ( $\tau$  — время корреляции) имеет вид

$$W(\eta, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \alpha^2 \rangle \tau t}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2 \langle \alpha^2 \rangle \tau t}\right).$$

Используя (32), простым дифференцированием легко найти точное уравнение для  $\langle u \rangle$

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \hat{Q}_л \langle u \rangle + \langle \hat{Q}_{нл} u \rangle = \langle \alpha^2 \rangle \tau \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2}. \quad (33)$$

Применяя стандартную схему метода среднего поля, мы нашли бы уравнение для  $\langle u \rangle$  в виде

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \hat{Q}_л \langle u \rangle + \hat{Q}_{нл} \langle u \rangle = \langle \alpha^2 \rangle \tau \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2}, \quad (34)$$

отличающееся от (33) только нелинейным членом. Этот простой пример показывает, что диссипация волны из-за рассеяния вычисляется правильно в методе среднего поля<sup>6</sup>, а нелинейное слагаемое отличается от точного. Это отличие является существенным и приводит к различному поведению решений уравнений (33) и (34). Приведем только один пример, когда уравнение (31) имеет

<sup>6</sup> Такой же вывод можно получить и при учете пространственно-временных флуктуаций [61, 62, 65].

вид уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(t) \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

В методе среднего поля уравнение для  $\langle u \rangle$  имеет снова вид уравнения Бюргерса с эффективной вязкостью  $\nu_{эфф} = \nu + \langle \alpha^2 \rangle \tau$ . В частности, оно допускает решение в виде стационарной ударной волны

$$\langle u(x, t) \rangle = U_0 \left[ 1 - \text{th} \frac{U_0(x - U_0 t)}{2\nu_{эфф}} \right],$$

в то время как вычисления по формуле (32) приводят на больших временах и при  $\langle \alpha^2 \rangle \tau t \gg \nu^2 / U_0^2$  к

$$\langle u(x, t) \rangle \simeq 2U_0 \left[ 1 - \Phi \left( \frac{x - U_0 t}{\sqrt{2 \langle \alpha^2 \rangle \tau t}} \right) \right],$$

где  $\Phi$  — интеграл вероятности. Это решение уже не является стационарным. Таким образом, в этом случае решения даже качественно отличаются друг от друга.

Итак, метод среднего поля оказался некорректным применительно к точно решаемому уравнению. Последнее заставляет относиться к этому методу с осторожностью, тем более что нам удалось построить и другие примеры для более сложных случаев распространения нелинейных волн в диспергирующих средах, где этот метод также неприменим [63]. Все же сейчас нельзя однозначно утверждать, что метод среднего поля не является адекватным процессу распространения, поскольку обычно существенную роль играет рассеяние назад, не учитываемое в рамках модельного уравнения. Этот вопрос заслуживает дальнейшего обсуждения.

Не следует, однако, думать, что исследования по нелинейной теории волн в случайных средах в литературе отсутствуют. Имеется цикл работ по распространению акустического сигнала в шумовом звуковом поле [66, 67], по кинетическим уравнениям для плотностей вероятности нелинейных волн в средах с плавными неоднородностями [68], борновскому приближению для нелинейных волн [69] и некоторым другим вопросам. Результаты этих работ применимы лишь к узкому классу волн (в основном к процессам, описываемым уравнением Бюргерса) и пока нельзя обобщить для более сложных уравнений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Каменкович В. М., Корт В. Г. Изменчивость Мирового океана. Л., Гидрометеоздат, 1974.
2. Федоров К. Н. Тонкая термохалинная структура вод океана. Л., Гидрометеоздат, 1976.
3. Леонтьев О. К. Дно океана. М., «Мысль», 1968.

4. *Барабаненков Ю. Н., Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. М.*— УФН, 1970, 102, № 1, с. 3.
5. *Рыжов Ю. А., Тамойкин В. В.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1970, 13, № 3, с. 356.
6. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. М., «Наука», 1976.
7. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
8. *Чернов Л. А.* Распространение волн в случайно неоднородных средах. М., «Наука», 1976.
9. *Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Статистические явления при распространении волн. Рязань, РТИ, 1975.
10. Труды II и III школ по нелинейным колебаниям и волнам.— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, 17, № 4; 1976, 19, № 5—6.
11. *Bourret R. S.*— Can. J. Phys., 1962, 40, p. 782.
12. *Howe M. S.*— J. Fluid Mech., 1971, 45, N 4, p. 785.
13. *Mysak L. A., McGorman R. E.*— Geophys. Fluid Dynamics, 1973, 5, p. 243.
14. *Mysak L. A.*— Mem. Soc. roy. scient. Liège, 1972, 4, p. 171.
15. *Keller J. B., Veronis G.*— J. Geophys. Res., 1969, 74, N 8.
16. *Thomson R. E.*— J. Fluid Mech., 1975, 70, N 2.
17. *Бреховских Л. М., Гончаров В. В., Куртенов В. М., Наугольных К. А.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, № 5—6, с. 842.
18. *Наугольных К. А., Рыбак С. А.*— Акуст. журн., 1976, 22, № 5, с. 735.
19. *Бреховских Л. М., Гончаров В. В., Куртенов В. М., Наугольных К. А.*— Океанология, 1975, 15, № 2, с. 205.
20. *Воронович А. Г.*— Океанология, 1975, 15, № 5, с. 773.
21. *Ball F. K.*— J. Fluid Mech., 1964, 19, N 3, с. 521.
22. *Thorpe S. A.*— J. Geophys. Res., 1975, 80, N 3, с. 328.
23. *Ермаков С. А., Пелиновский Е. Н.*— Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1976, 12, № 3, с. 312.
24. *Ермаков С. А., Пелиновский Е. Н.*— Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1977, 13, № 5, с. 537.
25. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З.*— В кн.: Нелинейная теория плазмы, вып. 7. М., Атомиздат, 1973, с. 3.
26. *Гапонов А. В., Островский Л. А., Рабинович М. И.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1970, 13, № 2, с. 163.
27. *Ермаков С. А., Пелиновский Е. Н., Тамойкин В. В.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1977, 20, № 5, с. 734.
- 27а. *Гавриленко В. Г., Дорфман Я. М.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1972, 15, № 2, с. 249.
28. *Наугольных К. А., Рыбак С. А.*— Материалы IX Всесоюз. акуст. конф. М., АКИН АН СССР, 1977, с. 46.
29. *Yajima N.*— J. Phys. Soc. Japan, 1972, 33, N 5, p. 1471.
30. Проблема цунами. М., «Наука», 1968.
- 30а. *Bell T. H.*— J. Geophys. Res., 1975, 80, N 3, p. 320.
31. *Ермаков С. А., Пелиновский Е. Н.*— Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1978, 14, № 11, с. 1142.
32. *Филлипс О. М.* Динамика верхнего слоя океана. М., «Мир», 1969.
33. *Одуло А. Б., Пелиновский Е. Н.*— Океанология, 1978, 18, № 5, с. 940.
34. *Ермаков С. А.*— Изв. АН СССР. Физ. и атмос. океана, 1977, 13, № 12.
35. *Bell T. H.*— Geophys. Fluid Dynamics, 1977, May.
36. *Миропольский Ю. З.*— Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1973, 9, № 4, с. 411.
37. *Смирнов В. Н.*— Докл. АН СССР, 1972, 206, № 5, с. 1106.
38. *Леонов А. И., Миропольский Ю. З.*— Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1973, 9, № 8, с. 851.
39. *Бреховских Л. М., Гончаров В. В., Куртенов В. М., Наугольных К. А.*— Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1972, 8, № 2, с. 192.
40. *Филлипс О. М.*— Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1973, 9, № 2, с. 154.

41. *Apel J. H.*— Trans. Amer. Geophys. Union, 1976, 49, p. 619.
42. *Федоров К. Н.*— Океанология, 1976, 16, № 5, с. 787.
43. Регистр СССР. Ветер и волны в океанах и морях. Л., Транспорт, 1974.
44. *Захаров В. Е., Филоненко Н. Н.*— Докл. АН СССР, 1966, 170, № 6, с. 1291.
45. *Ермаков С. А., Пелиновский Е. Н.* Теория дифракции и распространения волн., ч. II. Ростов н/Д, 1977, с. 257.
46. *Пелиновский Е. Н.*—Труды советско-американского симпозиума по программе «Полимоде». Севастополь, МГИ АН УССР, 1977, с. 84.
47. *Hasselman K.*— Rev. Geophys., 1966, 4, N 1, p. 1.
48. *Кадомцев Б. Б., Конторович В. М.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, 17, № 4, с. 511.
49. *Захаров В. Е., Львов В. С.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1975, 18, № 10, с. 1460.
50. *Захаров В. Е.*— ПМТФ, 1965, 4, с. 35.
51. *Пелиновский Е. Н., Раевский М. А.*— Изв. АН СССР. Физ. атмосфер. и океана, 1977, 13, № 2, с. 187.
52. *Конторович В. М.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, № 5—6, с. 872.
53. *Пелиновский Е. Н.*— Океанология, 1978, 18, № 2, с. 192.
- 53а. *Кац А. В.*— ЖЭТФ, 1976, 71, № 12, с. 1204.
54. *George A. R., Plotkin K. J.*— Phys. Fluids, 1971, 14, N 3, p. 548.
55. *Plotkin K. J., George A. R.*— J. Fluid. Mech., 1972, 54, N 3, p. 449.
56. *Пелиновский Е. Н., Саичев А. И., Фридман В. Е.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, 17, № 6, с. 875.
57. *Тамойкин В. В., Файнштейн С. М.*— ЖЭТФ, 1973, 64, № 2, с. 505.
58. *Тамойкин В. В., Файнштейн С. М.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, 17, № 8, с. 1120.
59. *Заславский Г. М.*— ЖЭТФ, 1974, 66, № 2, с. 365.
60. *Богатырев Ю. К., Файнштейн С. М.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 18, № 6, с. 888.
61. *Музычук О. В.*— ТМФ, 1976, 28, № 3, с. 371.
62. *Апресян Л. А.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, 17, № 2, с. 165.
63. *Гурбатов С. Н., Пелиновский Е. Н., Саичев А. И.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1978, 21, № 10, с. 1082.
64. *Гурбатов С. Н., Пелиновский Е. Н., Саичев А. И.*— Материалы IX Всесоюз. акуст. конф. М., 1977, секция Б, с. 83.
65. *Музычук О. В.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, № 8, с. 1193.
66. *Руденко О. В., Чиркин А. С.*— ЖЭТФ, 1974, 67, № 11, с. 1903.
67. *Гурбатов С. Н., Дубков А. А., Малахов А. Н.*— ЖЭТФ, 1977, 72, № 2, с. 456.
68. *Малахов А. Н., Саичев А. И.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, 17, № 5, с. 699.
69. *Пелиновский Е. Н.*— Материалы VIII Всесоюз. акуст. конф., М., 1973, секция М, с. 24.

# СОДЕРЖАНИЕ

|  |     |
|--|-----|
| Предисловие . . . . .  | 3   |
| СОЛИТОНЫ   |     |
| <i>В. И. Петвиашвили</i><br>Неодномерные солитоны . . . . .  | 5   |
| <i>В. Б. Матвеев</i><br>Римановы поверхности и периодические решения нелинейных уравнений типа Кортевега—де Вриза . . . . .  | 20  |
| <i>Л. А. Дикий</i><br>Функция Грина дифференциальных операторов и гамильтоновы системы . . . . .   | 36  |
| <i>А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев</i><br>Нелинейная волна намагниченности в ферромагнетике как связанное состояние большого числа элементарных возбуждений системы . . . . . | 45  |
| <i>Е. И. Якубович</i><br>Устойчивость стационарных волн в нелинейных средах . . . . .  | 62  |
| ТУРБУЛЕНТНОСТЬ   |     |
| <i>А. А. Андронов, А. Л. Фабрикант</i><br>Затухание Ландау, ветровые волны и свисток . . . . .   | 68  |
| <i>С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, А. В. Тур, В. В. Яновский</i><br>Влияние вихрей на спектр акустической турбулентности . . . . .   | 105 |
| <i>В. И. Арнольд</i><br>Потеря устойчивости автоколебаний вблизи резонансов . . . . .  | 116 |
| <i>Б. Б. Кадомцев</i><br>Перезамыкание силовых линий в магнитной гидродинамике . . . . .   | 131 |
| <i>А. В. Кац, В. М. Конторович</i><br>Взаимосвязь равновесных и потоковых слаботурбулентных распределений . . . . .  | 151 |
| <i>О. И. Богоявленский, С. П. Новиков</i><br>Методы качественной теории динамических систем в общей теории относительности . . . . .   | 164 |

|   |     |
|---|-----|
| <i>А. С. Пиковский, М. И. Рабинович</i>   |     |
| О странных аттракторах в физике . . . . .   | 176 |
| <i>Я. Г. Синай</i>  |     |
| Стохастичность динамических систем . . . . .  | 192 |
| <i>Л. А. Бунимович, Я. Г. Синай</i>   |     |
| Стохастичность аттрактора в модели Лоренца . . . . .  | 212 |
| <i>Ю. М. Давыдов</i>  |     |
| Численный эксперимент в гидродинамике по исследованию срывных вязких потоков методом «крупных частиц» . . . . . | 227 |
| <i>В. И. Беспалов, А. А. Бетин, В. Г. Манишин, Г. А. Пасманик</i>   |     |
| Усиление воспроизводящей накачку стоковой волны при вынужденном рассеянии многомодовых пучков . . . . .         | 239 |

## ОКЕАН

|  |     |
|--|-----|
| <i>А. С. Монин, М. Н. Кошляков</i>   |     |
| Синоптические вихри, или волны Россби, в океане. Эксперимент и основы теории . . . . . | 258 |
| <i>Л. А. Островский</i>  |     |
| Нелинейные внутренние волны в океане . . . . .   | 292 |
| <i>К. А. Наугольных</i>  |     |
| Оптическая генерация звука в жидкости . . . . .  | 324 |
| <i>Е. Н. Пелиновский</i>   |     |
| Распространение волн в статистически неоднородном океане                               | 334 |



УДК 534.222.2

**Неоднородные солитоны.** Петвиашвили В. И.— В кн.: *Нелинейные волны*. М., «Наука», 1979, с. 5.

Содержится изложение некоторых теоретических вопросов, связанных с неоднородными стационарными решениями нелинейных уравнений. Рассматривается трехмерный солитон, представляющий собой релаксационную волну на пленке стекающей вязкой жидкости; излагается переход от уравнений звуковых волн с дисперсией к слабонеоднородному уравнению КДВ и численный метод нахождения неоднородных солитонных решений. Ил. 1, список лит. 17 назв.

УДК 538.574 : 530.18

**Римановы поверхности и периодические решения нелинейных уравнений типа Кортевега — де Вриза.** Матвеев В. Б.— В кн.: *Нелинейные волны*. М., «Наука», 1979, с. 20.

Приведены точные периодические решения уравнения КДВ с конечнозонным начальным условием. Показана связь конечнозонных решений с  $N$ -солитонными. Дан метод построения конечнозонных решений двумерных уравнений Захарова — Шабата на примере уравнения Кадомцева — Петвиашвили. В рамках последнего найдены также рациональные решения в виде двумерных солитонов. Для уравнения КДВ получены явные рациональные решения, порождаемые начальным условием вида  $u(x, 0) = N(N+1)x^{-2}$ . Отмечена замечательная связь полюсов этих решений с траекториями конечномерных динамических систем Мозера — Калоджеро. Кратко описаны решения уравнения КДВ, локализованные на растущем рациональном фоне. Ил. 2, список лит. 21 назв.

УДК 538.574 : 530.18

**Функция Грина дифференциальных операторов и гамильтоновы системы.** Дикий Л. А.— В кн.: *Нелинейные волны*. М., «Наука», 1979, с. 36.

Предложен общий метод нахождения пар дифференциальных операторов, позволяющих получить решение нелинейных уравнений теории волн, который дополняет известный метод обратной задачи теории рассеяния. Этот метод наряду с уравнениями позволяет строить гамильтонов формализм и находить первые интегралы. Список лит. 9 назв.

УДК 538.116 : 534.143

**Нелинейная волна намагниченности в ферромагнетике как связанное состояние большого числа элементарных возбудений системы.** Косевич А. М., Иванов Б. А., Ковалев А. С.— В кн.: *Нелинейные волны*. М., «Наука», 1979.

Рассматриваются нелинейные уравнения, описывающие макроскопическое поле намагниченности, сводящееся в линейном приближении к совокупности взаимодействующих бозе-возбуждений. Дается истолкование специфических локализованных решений этих уравнений в терминах элементарных возбудений и их спектра. Анализируются уравнения Ландау — Лифшица, определяющие динамику намагниченности в ферромагнетике. Показывается, что эти уравнения всегда допускают самолокализованные решения, которые описывают локальную прецессию намагниченности. Ил. 5, список лит. 14 назв.

УДК 621.372.22; 530.18

**Устойчивость стационарных волн в нелинейных средах.** Якубович Е. И.— В кн.: *Нелинейные волны*. М., «Наука», 1979, с. 62.

Рассказывается о новом методе исследования устойчивости стационарных одномерных волн в нелинейных средах.

УДК 1533.9 : 551.466 : 621.385.6

**Затухание Ландау, ветровые волны и свисток.** Андронов А. А., Фабрикант А. Л.— В кн.: *Нелинейные волны*. М., «Наука», 1979, с. 68.

Обсуждается аналогия между возбуждением волн и колебаний потоками в электронных системах и в гидродинамике и акустике. Проведено сопоставление майловского механизма возбуждения волн на воде ветром (а также поверхностных акустических волн) и пучковой неустойчивости продольных волн в плазме. Рассмотрена теория свистка — отрезка трубы, возбуждаемого потоком газа. Проведено обсуждение нелинейных явлений, возникающих при резонансном взаимодействии волн с потоками в гидродинамике. Ил. 16, список лит. 86 назв.

УДК 534.2

**Влияние вихрей на спектр акустической турбулентности.** Моисеев С. С., Сагдеев Р. З., Тур А. В., Яновский В. В.— В кн.: *Нелинейные волны*. М., «Наука», 1979, с. 105.

Исследуется влияние гидродинамических вихрей на спектр акустической турбулентности. Показано, что наличие крупномасштабных вихрей приводит к появлению эффективной дисперсии в области относительно больших масштабов аку-

стическая турбулентности и в возникновению турбулентной вязкости в области мелких масштабов звуковых волн. Оба эффекта при достаточно большой энергии вихрей снимают особенности у матричных элементов, описывающих процессы взаимодействия акустических волн высоких порядков, и способствуют формированию спектра звуковой турбулентности  $\varepsilon_k \sim k^{-5/2}$ . Ил. 2, список лит. 7 назв.

УДК 517.9 : 513.83

**Потеря устойчивости автоколебаний вблизи резонансов.** А р н о л ь д В. И. — В кн.: Нелинейные волны. М., «Наука», 1979, с. 116.

Изложены на «физическом» уровне строгости результаты по исследованию потери устойчивости автоколебаний. Обсуждается проблема выбора необходимого числа бифуркационных параметров, проводится разделение резонансов на слабые и сильные. Описывается метод нормальных форм Пуанкаре и результаты его применения к исследованию резонансов. Ил. 5, список лит. 5 назв.

УДК 533.95

**Перезамыкание силовых линий в магнитной гидродинамике.** К а д о м ц е в Б. Б. — В кн.: Нелинейные волны. М., «Наука», 1979, с. 131.

Обсуждается качественная картина и основные представления перезамыкания силовых линий в магнитной гидродинамике. Рассмотрены основные случаи и условия возникновения перезамыкания силовых линий магнитного поля в тороидальных системах, нацеленных на осуществление управляемой термоядерной реакции.

Ил. 15, список лит. 17 назв.

УДК 533.922 : 530.18

**Взаимосвязь равновесных и потоковых слаботурбулентных распределений.** К а ц А. В., К о н т о р о в и ч В. М. — В кн.: Нелинейные волны. М., «Наука», 1979, с. 151.

Рассматриваются новые объекты (взаимодействие частица — частица, плазменный турбулентный реактор и т. д.), на которые распространяются идеи колмогоровской турбулентности. Исследуется связь точечного источника со спектром в инерционном интервале. На примере взаимодействия электронов и излучения рассматривается взаимосвязь равновесных и степенных (потоковых) слаботурбулентных распределений. Показано, что одновременное наличие потока и температуры приводит к формированию единого распределения, зависящего от соотношения между потоками и температурой. Ил. 8, список лит. 29 назв.

УДК 621.371.523 : 531.51 : 517.93

**Методы качественной теории динамических систем в общей теории относительности.** Б о г о я в л е н с к и й О. И., Н о в и к о в С. П. — В кн.: Нелинейные волны. М., «Наука», 1979, с. 164.

Излагаются результаты, полученные авторами при исследовании уравнений общей теории относительности методами качественной теории дифференциальных уравнений. Спецификой применяемых методов является исследование особых точек и траекторий, лежащих на границе физической области, что позволяет, в частности, описать траектории, приближающиеся к сингулярным точкам, — режимы сжатия и расширения Вселенной. Табл. 1, ил. 2, список лит. 17 назв.

УДК 517.93 : 530.18

**О странных аттракторах в физике.** П и к о в с к и й А. С., Р а б и н о в и ч М. И. — В кн.: Нелинейные волны. М., «Наука», 1979, с. 176.

Рассматриваются привлекшие недавно внимание физиков странные аттракторы — притягивающие области в фазовом пространстве динамических систем, в которых траектории ведут себя стохастически. Обсуждаются примеры систем со странными аттракторами из различных областей физики, а также роль этих объектов в теории нелинейных колебаний и волн. Ил. 12, список лит. 44 назв.

УДК 538.56 : 519.25 : 517.9

**Стохастичность динамических систем.** С и н а й Я. Г. — В кн.: Нелинейные волны. М., «Наука», 1979, с. 192.

Рассмотрены основные понятия статистической теории динамических систем и обсуждаются условия, при которых поведение динамической системы можно считать в той или иной мере стохастичным. Даны определения эргодических и перемешивающихся систем. [Обсуждаются определение и свойства стохастических («странных») аттракторов неконсервативных динамических систем, свойства гиперболичности, примеры аттракторов. Рассмотрено влияние случайных возмущений на поведение стохастических систем. Ил. 8, список лит. 32 назв.]

УДК 538.56 : 519.25 : 517.9

Стохастичность аттрактора в модели Лоренца. Бунимович Л. А., Синай Я. Г. — В кн.: Нелинейные волны. М., «Наука», 1979, с. 212.

Обсуждаются статистические свойства «странного» аттрактора в модели Лоренца. Исследовано точечное отображение, соответствующее динамической системе этой модели. Установлено, что отображение обладает инвариантной мерой и является перемешивающим. Ил. 2, список лит. 13 назв.

УДК 517.9 : 533.7

Численный эксперимент в гидродинамике по исследованию срывных вязких потоков методом «крупных частиц». Давыдов Ю. М. — В кн.: Нелинейные волны. М., «Наука», 1979, с. 227.

Предложена разностная схема численного решения уравнений Навье — Стокса с помощью метода «крупных частиц» при умеренных числах Рейнольдса. Показано, что аппроксимационная вязкость, обеспечивающая устойчивость схемы, при этом достаточно мала и не сказывается на эффектах, связанных с молекулярной вязкостью. В качестве примера рассмотрено обтекание тела плоскопараллельным сверхзвуковым потоком. Ил. 1, список лит. 33 назв.

УДК 538.576.452.1

Усиление воспроизводящей накачку стоксовой волны при вынужденном рассеянии многомодовых пучков. Беспалов В. И., Бетин А. А., Манишин В. Г., Пасманик Г. А. — В кн.: Нелинейные волны. М., «Наука», 1979, с. 239.

Исследуется эффект воспроизведения стоксовой волной пространственного распределения сфокусированного многомодового пучка накачки. Найдены радиус огибающей и инкремент воспроизводящей накачку стоксовой волны. Показано, что при попутном вынужденном комбинационном рассеянии соответствующее значение инкремента уменьшается из-за четырехфотонного взаимодействия стоксовой и антистоксовой компонент. Табл. 2, ил. 1, список лит. 19 назв.

УДК 551.466.63

Синоптические вихри или волны Россби в океане. Эксперимент и основы теории. Монин А. С.: Кошляков М. Н. и В кн.: Нелинейные волны. М., «Наука», 1979, с. 258.

Дан обзор результатов экспериментальных и теоретических исследований синоптических вихрей в океане — одного из наиболее интересных океанографических открытий последнего десятилетия. Обсуждаются также модели океанских движений синоптических масштабов, включающие энергетические оценки, анализ бароклинной неустойчивости крупномасштабных течений и элементы теории волн Россби. Ил. 15, список лит. 122 назв.

УДК 621.371.222.4

Нелинейные внутренние волны в океане. Островский Л. А. — В кн.: Нелинейные волны. М., «Наука», 1979, с. 292.

Дан обзор результатов, полученных в последние годы в нелинейной теории внутренних волн в океане, включая внутренние гравитационные волны и внутренние волны Россби. Подробно обсуждаются особенности внутренних волн, отличающие их как объект общей теории нелинейных волновых процессов. Ил. 11, список лит. 64 назв.

УДК 534.232

Оптическая генерация звука в жидкости. Наугольных К. А. — В кн.: Нелинейные волны. М., «Наука», 1979, с. 324.

Дан обзор полученных к настоящему времени результатов по оптической генерации звука в поглощающей среде, обусловленной тепловым механизмом. Показано, что указанный процесс существенно зависит от соотношения между длительностью лазерного импульса и временем пробега звука через характерный размер области тепловыделения. Табл. 1, ил. 7, список лит. 10 назв.

УДК 621.371.222.4

Распространение волн в статистически неоднородном океане. Пелиновский И. Е. Н. — В кн.: Нелинейные волны. М., «Наука», 1979, с. 331.

Предложена модификация метода среднего поля применительно к задачам распространения волн в океане, позволяющая существенно упростить расчеты и привлечь физическую интуицию, уже сложившуюся при решении нелинейных задач о взаимодействии волн. Рассмотрены следующие приложения метода: рассеяние волн цунами, внутренних волн и волн Россби в океане с шероховатым дном, усиление внутренних волн ветровым волнением, затухание когерентной волны на фоне слабой турбулентности. Табл. 1, ил. 7, список лит. 69 назв.